Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

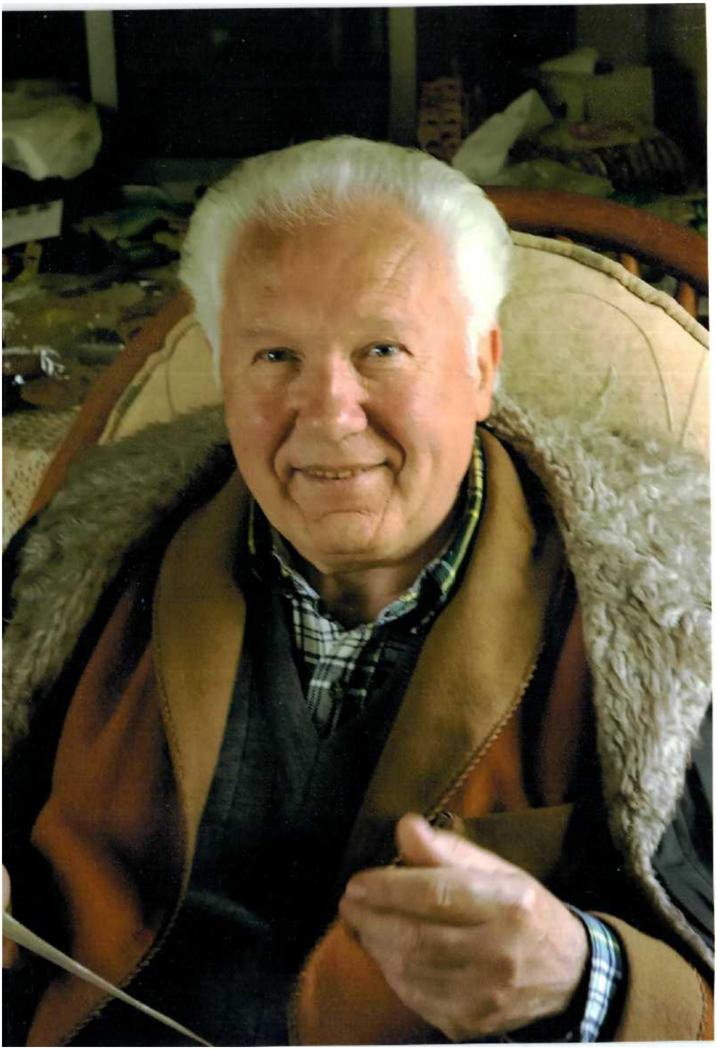
Книга 4

Алгебры и дифференциалы

Часть 6

Меры

Киев
«Освіта України»
2016



Кононюк Анатолий Ефимович

Из переписки с А.П Алпатовым – ученым в области ракетостроения.

Уважаемый Анатолий Ефимович!
Я пересылаю Ваши работы своим коллегам.
Если можно, удовлетворите мое любопытство.
Вы используете энциклопедический подход к изложению материала, но в своем собственном формате, я имею ввиду, что материал изложен, с одной стороны, как образовательный, с другой - как монографический.
Вот вопросы.
Какую цель Вы преследуете?
Сколько лет Вы выполняете эту циклопическую работу?
Есть ли у Вас команда, которая Вам помогает ?
Вопросы не обязательны для ответа.

С огромным уважением к Вам и Вашему труду, А.Алпатов
16.02.2015

Уважаемый Анатолий Петрович!

Чтобы дать содержательные ответы на Ваши вопросы, мне необходимо ознакомить Вас с некоторыми «вехами» моего длительного жизненного пути (я родился в 1936г. в г.Киеве).

Свою интеллектуальную трудовую деятельность я начинал с работы конструктором (1960 г.). На этом поприще я проработал 15 лет (из них 10 лет – в должности начальника конструкторского отдела). Работая конструктором, я начал приобщаться к «техническому эпистолярному жанру», наибольшим достижением которого является «Справочник конструктора оборудования пищевых производств», опубликованный в 1981г. издательством «Техніка», г. Киев.

В 1975 г. я перешел на преподавательскую работу в Киевский Политехнический институт (который я и заканчивал, приобретя проффесию инженера-механика) на кафедру технической кибернетики. На преподавательской работе я проработал 10 лет, а, затем, 5 лет занимался “чистой” научной деятельностью на этой же кафедре. Мои научные интересы были тесно связаны с конструкторской работой, а именно: в науке я занимался вопросами анализа и синтеза систем автоматизированного проектирования в машиностроении. Результатами этой деятельности стали: написание кандидатской и докторской диссертаций, а также написание двух книг – «Справочник по САПР» (1988 г.) и «Автоматизация проектирования ГПС (на базе промышленных роботов)» (1990 г.).

В 1990 г. я перешел на работу в НПО «Файл» (зам. директора по науке), где продолжал заниматься разработкой САПР для различных отраслей машинно- и приборостроения. Но, как говорят – «недолго музыка играла», и, в связи с отсутствием заказов, НПО «Файл» приказало долго жить, а я досрочно вынужден был уйти на пенсию. Это был 1995 г. С тех пор я нигде официально не работал.

Пока я был сравнительно физически крепок (до 70 лет), то активно занимался различными видами физической деятельности, но так как после 70 лет активный физический труд стал мне «не по мышцам», то я решил возвратиться к умственному труду, который был для меня более привлекательным (умственный потенциал у меня не только сохранился, но и, как показала дальнейшая работа на этом направлении, окреп, помогая мне получать определенные результаты в области совершенствования высшего образования и развития науки).

Возвратившись в образовательно-научную деятельность (2006 г.) я долго думал с чего начать. В среде ученых исповедуется постулат: «Если хочешь досконально (глубоко) усвоить (освоить) определенную научную дисциплину, то начни писать по этой дисциплине монографический труд». У меня уже был опыт написания монографий и я решил им воспользоваться. На ум пришло исповедуемое некоторым сообществом ученых выражение: « в науке столько науки, сколько в ней математики», и я решил проверить себя в написании учебного пособия по Высшей математике. С 2006 г. по 2008 г. работал над двухтомным учебным пособием под названием «Вища математика», которому Министерство образования и науки Украины выдало «гриф» учебного пособия. В 2009 году мой труд был напечатан издательством КНТ (г.Киев).

После этого я решил не писать «чистые» методические учебные пособия и стал работать над созданием учебно-научного методолгического обеспечения науки и высшего образования , что привело, как Вы правильно заметили, к созданию «...с одной стороны, как образовательных, с другой - как монографических» работ. Дело в том, что я заметил, что учебные пособия читают в основном студенты, а ученые их не читают (мол, чему может научить учебное пособие состоявшегося ученого), а научные монографии читают в основном ученые, и, то, как правило хорошо подготовленные ученые, а студенты научные монографии не читают из-за их сложности. Вот я и взял на себя смелость и огромный труд создать такой формат изложения, который (я назвал его: «научно-учебное методическое обеспечение» студентов (аспирантов, докторантов) и состоявшихся ученых) привлекал бы и начинающих ученых (прежде всего будущих магистров) и маститых ученых, особенно тех, которые руководят аспирантами, докторантами и другими группами ученых. Такова предыстория формата изложения материала, в ней же раскрыта и цель изложения материала в предлагаемом Вам (и другим читателям) виде.

Если говорить о цели моей столь бурной умственной деятельности под конец жизни, то я отвечу словами героя одного фильма (несколько их перефразируя): «Мне стало за Державу обидно с таким высшим образованием и наукой».

Первое, за что я серьезно взялся по указанным проблемам, так это за разработку «Концепции совершенствования высшего образования» (2008 г.). Данная концепция была окончательно сформирована в 2010 г. и издана издательством «Освіта України» в 2011 г. Она полностью согласуется с взглядами специалистов Всемирного банка, занимающихся вопросами совершенствования высшего образования на основании создания университетов мирового класса, а так же, с программой Всемирного банка «Построение общества знания в области третичного образования» (вопросами третичного образования Всемирный банк занимается с 1963 г.). Результатом реализации моей Концепции была разработка и создание Международного Университета подготовки Магистров (МУМ) - университета мирового класса. Мне удалось разработать идеологическое, методологическое и организационное обеспечения указанного университета. Были подготовлены все необходимые документы для регистрации такого университета (2012 г.), но преодолеть бюрократическую машину по регистрации и открытии Международного Университета Магистров мне не удалось.

Но я не опустил руки и начал работать над новой концепцией – «Концепция парадигмы развития науки», разработку которой я окончательно закончил в 2014.

Основой данной концепции является «Открытая развивающаяся панмедийная систем наук». Разработана структурная схем данной системы и я осуществляю ее наполнение научно-учебными методическими работами.

Что касается команды, то она была во времена работы в КПИ и в НПО «Файл». Причем команда очень профессиональная и результативная. Мы работали над создание мощной общемашиностроительной САПР. Больших результатов мы достигли в создании базовых обеспечений САПР: методического, информационного, математического, лингвистического, программного. Особенно сильная группа была в области разработки системы трехмерной графики. Наши результаты в области трехмерной графики (особенно в анализе невидимых линий, выполнении достоверных разрезов и сечений и др.) были конкурентоспособны на мировом уровне (в некоторых вопросах мы были «впереди планеты (научной) всей». Но развал СССР угробил все, в том числе, и науку. НПП «Файл» лопнуло, а я вынужден был уйти на пенсию. Многие ведущие специалисты моей команды выехали заграницу (США, Канада) и я остался, в научном плане, одинок. Но это, как Вы видите, меня не остановило в моем увлечении наукой, и я с еще большим «остервененинем» в нее окунулся. Но работать без команды очень сложно и тяжело. Даже обсудить посещающие мысли не с кем, кроме, как с самим «любимым». Как Вы, наверное, заметили, что рецензентом моих работ является проф. Печурин Н.К. Он очень потенциально сильная научная личность, но, кроме как на рецензирование, он не соглашается принимать участие в предложенной мной «научной гонке». Поэтому я готов войти в состав научной команды, которая исповедует взаимоприемлемые подходы развития науки.

Вот такие мои обширные ответы на Ваши вопросы.

Мои интересы в науке, как Вы видите из части моих работ, полностью совпадают с Вашими. Так почему бы нам не соединить наши научные усилия и построить азы будущего в науке. Ведь, по моему (и не только моему) убеждению, современная наука пребывает, в лучшем случае, в состоянии застоя. Вы только обратите внимание, за какие научные работы последнего десятилетия присуждают Нобелевские премии. Так, например, по экономике, с интервалом в несколько лет, присудили Нобелевские премии, в переводе на общедоступный язык, за использование математического аппарата теории игр в экономике. Но, ведь, согласно теории игр, если вы принимаете участие в игре и не ошиблись или вас не «надули», то вы не в состоянии ни выиграть, ни проиграть. Тогда в чем смысл использовать такую науку в экономике? Поэтому я предлагаю стать Данками (как Вы помните, есть такой персонаж в рассказах Горького «Сказки старухи Изергиль) в науке и обсудить начальные пути движения в науку будущего (ее структуру я постарался заложить в книге «Концепция парадигмы развития науки»).

С уважением, А Кононюк.

22.02.2015

kononyuka36@mail.ru

P.S. Перечень моих могографий:

1. Общая теория систем – 3 книги;
2. Общая теория информации – 4 книги;
3. Общая теория распознавания – 2 книги;
4. Общая теория консалтинга – 4 книги;
5. Основы научных исследований – 4 книги;
6. Дискретно-непрерывная математика – 22 книги;
7. Общая теория моделирования – 5 книг;
8. Общая теория оптимизации – 4 книги;
9. Общая теория понятий – 3 книги;
10. Общая теория познания и созидания – 2 книги;
11. Общая теория коммуникаций -1 книга;
12. Истины и информация (фундаментальная теория) – 1 книга;
13. Высшая математика – 2 книги;
14. Нейронные сети и генетические алгоритмы;
15. Концепция развития науки и совершенствования высшего образования;
16. Парадигма развития науки.

Из переписки с д.ф.м.н. Войценей В.С.

Вторник, 9 февраля 2016, 14:30 +02:00 от "Voitsenya V.S."

Здравствуйте, Анатолий Ефимович,

С удовольствием прочитал Ваш ответ А. Алпатову. Но все равно, остается не очень понятным, как Вам удалось написать так много (более 50 книг).

Желаю дальнейших успехов.

С уважением, В.С

Вторник, 9 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Уважаемый Владимир Сергеевич!

Отвечу Вам притчей. Однажды спросили известного художника: "Как Вам удается рисовать такие замечательные картины?. Он ответил: "Я

буру нужные краски и кладу их в нужное место". Отвечу по аналогии - я беру нужные "научные кирпичи и блоки" и кладу их в нужное место рассматриваемой научной проблемы. И так изо дня в день (практически без выходных) на протяжении последних десяти лет.
И что меня вдохновляет писать дальше, так это отзывы тех ученых, которым я разослал электронные версии своих книг.
А разослал я свои книги 1200 ученым НАНУ, в том числе всем академикам, член-корам, заведующим отделами и, практически, все те, кто пожелал откликнуться на мои работы, прислали положительные отзывы.

А.Кононюк

Из переписки с д.ф.м.н. Шаповалом И.Н.

4 февраля 2016 г. от Шаповала И.Н.

Вот хотел Вас спросить, можно, естественно, и не отвечать. По поводу

сочетания «дискретно-непрерывная математика», по отдельности общеупотребимых.

Но сочетание их вместе и ещё в титулах, по-видимому, не простая

констатация дихотомии. Ведь в бинарной логике «дискретно-непрерывная математика»= «вся математика».

Какой в этом Ваш подтекст, ведь любая нетривиальная трактовка этой связки выводит за рамки

существующей структуры её величества Математики?. Или это слишком сказано и такого смысла не предполагалось?

И.Ш.

7 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Здравствуйте, Иван Николаевич !

Высылаю книгу 7 "Графы " ч. 2, 3 по Дискретно-непрерывной математике.

Что касается сочетания названия «дискретно-непрерывная математика», то оно возникло спостанно. Я начал писать книги по дискретной математике, но затем написал четыре книги по функциям, дифференциалам, интегралам и мерам, а эти разделы математики, как мне известно, относятся к непрерывным математикам. Тогда я прибавил к названию «Дискретная математика» через тире слово «непрерывная». Видимо, согласно бинарной логики, мне следовало бы вместо тире поставить союз «и».

Кстати, существуют разделы математики, которые нельзя отнести ни к дискретным, ни к непрерывным, например, «Теория вероятностей», «Теория массового обслуживания», «Марковские процессы» и др.

С уважением , А . Кононюк

4 февраля 2016 г. от Шаповала И.Н.

Я примерно так и воспринял возникновение Вашего названия

«дискретно-непрерывная математика» по спонтанности.

Разговор этот вообще-то о нюансах, но начиная с некоторого уровня строгости оправданный,

по крайней мере во избежание путаницы.

Скажем, уже среди Ваших первых книг и функции, и меры бывают и непрерывные и дискретные.

Таковы и разделы математики, тем более Прикладная математика, а про математические книги вообще нечего говорить, они сплошь содержат и апеллируют то к непрерывности, то к дискретности,

чему пример и Ваш объёмный труд.

Я имел в виду всё же содержательную сторону двух этих категорий,

а не всевозможные салаты, которые из них можно приготовить.

В этом отношении, по содержанию мне было интересно, не имеете ли Вы под прицелом тот аспект,

который, опять же 100% не утверждаю, имелся в статье Неймана под конец его творчества,

рассмотреть альтернативы в бесконечно-значной логике, тогда и почти тавтология

«дискретно-непрерывная математика» = « математика» может получить

дополнительное содержание.

Да и, кстати сказать, есть же относящийся к обсуждаемому также глубокий результат

Коэна об аксиоме континуум (или дискретность).

(Любое бесконечное подмножество континуума является

либо счётным (или дискретным), либо континуальным (или непрерывным))

Спасибо за прочтение и за труд.

Иван Шаповал

9 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Высылаю книгу 4 "Алгебры и дифференциалы " ч.3 по Дискретно-непрерывной математике.

А сейчас отображу в этом послании некоторые мысли.

Чем больше я описываю разделов математики, тем больший сумбур в моей голове об этой «науке» - никакой системности (как Вы говорит: «винегрет»), а сплошная слабо связанная фрагментарность отдельных ее разделов. А ведь я нахожусь, где-то, на половине пути от намеченной мной реализации математической структуры: «Обобщенная теория математики» в рамках «Открытой развивающейся математической системы». Я полагаю, что всю математику можно изложить (представить) как систему, базирующуюся на множественно-графовой основе, т. е. отобразить всю математику средствами теории множеств и теории графов и на этом фундаменте построить математическую теорию под названием (как я уже говорил) «Обобщенная теория математики». А в таком виде Математика, как она сегодня представлена, по моему мнению, это не наука (в классическом понимании (определении) этого понятия). К сожалению, для реализации предложенного подхода у меня уже нет ни жизненного резерва, ни единомышленников на этом научном поприще.

Кстати, 27.05.2015 я обратился к Вам с предложением о сотрудничестве, но, к сожалению, ответа не получил. А жаль. Мне кажется, судя по фрагментам Вашей реакции на мои работы, у нас есть точки (а может «линии» и «поверхности») научного соприкосновения и мы могли бы совместно построить и «выдать на гора науки» еще не систематизированную научную теорию, например, «Истины и информация (фундаментальная теория)». (Между прочим, я уже набросал перечень вопросов, которые, на мой взгляд, следует рассмотреть в этой работе. Если Вам интересно знать содержание вопросов, я готов их Вам выслать). Я решил прервать мою дальнейшую работу над разделами Математики и сосредоточить свои умственные усилия на построении теории «Истины и информация», как одной из актуальных на нынешний день, как я полагаю, научных направлений. Присоединяйтесь!

С уважением , А . Кононюк

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Алгебры и дифференциалы. К.4,Ч.6 (в 7 частях)). — 15-и кн. Кн 4.— К.: Освіта України. 2016. 474 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 4)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

Оглавление

Раздел I. Меры в бесконечномерых пространствах

Введение

Раздел I настоящей работы посвящен некоторым вопросам теории меры в бесконечномерных пространствах, базирующийся на материалах книги Ю.Л. Далецкий, С.В. Фомин "Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерых пространствах " (М. «Наука», 1983). Имеется в виду обобщение понятий классического анализдоженза на функции бесконечномерного аргумента и другие связанные с ними объекты.
Потребность в построении такой математической дисциплины ощутилась в связи с развитием математической физики (в частности, вариационного исчисления). На необходимость ее создания впервые указали, по мнению авторов, Ж. Адамар и В. Вольтерра, а первые шаги в этом направлении сделали В. Вольтерра, Р. Гато, П. Леви и М. Фреше.
До какого-то момента перенос понятий анализа на бесконечномерный случай проводится без особых осложнений. Это относится, в частности, к дифференциальному исчислению и простейшим задачам теории дифференциальных уравнений, включая задачу Коши для уравнений первого порядка. Серьезные трудности начинаются при переходе к интегрированию и теории дифференциальных уравнений, аналогичных классическим уравнениям математической физики, при изучении которых нельзя обойтись без интегрирования. Правда, довольно давно разработана теория меры и интеграла на произвольном измеримом пространстве (см., например, П. Халмош). Однако в данном случае речь идет о теории интегрирования, связанной с другими структурами пространства, так как без такой связи невозможен содержательный гармонический анализ.
Первые исследования по теории средних на функциональном пространстве и соответствующей теории оператора Лапласа (оператор Лапласа —Леви) были накоплены в ряде работ. Они были развиты рядом математиков (важную роль при этом сыграла инициатива Е. М. Полищука) в направление, которое, однако, до сих пор мало связано с другими течениями в анализе и приложениями.
Значительно более плодотворным оказалось другое направление в теории интегрирования, связанное с развитием теории случайных

процессов, начиная с работ Н. Винера и А. Н. Колмогорова. Теория винеровских интегралов, исследованию которых была посвящена большая серия работ Р. Камерона и В. Мартина, прояснила ряд особенностей, свойственных интегрированию в функциональных пространствах и подробно изученных впоследствии в более общей ситуации.

Бесконечномерные дифференциальные уравнения также естественно возникают в теории случайных процессов. Во-первых, к ним приводят полугруппы, порождаемые марковскими случайными процессами в бесконечномерном пространстве. Отметим в связи с этим, что теория стохастических уравнений, развитая К. Ито, И. И. Гихманом и А. В. Скороходом, оказалась прекрасно приспособленной для бесконечномерных обобщений. Во-вторых, они появляются при изучении так называемых статистических решений эволюционных уравнений классической математической физики, начиная с работ Е. Хопфа.

Эта линия влияния теории вероятностей на бесконечномерный анализ могла бы и развиваться таким независимым образом. Однако исторически это было не совсем так.

В сороковых годах XX в. появился мощный дополнительный стимул для развития бесконечномерного анализа, связанный в первую очередь с работами Р. Фейнмана по квантовой механике и электродинамике, в которых был введен и использован (как обычно в физических работах, без надлежащего математического обоснования, отсутствие которого до некоторого момента не мешает физикам работать) знаменитый теперь «фейнмановский интеграл».

Эти работы, относящиеся к уравнению Шредингера, оказав обратное влияние на теорию случайных процессов, привели к уже строгим математическим результатам М. Каца в теории диффузионных уравнений. С другой стороны, в работах Ю. Швингера по квантовой электродинамике появились уравнения в функциональных производных, также потребовавшие для своего исследования развития процедур интегрирования в функциональных пространствах.

Источником уравнений в функциональных производных явились также уже цитированные выше работы Е. Хопфа по статистической гидромеханике, а также исследования в области статистической физики.

Все эти источники создавали серьезные предпосылки для работы в области математики. Переломным моментом здесь был, как представляется авторам, 1956 год, когда почти одновременно появились обзор И. М. Гельфанда и А. М. Яглома, статья Ю. В. Прохорова и серии работ И. Сигала. Эти работы, а также несколько

более поздняя книга И. М. Гельфанда и Н. Я. Виленкина, оказали значительное влияние на дальнейшее развитие теории.
Во всяком случае, через четверть века после описанных событий, бесконечномерный анализ представляет собой вполне самостоятельную область, тесно связанную с другими, более классическими областями математики, и имеющую важные приложения в физике. В силу этого она заслуживает последовательного и связного изложения.
Авторы старались изложить материал, в котором излагались бы основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями относительно функций бесконечномерного аргумента, и некоторые методы их исследования. Это по необходимости включало основы теории меры и интегрирования в функциональных пространствах. Однако теория меры играет в бесконечномерном анализе еще одну особую роль. Поскольку в бесконечномерном пространстве отсутствует стандартная мера типа меры Лебега, в нем нет канонического способа отождествления мер с обобщенными функциями, а также канонической операции спаривания между гладкими и обобщенными функциями, столь плодотворных для конечномерной математической физики. Поэтому возникает необходимость построения анализа мер, параллельного анализу функций. Двойственными объектами к гладким мерам при этом являются обобщенные функции, а к гладким функциям — обобщенные меры (распределения). Обе конструкции естественно связываются преобразованием Фурье.
Что касается дифференциальных уравнений, то уже сейчас в этой области имеется достаточно много разнообразных результатов. При отборе материала, естественно, отразились интересы и вкусы авторов, связанные в основном с исследованием эволюционных уравнений.

Для понимания содержания книги от читателя не требуется чего-либо выходящего за рамки основного университетского курса функционального анализа, основ теории меры и теории вероятностей и элементарной теории уравнений с частными производными. Для удобства читателя сообщается в соответствующих местах необходимые дополнительные сведения из теории линейных топологических пространств и теории случайных процессов.

1. МЕРЫ И КВАЗИМЕРЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В этой главе вводятся некоторые основные понятия, систематически используемые в книге. Рассматриваются вещественные меры на измеримых пространствах, включая аналог классической теоремы Колмогорова о σ-аддитивности в чисто измеримой ситуации, не связанной с наличием произведения пространств. Далее мы рассматриваем на алгебре цилиндрических множеств более общие объекты — квазимеры (в частности, цилиндрические меры) и приводим простейшие понятия, относящиеся к интегрированию по квазимерам. Предполагается, что читателю известны основные понятия общей теории меры и интеграла. Кроме этого, для понимания содержания главы нужны элементарные сведения из общей топологии и теории линейных операторов.

1.1. Вещественные меры на алгебре множеств

1°. Предмеры. В этом параграфе мы изложим некоторые факты, относящиеся к вещественным аддитивным функциям множеств в удобной для дальнейшего форме.
Пару $(X, \mathfrak{A})$, где X — некоторое множество, $\mathfrak{A}$ —алгебра его подмножеств, назовем *измеримым пространством.* Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, будем называть это пространство σ -*измеримым.*
Предмерой на $(X, \mathfrak{A})$ со значениями в линейном пространстве T будем называть отображение $\mu\colon \mathfrak{A} \to T$, обладающее свойством аддитивности:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \qquad (A,\ B \in \mathfrak{A},\ A \cap B = \varnothing).$$

Для линейного топологического пространства T предмеру μ назовем *мерой,* если она обладает свойством σ -аддитивности:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

$$\left(A_k \in \mathfrak{A},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A},\quad A_k \cap A_j = \varnothing,\ k \neq j\right).$$

Свойство σ -аддитивности ограниченной предмеры эквивалентно свойству ее непрерывности: $\mu(A_n) \to 0$, если $A_n \searrow \varnothing$ $(n\to\infty)$. Всюду в этой главе, если не оговорено противное, мы рассматриваем ограниченные предмеры со значениями из $\mathbf{R}^1$; если при этом $\mu(A) \geqslant 0 \ (A \in \mathfrak{A})$, предмера называется *положительной.*

Для каждой вещественной предмеры μ определяются положительные предмеры μ^+ и μ^- на том же измеримом пространстве:

$$\mu^+(E) = \sup_{A\subset E} \mu(A), \quad \mu^-(E) = -\inf_{A\subset E} \mu(A),$$

для которых

$$\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E).$$

Положительная предмера $|\mu|$: $|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E)$ называется *полной вариацией* предмеры μ. Если μ — мера, то $\mu^+, \mu^-, |\mu|$ —также меры. Если при этом $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, то существует $X_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap X_0), \quad \mu^-(E) = -\mu(E \cap X \setminus X_0) \qquad (E \in \mathfrak{A}).$$

Комплексная предмера μ естественно выражается через вещественные:

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2, \quad \text{где} \quad \mu_1 = \operatorname{Re}\mu, \quad \mu_2 = \operatorname{Im}\mu.$$

Полную вариацию в этом случае можно определить как

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)|,$$

где $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$— разбиение на конечное число измеримых попарно непересекающихся слагаемых, и верхняя грань берется по всевозможным таким разбиениям. Это определение, очевидно, переносится и на меры со значениями в банаховых пространствах. Если $\mathfrak{A}_0$—алгебра, то обозначим $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{A}_0)$ минимальную содержащую ее σ-алгебру. Каждая мера на $\mathfrak{A}_0$ единственным образом продолжается до меры на $\mathfrak{A}$.

Пусть $(X, \mathfrak{A})$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$ —пара измеримых пространств и $f\colon X \to \tilde{X}$ - измеримое отображение: $f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}) = \{A = f^{-1}(\tilde{A}), \quad \tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{A}}\} \subset \mathfrak{A}$. Тогда произвольная предмера μ на $(X, \mathfrak{A})$ порождает предмеру $\tilde{\mu} = \mu_f$ на $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$: $\mu_f(\tilde{A}) = \mu(f^{-1}(\tilde{A})) \quad (\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{A}})$, принимающую значения в том же пространстве, это и μ.

2°. Некоторые признаки σ-аддитивности предмер.

Определение 1.1. Пусть *C* — некоторое множество. Класс $\mathscr{K}$ его подмножеств называется *компактным,* если для всякой последовательности $K_n \ (n = 1, 2, \ldots)$ элементов этого класса, у которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \varnothing$, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что и $\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n = \varnothing$.

Предложение 1.1. *Если класс* $\mathcal{K}$ *подмножеств множества C компактен, то компактен и наименьший содержащий* $\mathcal{K}$ *класс* $\mathcal{K}_s$ *его подмножеств, замкнутый относительно конечных объединений.*

Доказательство. Пусть для каждого n = 1, 2, ... $\mathcal{D}_n = \bigcup_{m=1}^{m_n} K_n^m$, где для всех рассматриваемых m и n $K_n^m \in \mathcal{K}$, и предположим, что, каково бы ни было $p \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{n=1}^{p} \mathcal{D}_n \neq \varnothing$. Лемма будет доказана, если мы покажем, что тогда и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n \neq \varnothing$.

Пусть $\mathcal{J} = \prod_{n=1}^{\infty} \{1,\ 2,\ \ldots,\ m_n\}$—пространство всех последовательностей $\{j_n\}$ натуральных чисел, таких, что для всякого n $j_n \leqslant m_n$. Пусть для каждого p $\mathcal{J}_p = \left\{\{j_n\} \in \mathcal{J}:\ \bigcap_{n=1}^{p} K_n^{j_n} \neq \varnothing\right\}$. Поскольку, каково бы ни было p, $\bigcap_{n=1}^{p} \mathcal{D}_n = \bigcup_{\mathcal{J}} \bigcap_{n=1}^{p} K_n^{j_n}$, причем, по условию, $\bigcap_{n=1}^{p} \mathcal{D}_n \neq \varnothing$, то $\mathcal{J}_p \neq \varnothing$ при каждом p. Кроме того, если $p_1<p_2$, то $\mathcal{J}_{p_1} \supset \mathcal{J}_{p_2}$. Поскольку пространство $\mathcal{J}$, рассматриваемое как произведение счетного семейства топологических пространств, наделенных дискретной топологией, компактно, отсюда следует, что $\bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{J}_p \neq \varnothing$.

Пусть $\{j_n\} \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{J}_p$. Тогда для каждого p=1, 2, ... $\bigcap_{n=1}^{p} K_n^{j_n} \neq \varnothing$, и, следовательно, поскольку класс $\mathcal{K}$ компактен, $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n^{j_n} \neq \varnothing$; но это множество является частью множества $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$, непустота которого, таким образом, установлена.

Определение 1.2. Пусть μ —предмера на алгебре (полуалгебре) $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X. Скажем, что класс $\mathcal{K} \subset \mathfrak{A}$ *аппроксимирует* μ *снизу,* если для любых $A \in \mathfrak{A}$ и ε > 0 существует $K \subset \mathcal{K}$ такое, что $K \subset A$ и

$$|\mu|\,(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Теорема 1.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра (или полуалгебра) подмножеств пространства X и* μ *— предмера на $\mathfrak{A}$. Для того чтобы она была мерой, достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ содержала компактный класс $\mathscr{K}$, аппроксимирующий ее снизу.*

Доказательство. С помощью предложения 1.1 случай, когда $\mathfrak{A}$ — полуалгебра, сводится к случаю, когда $\mathfrak{A}$ — алгебра.

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра; для доказательства счетной аддитивности предмеры μ в этом случае достаточно установить, что если для каждого натурального *n* $A_n \in \mathfrak{A}$,

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing, \text{ то} |\mu|(A_n) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Пусть ε>0. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем множество $K_n \in \mathscr{K}$ так, чтобы $K_n \subset A_n$ и $|\mu|(A_n \setminus K_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$. Поскольку $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, существует такое *p*, что $\bigcap_{n=1}^{p} K_n = \varnothing$.

Поэтому

$$A_p = A_p \setminus \bigcap_{n=1}^{p} K_n = \bigcup_{n=1}^{p} (A_p \setminus K_n) \subset \bigcup_{n=1}^{p} (A_n \setminus K_n)$$

и, следовательно,

$$|\mu|(A_p) \leqslant \sum_{n=1}^{p} |\mu|(A_n \setminus K_n) \leqslant \varepsilon.$$

Следствие 1.1. *Пусть аппроксимирующий предмеру* μ *класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно счетных пересечений, а условие компактности в теореме заменяется более слабым: для каждого* ε > 0 *существует такое $K_\varepsilon \subset X$, что класс $\{K \cap K_\varepsilon,\ K \in \mathscr{K}\}$ компактен и для каждого лежащего вне* K_ε *множества $F \in \mathscr{K}$ выполняется соотношение $|\mu|(F) < \varepsilon$.*

Тогда предмера μ σ*-аддитивна, т. е. является мерой.*

Действительно, в тех же обозначениях, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (K_n \cap K_\varepsilon) = \varnothing$, и поэтому при некотором *p*

$$K_\varepsilon \cap \left(\bigcap_{n=1}^{p} K_n \right) = \bigcap_{n=1}^{p} (K_n \cap K_\varepsilon) = \varnothing,$$

откуда следует, что $|\mu| \left(\bigcap_{n=1}^{p} K_n \right) < \varepsilon$ и далее $|\mu|(A_p) \leqslant$

$$\leqslant |\mu| \left(\bigcap_{n=1}^{p} K_n \right) + |\mu| \bigcup_{n=1}^{p} (A_n \setminus K_n) \leqslant 2\varepsilon. \ \blacksquare$$

Важный пример измеримого пространства мы получаем, рассматривая пару $(X, \mathfrak{B})$, где X — топологическое пространство, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра его борелевских множеств. В этом пространстве компактным является класс $\mathscr{K} = \mathscr{K}_X$ всех счетно-компактных подмножеств.

Определение 1.3. Предмеру μ на $(X, \mathfrak{B})$ назовем *радоновой,* если она аппроксимируется классом $\mathscr{K}_X$.

Будем называть σ-аддитивную радонову предмеру *мерой Радона.*

Предложение 1.2. *Каждая радонова предмера на* $(X, \mathfrak{B})$ σ-*аддитивна.*

Этот факт непосредственно следует из теоремы 1.1

Утверждение, указанное в следствии 1.1, можно интерпретировать следующим образом.

Предложение 1.3. *Пусть* μ *— предмера на алгебре* $\mathfrak{A}$ *топологического пространства X,* $\mathscr{F} \subset \mathfrak{A}$ *— замкнутый относительно пересечений, аппроксимирующий* μ *снизу класс, состоящий из замкнутых в X множеств. Если для каждого* ε>0 *существует такое компактное множество* K_ε, *что для каждого* $F \in \mathscr{F}$ *из* $F \cap K_\varepsilon = \varnothing$ *следует* $|\mu|(F) < \varepsilon$, *то предмера* μ σ-*аддитивна.*

Посмотрим теперь, насколько необходимы приведенные достаточные условия σ-аддитивности.

Предложение 1.4. *Класс* $\mathscr{F}$ *замкнутых подмножеств сепарабельного метрического пространства X аппроксимирует снизу каждую меру на* $(X, \mathfrak{B})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_0$ —подкласс' $\mathfrak{B}$, состоящий из множеств, на которых мера μ аппроксимируется классом $\mathscr{F}$, и содержащий вместе с каждым множеством его дополнение. Легко проверить, что $\mathfrak{A}_0$— алгебра и в то же время монотонный класс. Поэтому $\mathfrak{A}_0$ — σ -алгебра. Так как в X каждое замкнутое множество есть пересечение последовательности открытых, то она, очевидно, содержит класс $\mathscr{F}$, порождающий $\mathfrak{B}$. Поэтому $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{B}$. ■

Предложение 1.5. *Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство,* $\mathfrak{B}$ — σ *-алгебра его борелевских множеств,* μ *— положительная мера на X. Тогда для всякого* ε>0 в *X существует такой компакт K, что*

$$\mu(X \setminus K) < \varepsilon.$$

Доказательство. Поскольку X сепарабельно, его можно покрыть счетным числом замкнутых шаров радиуса 1. Выберем из них конечное число шаров $S_1^{(1)}, \dots, S_{k_1}^{(1)}$ так, чтобы

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k} S_j^{(1)}\right) > 1 - \varepsilon/2.$$

Далее рассмотрим счетное семейство шаров радиуса 1/2, покрывающее *X*, и выберем из него конечное подсемейство $S_1^{(2)}, \ldots, S_{k_2}^{(2)}$, так что

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k_2} S_j^{(2)}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{4}$$

и т. д.; на *n*-м шаге мы построим такимже образом конечное семейство $S_1^{(n)}, \ldots, S_{k_n}^{(n)}$ замкнутых шаров радиуса *1/n,* удовлетворяющее условию

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k_n} S_j\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Множество $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} S_j^{(n)}$ очевидно, замкнуто и вполне ограничено;

так как пространстзо *X* полно, то *K* — компакт. Кроме того, $\mu(X \setminus K) \leqslant$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

3°. Измеримые и топологические пространства Радона. В связи с рассматриваемыми вопросами полезно ввести следующие понятия.

Определение 1.4. Измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ назовем *пространством Радона,* если в нем существует компактный подкласс $\mathscr{K}$, аппроксимирующий снизу всякую меру на $(X, \mathfrak{A})$. Мы будем говорить при этом, что $(X, \mathfrak{A}, \mathscr{K})$ — (измеримое) пространство Радона.

Топологическое пространство *X* назовем *(топологическим) пространством Радона,* если $(X, \mathfrak{B}, \mathscr{K}_X)$ является пространством Радона.

Иными словами, *X* есть топологическое пространство Радона, если всякая σ-аддитивная вещественная мера на $(X, \mathfrak{B})$ является мерой Радона.

Теорема 1.2. *Полное сепарабельное метрическое пространство является топологическим пространством Радона.*

Доказательство. Согласно предложению 1.4 для каждого ε >0 и каждого борелевского *A* существует замкнутое $F \subset A$, для которого $|\mu|(A \setminus F) < \varepsilon/2$. Это множество *F* является вместе с *X* полным сепарабельным пространством, и согласно предложению 1.5 в нем существует компактное *K,* для которого $|\mu|(F \setminus K) < \varepsilon/2$, откуда

$$|\mu|(A \setminus K) < \varepsilon.$$

Класс измеримых пространств Радона достаточно широк, поскольку он замкнут относительно ряда естественных операций.

Предложение 1.6. *Пусть* $(X, \mathfrak{A}, \mathscr{K})$ *—измеримое пространство Радона,* $f: Y \to X$, $\mathfrak{A}_f = f^{-1}(\mathfrak{A}) = \{B \subset Y: f(B) \in \in \mathfrak{A}\}$. *Если класс* $\mathscr{K}_f = f^{-1}(\mathscr{K})$ *компактен в Y, то* $(Y, \mathfrak{A}_f, \mathscr{K}_f)$ *— измеримое пространство Радона. В частности, это верно, если отображение f сюръективно.*

Доказательство. Пусть μ— мера на $(Y, \mathfrak{A}_f)$. Тогда $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$ — мера на $(X, \mathfrak{A})$ и по условию для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и ε>0 существует $K \in \mathscr{K}$ такое, что $|\mu_f|(A \setminus K) < \varepsilon$. Поэтому для каждого $A_1 \in \mathfrak{A}$, $A_1 \subset A \setminus K$ имеем $|\mu_f(A_1)| < \varepsilon$, а значит, и $|\mu(f^{-1}(A_1))| < \varepsilon$. Поскольку $f^{-1}(A_1)$ — произвольное $\mathfrak{A}_f$— измеримое множество, удовлетворяющее условию $f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(K)$, то

$$|\mu|(f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(K)) < \varepsilon.$$

Последнее утверждение следует из того, что при сюръективном f соотношение $\bigcap_i f^{-1}(K_i) = \varnothing$ влечет

$$\bigcap_i K_i = \varnothing.$$

Следствие 1.2. *Пусть* $Y \subset X$, $\mathfrak{A}_Y = \{A \cap Y,\ A \in \mathfrak{A}\}$ *и класс* $\mathscr{K}_Y = \{K \cap Y,\ K \in \mathscr{K}\}$ *компактен. Тогда* $(Y, \mathfrak{A}_Y, \mathscr{K}_Y)$ *— измеримое пространство Радона. В частности, замкнутое подпространство топологического пространства Радона есть топологическое пространство Радона.*

Определение 1.5. Пусть $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ —семейство алгебр подмножеств пространства *X,* обладающее тем свойством, что для каждой пары $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ существует $\lambda \in \Lambda$, для которого $\mathfrak{A}_{\lambda_1} \cup \mathfrak{A}_{\lambda_2} \subset \mathfrak{A}_\lambda$. Будем называть семейство $\mathfrak{A}_\lambda$ *направленным,* а алгебру $\mathfrak{A} = \bigcup_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda = \lim_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda$— *пределом* этого *направленного семейства.*

Будем также называть измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ *пределом направленного семейства* измеримых пространств $(X, \mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ и говорить, что $(X, \mathfrak{A})$ обладает *предельной структурой.*

Предложение 1.7. *Пусть* $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ *— направленное семейство алгебр подмножеств пространства X,* $\mathfrak{A} = \lim_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda$, $\mathscr{K} \subset \mathfrak{A}$ *- компактный класс и* $\mathscr{K}_\lambda = \mathscr{K} \cap \mathfrak{A}_\lambda$. *Если каждое* $(X, \mathfrak{A}_\lambda, \mathscr{K}_\lambda)$*— измеримое пространство Радона, то и* $(X, \mathfrak{A}, \mathscr{K})$*—измеримое пространство Радона.*

Доказательство. Пусть μ — мера на $(X, \mathfrak{A})$. Сужение
$|\mu|_\lambda = |\mu|_{\mathfrak{A}_\lambda}$

есть мера на $(X, \mathfrak{A}_\lambda)$, которая по условию аппроксимируется компактным классом $\mathscr{K}_\lambda$. Так как каждое $A \in \mathfrak{A}$ входит в какое-нибудь $\mathfrak{A}_\lambda$, то μ аппроксимируется на этом множестве классом $\mathscr{K}_\lambda$, а значит, и классом $\mathscr{K} \supset \mathscr{K}_\lambda$.■

Рассмотрим семейство измеримых пространств $(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Для конечного набора индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рассмотрим произведение

$$X_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} = (X_{\lambda_1} \times X_{\lambda_2} \times \ldots \times X_{\lambda_n}, \mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}),$$

где алгебра $\mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ порождена произведениями $A_{\lambda_1} \times \ldots \times A_{\lambda_n}$ множеств $A_{\lambda_j} \in \mathfrak{A}_{\lambda_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть теперь

$X = \coprod_\Lambda X_\lambda$ — пространство, состоящее из всех наборов

$\varphi = \{\varphi_\lambda \in X_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda\}$. Для каждого набора индексов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определена проекция

$$\pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} : X \to X_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}, \quad \pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}\varphi = (\varphi_{\lambda_1}, \ldots, \varphi_{\lambda_n}).$$

Рассмотрим в *X* алгебры

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} = \pi^{-1}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}\mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda).$$

Эти алгебры образуют направленное семейство, предел которого

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \tilde{\mathfrak{A}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$$

будем называть *алгеброй цилиндрических множеств произведения* $X = \prod_\Lambda X_\lambda$ и обозначать $\mathfrak{A} = \prod_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda$.

Определение 1.6. Измеримое пространство $\left(\prod_\Lambda X_\lambda, \prod_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda\right)$ назовем *произведением семейства измеримых пространств* $(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Будем обозначать ниже цилиндрические множества следующим образом:

$$Ц_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(B) = \{\varphi \in X, \ \pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}\varphi \in B\},$$
$$(B \in \mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda).$$

Предложение 1.8. *Пусть* $\mathcal{K}_\lambda$ *—компактный класс в* $(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$. *Тогда в произведении* $\left(\prod_\Lambda X_\lambda, \prod_\Lambda \mathfrak{A}_\lambda\right)$

компактен класс

$$\mathcal{K} = \bigcup_n \bigcup_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \tilde{\mathcal{K}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n},$$

где $\tilde{\mathcal{K}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ *— класс, состоящийиз конечных объединений цилиндрических множеств*

$$Ц_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(K_{\lambda_1} \times \ldots \times K_{\lambda_n}) \quad (K_{\lambda_j} \in \mathcal{K}_{\lambda_j},\ j = 1, \ldots, n). \quad (1.1)$$

Доказательство. Каждое множество вида (1.1) можно записать в виде

$$Ц_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(K_{\lambda_1} \times \ldots \times K_{\lambda_n}) = \prod_\Lambda K_\lambda,$$

где

$$K_\lambda = \begin{cases} K_{\lambda_j} & (\lambda = \lambda_j,\ j = 1, \ldots, n) \\ X_\lambda & (\lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n). \end{cases}$$

Пусть $K^j = \prod_\Lambda K_\lambda^j \in \mathcal{K}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и $\bigcap_{j=1}^\infty K^j = \varnothing$. Тогда

найдется $\lambda \in \Lambda$ такое, что $\bigcap_{j=1}^\infty K_\lambda^j = \varnothing$, и, в силу

компактности $\mathcal{K}_\lambda$, для некоторого n_λ получится $\bigcap_{j=1}^{n_\lambda} \mathcal{K}_\lambda^j = \varnothing$. При

этом очевидно, что

$$\bigcap_{j=1}^{n_\lambda} K^j = \varnothing.$$

Остается применить предложение 1.1.

Предложение 1.9. *Пусть* $(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda, \mathcal{K}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ *— семейство измеримых пространств Радона и* $\mathcal{K}$ *—класс множеств* (1.1). *Тогда произведение* $\left(\prod X_\lambda, \prod \mathfrak{A}_\lambda, \mathcal{K}\right)$ *есть измеримое пространство Радона.*

Доказательство. В силу предложения 1.7 достаточно доказать, что каждое $(X, \tilde{\mathfrak{A}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}, \tilde{\mathcal{K}}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n})$ есть измеримое пространство

Радона, а так как отображение $\pi_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ сюръективно, это сводится к

доказательству радоновости конечного произведения
$(X_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}, \mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}, \mathcal{K}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n})$.

Пусть μ — σ-аддитивная мера на $X_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$, которую (возможно, переходя к вариации) мы можем считать положительной, μ_{λ_j} — ее образ при отображении π_j: $X_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \to$ $\to X_{\lambda_j}$. Так как $\mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$ состоит из конечных объединений произведений вида $A = \prod_{k=1}^{n} A_k$, то достаточно аппроксимировать меру μ на каждом таком произведении. Пусть

$K_j \subset A_{\lambda_j}$, $K_j \in \mathcal{K}_{\lambda_j}$,

и

$\mu_{\lambda_j}(A_{\lambda_j} \setminus K_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$.

Тогда

$$A \setminus \prod_{j=1}^{n} K_{\lambda_j} \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{\lambda_1} \times \ldots \times A_{\lambda_{j-1}} \times (A_{l_j} \setminus K_{\lambda_j}) \times A_{\lambda_{j+1}} \times \ldots$$
$$\ldots \times A_{\lambda_n} \text{ и } \mu\left(A \setminus \prod_{j=1}^{n} K_{\lambda_j}\right) \leqslant \sum_j \mu_{\lambda_j}(A_{\lambda_j} \setminus K_{\lambda_j}) < \varepsilon.$$

Замечание 1.1. Из предложения 1.9 еще не следует, что произведение топологических пространств Радона является топологическим пространством Радона, хотя на нем и имеется структура измеримого пространства Радона, определяемая цилиндрическими множествами. Однако при дополнительных предположениях этот факт можно установить.

Пусть $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *—счетное произведение топологических пространств Радона* X_n*, компактные подмножества которых метризуемы. Тогда X — топологическое пространство Радона.*

Действительно, путем, аналогичным примененному выше, строится произведение

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n$$

компактов $K_n \subset X_n$, для которого $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$. Так как *K* — метризуемый компакт, то сужение на него является мерой Радона, откуда уже легко следует требуемое.

В качестве следствия полученного утверждения и следствия 1.2 выводим, что проективный предел счетного множества топологических пространств Радона, обладающих свойством метризуемости компактных подмножеств, есть топологическое пространство Радона.

Предложение 1.10. *Пусть* $(X_j, \mathfrak{A}_j, K_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность измеримых пространств Радона, удовлетворяющая условиям:*

1) $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots;$
2) $\mathfrak{A}_n = \{A = \tilde{A} \cap X_n, \ \tilde{A} \in \mathfrak{A}_{n+1}\}.$

Положим $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n; \ \mathfrak{A} = \{A: \ A \cap X_n \in \mathfrak{A}_n; \ n = 1, 2, \ldots\},$

$\mathscr{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{K}_n.$ *Тогда* $(X, \mathfrak{A}, \mathscr{K})$ —*измеримое пространство Радона,*

Доказательство. Пусть μ — σ-аддитивная мера на $(X, \mathfrak{A})$. Так как $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, то для каждого ε>0 существует n_0, начиная с которого $|\mu|(X \setminus X_n) < \varepsilon$ $(n \geqslant n_0)$. Пусть теперь $A \in \mathfrak{A}$. Рассмотрим $A \cap X_n \in \mathfrak{A}_n$. Тогда существует $K_n \subset A \cap X_n$, для которого

$|\mu|((A \cap X_n) \setminus K_n) < \varepsilon$ и $|\mu|(A \setminus K_n) < 2\varepsilon$. ■

Следствие 1.3. *Пусть X есть топологическая сумма* $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ *монотонно возрастающей последовательности топологических пространств Радона, причем топология в* X_n *совпадает с индуцированной из* X_{n+1}, *и* X_n *замкнуто в* X_{n+1}. *Тогда X — топологическое пространство Радона.*

В частности, топологическим пространством Радона является строгий индуктивный предел расширяющейся последовательности локально выпуклых линейных топологических пространств Радона, каждое из которых замкнуто в последующем.

Предложение 1.11. *Пусть* $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ — *расширяющаяся последовательность банаховых пространств с вполне непрерывными вложениями. Тогда пространство* $E = \lim \operatorname{ind} E_n$ — *топологическое пространство Радона.*

Доказательство. Пусть μ — счетно-аддитивная мера на σ-алгебре $\mathfrak{B}_E$ борелевских подмножеств *E*, $A \in \mathfrak{B}_E$ и ε>0. Пусть далее S_n — единичный шар в банаховом пространстве E_n. Тогда его замыкание S_n^{n+1} в E_{n+1} компактно в этом пространстве; так как для каждого *n* вложение $E_n \to E$ непрерывно, то множество S_n^{n+1} компактно и в E. Кроме того, S_n^{n+1} метризуемо (так как пространства E_n — банаховы). Поэтому, в силу теоремы Суслина, множество S_n является борелевским подмножеством в E, а поскольку

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} kS_n,$$

то E_n — борелевское подмножество в E. Из счетной аддитивности ц теперь вытекает, что для некоторого n $\mu(E \setminus E_n) < \varepsilon/2$; из радоновости E_n следует, что в E_n найдется такой компакт K, что $\mu((A \cap E_n) \setminus K) < \varepsilon/2$, но тогда $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$.

Пример 1.1. Если G — компактное подмножество n-мерного пространства, то пространство распределений Шварца $\mathscr{D}'_G$ — пространство Радона (так как оно принадлежит к классу пространств, рассмотренному в предыдущем пункте). Поэтому радоновым является и пространство распределений

$\mathscr{D}'_{\mathbb{R}^n}$, ибо $\mathscr{D}' = \lim\limits_{j} \mathrm{pr}\, \mathscr{D}'_{G_j}$, где $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$

и

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \mathbb{R}^n.$$

4°.Цилиндрические меры. Мы рассмотрим теперь одну важную и часто встречающуюся конструкцию, которая позволяет установить σ-аддитивность предмеры. Пусть измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ есть предел направленного семейства измеримых пространств $(X, \mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

Определение 1.7. Предмеру μ на $(X, \mathfrak{A})$ назовем *квазимерой* (ограниченной), если ее сужение $\mu_\lambda = \mu \mid \mathfrak{A}_\lambda$ при каждом $\lambda \in \Lambda$ σ -аддитивно (т. е. является мерой). Ограниченные квазимеры иногда назыьают *цилиндрическими мерами.*

Предложение 1.12. *Полная вариация* |μ|*ограниченной квазимеры* μ *также является ограниченной квазимерой.*

Доказательство. Так как полная вариация предмеры сама является предмерой, то нужно лишь доказать σ-аддитивкость сужений $|\mu|_\lambda$. Пусть $B, B^1, \ldots, B^n, \ldots$— последовательность множеств из $\mathfrak{A}_\lambda$, $B^j \cap B^k = \varnothing$, $(j \neq k)$ и $B = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B^j$. Тогда из аддитивности $|\mu|_\lambda$ следует

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu|_\lambda(B^j) \leqslant |\mu|_\lambda(B),$$

и остается установить обратное неравенство. Пусть $F^r \in \mathfrak{A}$ $(r=1, \ldots, n)$ — конечный набор множеств, обладающий свойством $B \supset F^r$, $F^{r_1} \cap F^{r_2} = \varnothing$ $(r_1 \neq r_2)$. Тогда

$$\mu(F^r) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(F^r \cap B^j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F^r \cap B^j) \quad (r = 1, \ldots, n),$$

поскольку существует алгебра $\mathfrak{A}_\lambda$, содержащая F^r и $\mathfrak{A}_\lambda$, на которой μ σ-аддитивна. Поэтому

$$\sum_{r=1}^{n} |\mu(F^r) \leqslant \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(F^r \cap B^j)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n} |(\mu(F^r \cap B^j)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|(B^j) = \sum_{j=1}^{\infty} |\mu|_\lambda(B^j).$$

Теорема 1.3. *Пусть*

$$(X, \mathfrak{A}) = \lim_{\Lambda}(X, \mathfrak{A}_\lambda)$$

и существует компактный класс $\mathscr{K} \subset \mathfrak{A}$ *такой, что каждое* $(X, \mathfrak{A}_\lambda, \mathscr{K}_\lambda)$, *где* $\mathscr{K}_\lambda = \mathscr{K} \cap \mathfrak{A}_\lambda$, *есть измеримое пространство Радона. Тогда каждая ограниченная квазимера на* $(X, \mathfrak{A})$ *является мерой.*

Доказательство. Пусть μ — ограниченная квазимера на $(X, \mathfrak{A})$. Тогда этим свойством обладает и | μ |, и поэтому с самого начала можно считать μ положительной. Каждое множество $A \in \mathfrak{A}$ принадлежит некоторому $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, на котором сужение μ_λ σ-аддитивно и по условию теоремы аппроксимируется классом $\mathscr{K}_\lambda$, а, следовательно, и содержащим его классом $\mathscr{K}$. Остается применить теорему 1.1.

Теорема 1.4. (Теорема Колмогорова.) *Пусть*

$$(X, \mathfrak{A}) = \prod_{\Lambda}(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda)$$

— *произведение измеримых пространств Радона* $(X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda) = (X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda, \mathscr{K}_\lambda)$. *Тогда каждая ограниченная квазимера на* $(X, \mathfrak{A})$ *является мерой.*

Доказательство. По определению произведения оно является пределом направленных семейств $(X, \mathfrak{A}) =$

$$= \lim_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} (X, \mathfrak{A}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}).$$

Из предложения 1.8 следует существование компактного класса (1.1), для которого в силу предложения 1.8 выполняются условия теоремы 1.3.

Замечание 1.2. Как следует из описанных выше результатов, условия теоремы 1.4 выполняются, если каждое из X_λ есть полное сепарабельное метрическое пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{B}_\lambda$ борелевских множеств или пространство, полученное из таких пространств при помощи любой цепочки операций перехода к проективному пределу, топологической сумме или подпространству.

1. 2. Цилиндрические множества и функции

1°. Общее определение цилиндрического множества. Структуру измеримого пространства на некотором множестве *X* можно строить, отображая его в другие, уже имеющиеся измеримые пространства. Мы уже встретились с этим приемом при построении произведения измеримых пространств. В этом параграфе подобный прием будет развит и применен, в частности, к основному для наших дальнейших целей случаю линейного пространства *X*.

Пусть $(E_\lambda,\ B_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$— набор σ-измеримых пространств, который мы будем в рассматриваемой ситуации считать стандартным. Пусть $F = \{f_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}$—семейство сюръективных (что, очевидно, не ограничивает общности) отображений

$$f_\lambda:\ X \to E_\lambda.$$

Это семейство будем называть *согласованным,* если для каждой пары $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda$ существует $\lambda = \lambda(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \Lambda$ и пара измеримых сюръективных отображений

$$\varphi_{\lambda_j\lambda}:\ (E_\lambda,\ B_\lambda) \to (E_{\lambda_j},\ B_{\lambda_j}) \qquad (j = 1,\ 2),$$

для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & E_{\lambda_1} \\
X \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[urr, bend left, "f_{\lambda_1}"] \arrow[drr, bend right, "f_{\lambda_2}"'] & E_\lambda \arrow[ur, "\varphi_{\lambda_1\lambda}"] \arrow[dr, "\varphi_{\lambda_2\lambda}"'] & \\
 & & E_{\lambda_2}
\end{tikzcd} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Отображения $\varphi_{\lambda_j\lambda}$ будем называть *связывающими* для рассматриваемого согласованного семейства. Очевидно, что при этом аналогичное условие согласованности выполняется и для любого конечного набора $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$: существует $\lambda \in \Lambda$ и измеримые $\varphi_{\lambda_j\lambda}$ $(j = 1, \ldots, n)$ такие, что

$$f_{\lambda_k} = \varphi_{\lambda_k\lambda} \circ f_\lambda \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (2.2)$$

Каждое отображение f_λ порождает в X σ-алгебру
$\mathfrak{A}_\lambda = f_\lambda^{-1}(\mathfrak{B}_\lambda) = \{A \in X:\ f_\lambda(A) \in \mathfrak{B}_\lambda\} \quad (\lambda \in \Lambda).$

Легко видеть, что полученное семейство σ-алгебр является направленным: $\mathfrak{A}_{\lambda(\lambda_1, \lambda_2)} \supset \mathfrak{A}_{\lambda_1} \cup \mathfrak{A}_{\lambda_2}$.
Пусть
$$\mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\Lambda.$$

Элементы алгебры $\mathfrak{A}$ (которая, вообще говоря, неявляется σ-алгеброй) мы будем называть *F-цилиндрическими множествами,* элементы ее σ-подалгебры $\mathfrak{A}_\lambda$ — *λ-цилиндрическими.* В соответствии с этим $\mathfrak{A}$ будет называться *алгеброй F-цилиндрических множеств* пространства *X*. Будем использовать обозначение $\lambda > \lambda_1$, если $\mathfrak{A}_\lambda \supset \mathfrak{A}_{\lambda_1}$ (хотя, в отличие от σ-алгебр $\mathfrak{A}_\lambda$, сами индексы λ не образуют направления в буквальном смысле этого слова). Обозначим
$Ц(\lambda, B) = \{x \in X:\ f_\lambda(x) \in B\} = f_\lambda^{-1}(B) \quad (B \in \mathfrak{B}_\lambda)$
и назовем множество *B основанием* цилиндрического множества $Ц(\lambda, B)$, отображение f_λ — *направляющим,* а пространство E_λ — *носителем* этого множества. Очевидно, что эти характеристики цилиндрического множества неоднозначны: в условиях диаграммы (2.1) имеем $Ц(\lambda_1, B_1) = Ц(\lambda, \varphi_{\lambda_1\lambda}^{-1}(B_1)) \quad (B_1 \in \mathfrak{B}_\lambda, \lambda > \lambda_1).$ (2.3)

Рассмотрим отображения измеримых пространств с определенной выше структурой. Пусть $(X, \mathfrak{A})$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$, $\mathfrak{A} =$

$= \lim\limits_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$, $\tilde{\mathfrak{A}} = \lim\limits_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}$ — пара таких пространств. Отображение

$f: X \to \tilde{X}$ будем называть *измеримым* $((\Lambda, \tilde{\Lambda})$*-измеримым),* если для каждого $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$ существует $\lambda \in \Lambda$, для которого отображение f $(\mathfrak{A}_\lambda, \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}})$-измеримо, т. е.

$$f^{-1}(A_{\tilde{\lambda}}) \in \mathfrak{A}_\lambda \quad (A_{\tilde{\lambda}} \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}).$$

Очевидно, что каждое $(\Lambda,\ \tilde{\Lambda})$-измеримое отображение является $(\mathfrak{A},\ \tilde{\mathfrak{A}})$-измеримым, хотя обратное, вообще говоря, неверно.
Если X — какое-нибудь пространство, а $(\tilde{X},\ \tilde{\mathfrak{A}})$ измеримо с предельной структурой, то отображение $f\colon\ X \to \tilde{X}$ автоматически порождает предельную структуру $(X, f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}))$, где

$$f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}) = \lim_{\tilde{\lambda}} f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}),$$

для которой f, очевидно, $(\Lambda,\ \tilde{\Lambda})$- измеримо.
Если при этом $\tilde{\mathfrak{A}}$ есть алгебра F-цилиндрических множеств, то $\mathfrak{A} = f^{-1}(\tilde{\mathfrak{A}})$—алгебра $F \circ f$-цилиндрических множеств, порожденная набором отображений

$$F \circ f = \{f_{\tilde{\lambda}} \cdot f,\ \tilde{\lambda} \in \Lambda\}.$$

Рассмотрим две предельные измеримые структуры $\left(X,\ \mathfrak{A} = \lim\limits_{\Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}\right)$ и $\left(X,\ \tilde{\mathfrak{A}} = \lim \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}\right)$ на одном и том же пространстве X. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ *мажорирует* $\tilde{\mathfrak{A}}$ (или, что $\mathfrak{A}$ *сильнее* $\tilde{\mathfrak{A}}$*)*, и писать $\tilde{\mathfrak{A}} \prec \mathfrak{A}$, если тождественное отображение $\mathrm{id}\colon\ X \to X$ является $(\Lambda,\ \tilde{\Lambda})$-измеримым, т. е. для каждого $\tilde{\lambda}$ существует такое λ, что $\tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}} \subset \mathfrak{A}_{\lambda}$. При этом, очевидно, $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$.
Назовем две структуры $\left(X,\ \mathfrak{A} = \lim\limits_{\Lambda} \mathfrak{A}_{\lambda}\right)$ и $\left(X,\ \tilde{\mathfrak{A}} = \lim\limits_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}\right)$ *эквивалентными,* если $\tilde{\mathfrak{A}} \prec \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \prec \tilde{\mathfrak{A}}$. При этом, конечно, запас измеримых множеств одинаков: $\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$.
Будем говорить, что набор отображений F *сильнее,* чем $\tilde{F}$ *(эквивалентен* $\tilde{F}$*)*: $\tilde{F} \prec F$, если такому же соотношению удовлетворяют порожденные ими измеримые структуры цилиндрических множеств. Очевидно, что $\tilde{F} \subset F \Rightarrow \tilde{F} \prec F$.
Однако нетрудно привести простые ситуации, при которых расширение совокупности отображений не приводит к усилению измеримой структуры.

Предложение 2.1. *Пусть* F *и* $\tilde{F}$ *—два согласованных набора отображений пространства X и пусть для каждого* $f \in F$ $(f\colon\ X \to (E,\ B))$ *найдутся* $\tilde{\lambda}_1,\ \ldots,\ \tilde{\lambda}_n \in \tilde{\Lambda}$ *и измеримое отображение*

$$\psi\colon\ \prod_{k=1}^{n} \left(E_{\tilde{\lambda}_k},\ \mathfrak{B}_{\tilde{\lambda}_k}\right) \to (E,\ \mathfrak{B})$$

такие, что

$$f(x)=\psi\left(f_{\tilde{\lambda}_1}(x),\ \ldots,\ f_{\tilde{\lambda}_n}(x)\right). \tag{2.4}$$

Тогда

$$F \prec \tilde{F}.$$

Доказательство. В силу (2.2) общий случай сводится к случаю, когда n=1, т. е.

$$f(x)=\psi\left(f_{\tilde{\lambda}}(x)\right).$$

Из последнего соотношения, очевидно, следует, что

$$f^{-1}(B)\subset f_{\tilde{\lambda}}^{-1}(B_{\tilde{\lambda}})\subset \mathfrak{A}_{\tilde{\lambda}}.$$

Следствие 2.1. *При расширении системы* $\tilde{F}$ *за счет отображений вида* (2.4), *являющихся суперпозицией некоторого измеримого отображения и конечного множества отображений из* $\tilde{F}$, *измеримая структура* $(X,\ \tilde{\mathfrak{A}})$ *заменяется эквивалентной.*

Замечание 2.1. Заметим, что приведенное свойство остается справедливым и тогда, когда конечное множество отображений из $\tilde{F}$ заменяется счетным, если для него сохраняется свойство (2.2).

Вообще говоря, добавление функций вида

$$f(x)=\psi\left(f_{\tilde{\lambda}_1}(x),\ \ldots,\ f_{\tilde{\lambda}_n}(x),\ \ldots\right),$$

где ψ — измеримое отображение

$$\psi\colon\ \prod_{k=1}^{\infty} E_{\tilde{\lambda}_k}\to E$$

для произвольных счетных наборов $\tilde{\lambda}_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$, приведет к усилению множества отображений $\tilde{F}$ и потому — к расширению алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$. Нетрудно показать, однако, что минимальная σ-алгебра $\sigma(\tilde{\mathfrak{A}})$, содержащая $\tilde{\mathfrak{A}}$, при этом не изменится.

Пример 2.1. Рассмотрим произведение

$$\left(\prod_{\alpha} X_\alpha,\ \prod_{\alpha}\mathfrak{A}_\alpha\right)$$

семейства измеримых пространств $(X_\alpha,\ \mathfrak{A}_\alpha)$ $(\alpha\in A)$. Пусть Λ —множество конечных наборов $\lambda=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$и $(E_\lambda,\ \mathfrak{B}_\lambda)=$

$$=\prod_{k=1}^{n}(X_{\alpha_k},\ \mathfrak{A}_{\alpha_k}),$$ а отображение $f_\lambda\colon\ X\to E_\lambda$—естественная

проекция. Множество $F = \{f_\lambda\}$ представляет собой согласованное семейство, причем соотношение $\lambda \prec \lambda_1$ эквивалентно соотношению $\lambda \subset \lambda_1$.

2°. Цилиндрические множества в линейном пространстве *X*. В качестве стандартного набора пространств $(E_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda)$ естественно в этом случае выбирать конечномерные линейные пространства с борелевскими а-алгебрами в них, а в качестве отображений f_λ, составляющих согласованный набор *F*, и связывающих отображений $\varphi_{\lambda\tilde{\lambda}}$ — линейные отображения.

Такие отображения могут быть построены следующим образом. Пусть *Y* —другое линейное пространство и пара *(X, Y)* находится в двойственности с соотношением двойственности $\langle x, y\rangle$.

Пусть $\tilde{Y}$ — некоторое подмножество *Y*, не обязательно линейное, и пусть $\Lambda = \Lambda_{\tilde{Y}}$ —множество упорядоченных конечных наборов линейно независимых элементов из $\tilde{Y}$,

$\lambda = (y_1, \ldots, y_n)$.

Каждому $\lambda \in \Lambda$ отвечает отображение

$$f_\lambda\colon x \to (\langle x, y_1\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle) \quad (2.5)$$

пространства *X* на $\mathbb{R}^n$. Если $\tilde{\lambda} = (z_1, \ldots, z_m) \in \Lambda$ —другой набор, через который линейно выражается λ:

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} z_k \quad (j = 1, \ldots, n),$$

то формула

$$\langle x, y_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \langle x, z_k\rangle$$

определяет отображение

$$\varphi_{\lambda\tilde{\lambda}}\colon (\langle x, z_1\rangle, \ldots, \langle x, z_m\rangle) \to (\langle x, y_1\rangle, \ldots, \langle x, y_n\rangle),$$

очевидно, обладающее свойством

$$f_\lambda = \varphi_{\lambda\tilde{\lambda}} \cdot f_{\tilde{\lambda}}.$$

Поэтому для пары отображений f_{λ_1} и f_{λ_2} всегда существует отображение f_λ, обладающее свойством (2.2); для его построения достаточно взять максимальное линейно независимое подмножество $\lambda \subset \lambda_1 \cup \lambda_2$.

Алгебру цилиндрических множеств пространства *X*, порожденную множеством $\tilde{Y}$, мы будем называть *алгеброй* $\tilde{Y}$ *-цилиндрических множеств* и обозначать $\mathfrak{A}_{\tilde{Y}}$.

Из предложения 2.1 следует, что $\mathfrak{A}_{\tilde{Y}} = \mathfrak{A}_{\mathscr{L}(\tilde{Y})}$, где $\mathscr{L}(\tilde{Y})$ — линейная оболочка $\tilde{Y}$. Поэтому множество $\tilde{Y}$ без ограничения общности можно заранее считать линейным.

Всюду ниже, как правило, в рассматриваемой ситуации под *X* будет пониматься отделимое, локально выпуклое линейное топологическое пространство. Это требование фактически не является ограничением, так как в *X* всегда можно ввести слабую топологию σ*(X, Y)*, определяемую как слабейшая топология, в которой непрерывны все линейные функционалы $\langle x, y\rangle$ $(y \in Y)$. Очевидно, что при этом и линейные отображения (2.5) непрерывны. Поэтому в определении алгебры цилиндрических множеств все рассматриваемые линейные отображения могут заранее считаться непрерывными линейными отображениями пространства $(X, \sigma(X, Y))$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что это приводит к описанию алгебры $\mathfrak{A}_Y$ цилиндрических подмножеств линейного пространства *X*, построенной по элементам двойственного пространства *Y*, при помощи семейства *F* канонических отображений $f_\lambda: X \to E_\lambda$ на всевозможные фактор-пространства $E_\lambda = X/X_\lambda$ по σ*(X, Y)*-замкнутым пространствам $X_\lambda \subset X$ конечной коразмерности.

Предложение 2.2. *Пусть X и Y — пара линейных пространств в двойственности. Тогда алгебра* $\tilde{\mathfrak{A}}_Y$ *цилиндрических множеств пространства X определяется набором* $F = \{P_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *непрерывных в топологии* σ*(X, Y) проекторов на конечномерные линейные подпространства* $\mathscr{L}_\lambda \subset X$. *о*

Доказательство. Поскольку каждое конечномерное подпространство отделимого пространства *X* изоморфно евклидову, то проекторы на эти подпространства обладают нужными свойствами в силу приведенных выше рассуждений. Остается показать, что таким образом получается вся алгебра цилиндрических множеств.

В самом деле, пусть X_o — замкнутое линейное подпространство в $(X, \sigma(X, Y))$, имеющее конечную коразмерность, P_0 — каноническое отображение *X* на X/X_0, $\tilde{B}$ — борелевское подмножество в X/X_0 и $A = P_0^{-1}\tilde{B}$. Пусть, далее, X_1 —линейное подпространство пространства *X*, алгебраически лополнительное к X_0. Тогда сужение P_o на X_1 (обозначим это сужение через P'_0) представляет собой взаимно однозначное непрерывное отображение, обладающее, в силу отделимости X/X_o, непрерывным обратным; таким образом, P'_0 — изоморфизм X_1 на X/X_0. Положим теперь

$P = (P'_0)^{-1} P_0$ и $B = (P'_0)^{-1} \tilde{B}$. Тогда P —непрерывный проектор в

$(X, \sigma(X, Y))$, отображающий X на X_1, B — борелевское подмножество в X_1, $A = \mathrm{P}^{-1}B$.

Предложение 2.3. *Пусть $Y_1 \subset Y$, причем каждый элемент из Y является пределом некоторой последовательности элементов из Y_1 в пространстве Y, наделенном топологией $\sigma(Y, X)$. Тогда $\sigma_Y = \sigma_{Y_1}$.*

Это утверждение является следствием замечания 2.1.

Пример 2.2. Приведенное выше описание мы уточним для оснащенного гильбертова пространства $Y = \mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_- = X$.

Если P— конечномерный ортогональный проектор в $\mathscr{H}$, область значений $\mathscr{L}_{\mathrm{P}}$ которого содержится в Y, то P непрерывен в топологии, индуцированной в $\mathscr{H}$ топологией $\sigma(X, Y)$. Это следует из того, что если $(y_1,\ldots, y_n)$ — ортонормированный в $\mathscr{H}$ базис в $\mathscr{L}_{\mathrm{P}}$, то для каждого $h \in \mathscr{H}$

$$\mathrm{P}h = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{P}h, y_j)_{\mathscr{H}} y_j = \sum_{j=1}^{n} (h, \mathrm{P}y_j)_{\mathscr{H}} y_j = \sum_{j=1}^{n} h(y_j) y_j,$$

причем для каждого $y \in Y$ отображение $h \to h(y)$: $\mathscr{H} \to \mathbb{R}^1$ непрерывно в топологии $\sigma(X, Y)$. Поэтому он может быть продолжен по непрерывности на все $X = \mathscr{H}_-$; это продолжение мы снова будем обозначать тем же символом P. Пусть Q — множество всех отображений $X \to Y$, каждое из которых можно получить таким способом; элементы из Q мы по-прежнему будем называть конечномерными ортогональными проекторами.

В качестве алгебры цилиндрических множеств пространства $X = \mathscr{H}_-$ мы будем всегда понимать алгебру $\mathfrak{A}_Q$, порожденную системой Q ортопроекторов в $\mathscr{H}$, действующих из $\mathscr{H}_-$ в $\mathscr{H}_+$. Нетрудно показать, что она совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}_Y = \mathfrak{A}_{\mathscr{H}_+}$.

3°. Измеримое линейное пространство. Пусть X—линейное пространство, Y— достаточное множество линейных функционалов на X, $\mathfrak{A}_Y$—совокупность Y-цилиндрических подмножеств X.

Пару $(X, \mathfrak{A}_Y)$ будем называть *измеримым линейным пространством* (и. л. п.).

Линейное отображение f: $X_1 \to X_2$ пары линейных пространств, как обычно, назовем *линейным измеримым отображением* и. л. п. f: $(X_1, \mathfrak{A}_{Y_1}) \to (X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$, если прообраз $f^{-1}(Ц)$ каждого Y_2-цилиндрического множества $Ц \subset X_2$ является Y_1-цилиндрическим подмножеством X_1.

Отметим, что для того, чтобы отображение f обладало этим свойством, достаточно (хотя и не необходимо), чтобы оно было непрерывным при

наделении X_1 и X_2 топологиями $\sigma(X_1, \dot{Y}_1)$ и $\sigma(X_2, \dot{Y}_2)$ соответственно.
Действительно, в этом случае при непрерывном линейном отображении P пространства $(X_2, \sigma(X_2, Y_2))$ в какое-нибудь конечномерное евклидово пространство отображение $P_1 = P \cdot f$ является непрерывным и $f^{-1}(\mathfrak{A}^P) = \mathfrak{A}^{P_1}$.
Назовем измеримое линейное пространство $(X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$ *линейным расширением* $(X_1, \mathfrak{A}_{Y_1})$, если существует инъективное линейное отображение $f\colon X_1 \to X_2$, для которого отображение $Ц \to f^{-1}(Ц)$ $(Ц \in \mathfrak{A}_{Y_2})$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_{Y_2}$ на $\mathfrak{A}_{Y_1}$.

Пример 2.3. Если X — линейное пространство, состоящее из функций на некотором множестве S, точки которого определяют достаточное множество линейных функционалов $Y = S$ $(s(x) = x(s))$, то $(X, \mathfrak{A}_s)$ — измеримое линейное пространство. Если при этом $X' \supset X$ — другое линейное пространство, состоящее из функций на S, то $(X', \mathfrak{A}_s)$, очевидно, есть линейное расширение $(X, \mathfrak{A}_s)$, причем f— естественное вложение.
Введем далее понятие *произведения* измеримых линейных пространств $(X_1, \mathfrak{A}_{Y_1})$ и $(X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$. Мы будем понимать под этим измеримое линейное пространство $(X, \mathfrak{A}_Y)$, где $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$ и для каждых $x = (x_1;\ x_2) \in X$, $y = (y_1;\ y_2) \in Y$ по определению
$y(x) = y_1(x_1) + y_2(x_2)$.
Алгебра цилиндрических множеств порождается при этом цилиндрическими множествами вида

$$Ц_1 \times Ц_2 \quad (Ц_1 \in \mathfrak{A}_{Y_1}, \quad Ц_2 \in \mathfrak{A}_{Y_2})$$

в том смысле, что каждый элемент $\mathfrak{A}_Y$ представляет собой конечное объединение таких произведений.

4°. Цилиндрические функции. Пусть

$$\left(X, \mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda\right)$$

—измеримое пространство с предельной структурой, причем $\mathfrak{A}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ — σ-алгебра. Становясь на более общую, чем выше, точку зрения, будем и в этом случае элементы алгебры $\mathfrak{A}$ называть цилиндрическими множествами.

Определение 2.1. Функцию $f\colon X \to Y$, где $(Y, \mathfrak{B})$— какое-нибудь измеримое пространство, будем называть *цилиндрической,* если существует $\lambda \in \Lambda$, для которого оно измеримо как отображение

$$f\colon (X, \mathfrak{A}_\lambda) \to (Y, \mathfrak{B}). \qquad \textbf{(2.6)}$$

Совокупность цилиндрических функций обозначим $\Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$.
Отметим некоторые свойства цилиндрических функций.
Очевидно, что для каждого конечного набора цилиндрических функций существует единое $\lambda \in \Lambda$ такое, что (2.6) выполняется для всех этих функций.
Поэтому при линейном пространстве Y совокупность всех цилиндрических функций $\Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$ также образует линейное пространство.
Более общо, если $f_j \in \Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$ $(j = 1, \ldots, n)$,

$\varphi\colon \prod_{j=1}^{n} (Y_j, B_j) \to (Y, B)$, **то**

$f(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$.

Если $h - (\Lambda, \tilde{\Lambda})$-измеримое отображение пары пространств $h\colon (X, \mathfrak{A}) \to (\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$, то каждой цилиндрической функции $f \in \Phi(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}}, Y)$ сопоставляется цилиндрическая функция $f \cdot h \in \Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$, и таким образом возникает отображение $\Phi(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}}, Y)$ в $\Phi(X, \mathfrak{A}, Y)$:

$$f \to f \cdot h. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Это отображение линейно, если Y—линейно. Если же при этом h обратимо и отображение h^{-1} $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$-измеримо, то отображение (2.7) есть изоморфизм (линейных пространств, если Y линейно).
Пусть теперь алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_F$ порождена согласованной в смысле (2.1) системой отображений $F = \{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. Тогда цилиндрическими являются сами функции f_λ, а также суперпозиции вида

$$\varphi\colon (\Pi E_{\lambda_k}, \Pi B_{\lambda_k}) \to (Y, B). \qquad (2.8)$$

где

$\varphi(f_{\lambda_1}(x), \ldots, f_{\lambda_n}(x))$,

Поскольку, как известно, каждая функция, измеримая относительно σ-алгебры, порожденной конечным набором функций, представима в виде (2.8), то таким образом получаются все цилиндрические функции.
Пример 2.4. Пусть
$(X, \mathfrak{A}) = \prod_{\Lambda} (X_\lambda, \mathfrak{A}_\lambda)$

—произведение σ-измеримых пространств. Как следует из рассмотрения примера 2.1, цилиндрические функции здесь —это фунции вида

$$\varphi:\ \{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\to\varphi(x_{\alpha_1},\ \ldots,\ x_{\alpha_n})\in Y$$

при всех упорядоченных наборах $\lambda=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)$. Множество λ в этом случае будем называть *носителем* цилиндрической функции. Очевидно, что носитель определяется не однозначно: вместе с λ носителем является и каждое $\tilde{\lambda}\supset\lambda$. Расширение носителя означает добавление новых переменных, от которых функция фактически не зависит.

Рассмотрим более подробно линейное пространство Ф в условиях предложения 2.2.

Пусть $\mathcal{P}=(\mathrm{P})$ — некоторое множество проекторов Р: $X\to X_{\mathrm{P}}$ на конечномерные подпространства $X_{\mathrm{P}}\subset X$, непрерывных в топологии $\sigma(X,\ Y)$. Будем предполагать, что выполнены условия:

а) при помощи операторов из $\mathcal{P}$ можно сколь угодно точно в топологии *σ(X, Y)* сходимости на каждом элементе аппроксимировать тождественное отображение I = id_X;

б) для каждой пары $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2\in\mathcal{P}$ существует их общее продолжение Р, для которого

$$\mathrm{P}_j\mathrm{P}=\mathrm{P}_j\qquad(j=1,\ 2).$$

Пространство X_{P} при этом содержит $X_{\mathrm{P}_1}+X_{\mathrm{P}_2}$. Такая система $\mathcal{P}$ определяет алгебру $\mathfrak{A}_{\mathcal{P}}$ цилиндрических множеств на *X*.

Цилиндрическими при этом являются функции вида

$$f_{\mathrm{P}}(x)=f(\mathrm{P}x),\qquad(2.9)$$

где *f* — измеримое отображение $(X_{\mathrm{P}},\ B_{\mathrm{P}})$ в соответствующее пространство $(Y,\ \mathfrak{B})$.

Заметим, что формула (2.9) позволяет каждому измеримому отображению

$$f:\ (X,\ \sigma(\mathfrak{A}))\to(Y,\ \mathfrak{B})$$

сопоставить совокупность $\{f_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}\in\mathcal{P}}$ цилиндрических функций, которая называется *совокупностью конечномерных проекций отображения f*.

В случае, когда X — гильбертово, мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{P}$ состоит из ортопроекторов, а для оснащенного гильбертова пространства — из ортопроекторов в смысле примера 2.2.

1.3. Квазимеры. Интегрирование

1°. Квазимеры. Мы предполагаем, что читателю известна общая теория интеграла по σ-аддитивной мере на измеримом пространстве. В этом параграфе будут рассмотрены более общие функции множеств — квазимеры.

Определение 3.1. Пусть $(X, \mathfrak{A})$—измеримое пространство с алгеброй

$$\mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda,$$

являющейся пределом направленного семейства σ-алгеор. Аддитивную (не обязательно ограниченную) функцию множеств μ на $\mathfrak{A}$ со значениями в локально выпуклом линейном топологическом пространстве T назовем *квазимерой на* $\mathfrak{A}$ *со значениями в T,* если ее сужение

$$\mu_\lambda = \mu|_{\mathfrak{A}_\lambda}$$

при каждом $\lambda \in \Lambda$ является мерой.

Тройку $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ будем при этом называть *пространством с квазимерой.*

Заметим, что аддитивность μ автоматически следует из аддитивности сужений μ_λ в силу направленности семейства Λ.

Всюду в этой главе, где не оговорено противное, под квазимерой понимается вещественная функция множеств. Напомним, что при некоторых дополнительных предположениях (теоремы 1.3 и 1.4) ограниченная квазимера является мерой, т. е. она σ-аддитивна и на алгебре $\mathfrak{A}$.

Однако представляют интерес и неограниченные квазимеры.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ есть алгебра F-цилиндрических множеств, порожденная отображениями $f_\lambda\colon X \to E_\lambda$ $(f_\lambda \in F,\ \lambda \in \Lambda)$.

Эти отображения сопоставляют квазимере μ совокупность мер $\tilde{\mu}_\lambda$ на пространствах (E_λ, B_λ):

$$\tilde{\mu}_\lambda(B_\lambda) = \mu_\lambda(f_\lambda^{-1}(B)) = \mu(Ц(\lambda, B)) \qquad (B \in \mathfrak{B}_\lambda),$$

которую условно (поскольку пространства E_λ не обязательно конечномерны) мы будем называть *системой конечномерных распределений квазимеры* μ.

Система конечномерных распределений квазимеры удовлетворяет естественным условиям согласованности, очевидно следующим из (2.3):

$$\tilde{\mu}_{\lambda_1}(B_{\lambda_1}) = \tilde{\mu}_\lambda(\varphi^{-1}_{\lambda_1,\lambda}(B_{\lambda_1})) \qquad (B_{\lambda_1} \in \mathfrak{B}_{\lambda_1};\ \lambda > \lambda_1). \quad (3.1)$$

Наоборот, пусть для каждого $\lambda \in \Lambda$ в $(E_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda)$ задана мера $\tilde{\mu}_\lambda$, причем для любой пары $\lambda > \lambda_1$ индексов из Λ выполняется условие (3.1). Тогда существует квазимера μ на $(X, \mathfrak{A})$, для которой рассматриваемая совокупность $\{\tilde{\mu}_\lambda\}_\Lambda$ представляет собой систему конечномерных распределений.

Действительно, если $A \in \mathfrak{A}$, то, по определению, существует $\lambda_1 \in \Lambda$, для которого $A \in \mathfrak{A}_{\lambda_1}$, т. е. $A = f^{-1}(B_{\lambda_1})$, где $B_{\lambda_1} \in \mathfrak{B}_{\lambda_1}$ определено однозначно, так как прообраз при сюръективном отображении однозначно определяет множество.

Тогда можно положить

$$\mu(A) = \tilde{\mu}_{\lambda_1}(B_{\lambda_1}).$$

Это определение непротиворечиво, потому что если $A = f^{-1}(B_{\lambda_2}) \in \mathfrak{A}_{\lambda_2}$ и для некоторого другого индекса $\lambda_2 \in \Lambda$, то существует $\lambda > \lambda_k$ $(k = 1, 2)$ такое, что в силу (2.1) и (3.1)

$$\tilde{\mu}_{\lambda_1}(B_{\lambda_1}) = \tilde{\mu}_\lambda(\varphi^{-1}_{\lambda_1\lambda}(B_{\lambda_1})) = \tilde{\mu}_\lambda(\varphi^{-1}_{\lambda_2\lambda}(B_{\lambda_2})) = \tilde{\mu}_{\lambda_2}(B_{\lambda_2}).$$

В силу сюръективности рассматриваемых отображений, операциям над множествами $A = f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_\lambda$ соответствуют аналогичные операции над соответствующими множествами $B = f(A) \in \mathfrak{B}_\lambda$, а это вместе с σ-аддитивностью $\tilde{\mu}_\lambda$ влечет σ-аддитивность сужения

$$\mu_\lambda = \mu \mid \mathfrak{A}_\lambda.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть* $(X, \mathfrak{A}_F)$ *—измеримое пространство с алгеброй F-цилиндрических множеств, где* $F = \{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *— согласованное семейство сюръективных отображений* $f_\lambda\colon X \to E_\lambda$. *Каждая квазимера на* $(X, \mathfrak{A}_F)$ *определяет согласованный в смысле* (3.1) *набор конечномерных распределений* $\{\tilde{\mu}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ *в пространствах* $(E_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda)$, *и наоборот, каждый такой согласованный набор однозначно определяет квазимеру.*

Рассмотрим теперь отображения пространств с квазимерой. Пусть

$\left(X, \mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda, \mu\right)$

— такое пространство.

Рассмотрим сюръективное отображение $f: Y \to X$. В пространстве Y естественно определяются σ-алгебры $\mathfrak{A}^f_\lambda = f^{-1}(\mathfrak{A}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ и алгебра $\mathfrak{A}^f = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}^f_\lambda$. При этом квазимера μ, однозначно определяет на $\mathfrak{A}^f$ функцию множеств μ^f:

$$\mu^f(f^{-1}(A)) = \mu(A). \tag{3.2}$$

Это определение корректно, поскольку для сюръективного отображения f полный прообраз $f^{-1}(A)$ однозначно определяет множество A. Функция μ^f, очевидно, σ-аддитивна на каждой $\mathfrak{A}^f_\lambda$ и потому является квазимерой. Пусть, наоборот,

$f: \left(X, \mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda\right) \to (\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$

— измеримое отображение измеримых пространств. Тогда каждая квазимера μ на $(X, \mathfrak{A})$ определяет обычным образом аддитивную функцию на $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{A}})$

$$\mu_f(\tilde{A}) = \mu(f^{-1}(\tilde{A})).$$

Эта функция не является, вообще говоря, квазимерой, поскольку в $\tilde{\mathfrak{A}}$ не переносится предельная структура алгебры множеств. Если, однако, такая структура уже имеется: $\tilde{\mathfrak{A}} = \lim_{\tilde{\Lambda}} \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}$, а отображение f $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$-измеримо, то μ_f — квазимера, поскольку ее сужения $(\mu_f)_{\tilde{\lambda}} = (\mu_\lambda)_f$ определены и σ-аддитивны. Отметим, что в рассмотренном выше случае (3.2) влечет

$$(\mu^f)_f = \mu.$$

2°. Интеграл по квазимере. Рассмотрим пространство $\Phi = \Phi_b(X, \mathfrak{A}, \mathbb{R}^1)$ вещественных ограниченных цилиндрических функций на $\left(X, \mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda\right)$. Если $f \in \Phi$, то существует $\lambda \in \Lambda$, для которого эта функция $\mathfrak{A}_\lambda$-измерима. Поэтому имеет смысл интеграл

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f(x)\mu_\lambda(dx). \tag{3.3}$$

Это определение интеграла от цилиндрической функции по квазимере корректно: из условия согласованности (3.1) следует, что правая часть не изменится, если заменить индекс λ другим: $\lambda_1 > \lambda$.

Очевидно, что интеграл (3.3) обладает обычными свойствами:

а) $\int\limits_X [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,\mu(dx)=\alpha\int\limits_X f(x)\,\mu(dx)+\beta\int\limits_X g(x)\mu(dx)$

$(\alpha,\ \beta\in R^1,\ f,\ g\in\Phi)$;

б) условия $f(x)\geqslant 0,\ \mu\geqslant 0$ влекут неотрицательность интеграла:

$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx)\geqslant 0$;

в) если последовательность $\{f_n\}\in\Phi$ имеет общий носитель λ и сходится по мере |μ| к функции *f(x),* то при обычных дополнительных условиях, дающихся теоремой Лебега (например, мажорируемость последовательности |μ| -интегрируемой функцией), выполняется соотношение

$$\int\limits_X f(x)\,\mu(dx)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)\,\mu(dx);$$

г) пусть имеется пара пространств

$\left(X,\ \mathfrak{A}=\lim\limits_{\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda\right)$

и

$\left(\tilde{X},\ \tilde{\mathfrak{A}}=\lim\limits_{\tilde{\Lambda}}\tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{\lambda}}\right)$

и $(\Lambda,\ \tilde{\Lambda})$-измеримое отображение φ. Тогда имеетместо формула замены переменной

$$\int\limits_X f(\varphi(x))\,\mu(dx)=\int\limits_{\tilde{X}} f(\tilde{x})\,\mu^{\varphi}(d\tilde{x}). \qquad \textbf{(3.4)}$$

Действительно, при помощи определения (3.3) каждый из интегралов сводится к интегралу по некоторой конечномерной проекции соответствующей квазимеры

μ_λ и $\mu^{\varphi}_{\tilde{\lambda}}$,

причем индексы λ и $\tilde{\lambda}$ могут быть выбраны так,чтобы отображение φ было $(\mathfrak{A}_\lambda,\ \mathfrak{A}_{\tilde{\lambda}})$-измеримо. После этого формула (3.4) сводится к обычной формуле для отображения мер;

д) пусть

$\left(X_k,\ \mathfrak{A}_k=\lim\limits_{\Lambda_k}\mathfrak{A}_k\right)(k=1,\ 2)$

— пара пространств с квазимерами $\mu_1,\ \mu_2$ соответственно. Обычным образом определяется произведение

$(X,\ \mathfrak{A})=(X_1\times X_2,\ \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2)$,

в котором естественно вводится предельная структура

$$\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2=\lim_{\Lambda_1\times\Lambda_2}\mathfrak{A}_{\lambda_1}\times\mathfrak{A}_{\lambda_2}.$$

Аддитивная функция множеств μ, определяемая на произведениях цилиндрических множеств формулой

$$\mu(Ц_1\times Ц_2)=\mu_1(Ц_1)\mu_2(Ц_2)\qquad (Ц_k\in\mathfrak{A}_k),$$

представляет собой квазимеру $\mu=\mu_1\times\mu_2$ (произведение квазимер μ_1 и μ_2), конечномерные проекции которой определяются формулой

$$\mu_{(\lambda_1,\ \lambda_2)}=\mu_{1\lambda_1}\times\mu_{2\lambda_2}.$$

Функция $f(x_1,\ x_2)$ на $(X_1\times X_2,\ \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2)$, очевидно, является цилиндрической в точности тогда, когда она цилиндрична по каждому аргументу (равномерно относительно другого), т. е. когда существует пара $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ такая, что $f-(\mathfrak{A}_{1\lambda_1}\times\mathfrak{A}_{2\lambda_2})$ -измерима. Таким же образом, как и выше, путем перехода к конечномерным распределениям при обычном условии абсолютной интегрируемости функции относительно соответствующего произведения вариаций $|\mu_{1\lambda_1}|\times|\mu_{2\lambda_2}|$ устанавливается для цилиндрических функций формула Фубини

$$\int\limits_{X_1\times X_2}f(x_1,\ x_2)\,\mu(dx_1\times dx_2)=\int\limits_{X_1}\mu_1(dx_1)\int\limits_{X_2}f(x_1,\ x_2)\,\mu_2(dx_2).\qquad(3.5)$$

3°. Квазимеры на измеримом линейном пространстве.

Обратимся к специальному случаю, когда $(X,\ \mathfrak{A}=\mathfrak{A}_Y)$— измеримое линейное пространство, определяемое некоторым достаточным множеством *Y* линейных функционалов на линейном пространстве *X*.

Прежде всего покажем, что ограниченная квазимера на $(X,\ \mathfrak{A})$ всегда может быть превращена в меру путем линейного расширения пространства.

Теорема 3.1. *Для всякого измеримого линейного пространства* $(X,\ \mathfrak{A}_Y)$ *существует такое его линейное расширение* $\left(\tilde{X},\ \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{Y}}\right)$, *что образ* μ_f *любой ограниченной квазимеры на* $(X,\ \mathfrak{A}_Y)$ *при вложении* $f\colon (X,\ \mathfrak{A}_Y)\to\left(\tilde{X},\ \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{Y}}\right)$ *σ-аддитивен на* $\left(\tilde{X},\ \tilde{\mathfrak{A}}_{\tilde{Y}}\right)$.

Доказательство. Пусть *S* — базис Гамеля в $\mathscr{L}(Y)$, т. е. состоящее из линейно независимых элементов подмножество $S\subset Y$, алгебраически порождающее $\mathscr{L}(Y)$. Алгебры цилиндрических множеств $\mathfrak{A}_S$ и $\mathfrak{A}_Y$ совпадают, как следует из предложения 2.1. Будем рассматривать элементы пространства *X* как функции на S

$$x(s)=s(x)\qquad (x\in X,\ s\in S).$$

Тогда пространство $(X, \mathfrak{A}_Y) = (X, \mathfrak{A}_S)$ естественно вкладывается в пространство $(\tilde{X}, \mathfrak{A}_S)$, где $\tilde{X}$ — совокупность всех вещественных функций на i[1] (см. пример 2.3). Образ μ_f квазимеры μ при этом снова является квазимерой, так как вложение f, очевидно, удовлетворяет условию $(\Lambda, \tilde{\Lambda})$-измеримости (см. п. 1° этого параграфа). В силу теоремы 1.4 каждая ограниченная квазимера на $(\tilde{X}, \mathfrak{A}_S)$ является мерой.

Важную роль при изучении квазимеры в линейном пространстве играет ее преобразование Фурье. Напомним сначала некоторые сведения о преобразовании Фурье меры ν на евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B})$. Под преобразованием Фурье понимается отображение

$$\nu \to \chi_\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,y)} \nu(dx) \qquad (y \in \mathbb{R}^n),$$

сопоставляющее мере ν ее характеристический функционал $\chi_\nu(y)$ (его часто также называют преобразованием Фурье меры ν). В силу ограниченности вариации $|\nu|$ характеристический функционал является равномерно непрерывной, ограниченной на $\mathbb{R}^n$ функцией. Эта функция однозначно определяет меру ν: если $\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$ — параллелепипед, у которого $|\nu|$-мера границы равна нулю, то

$$\nu\left(\prod_{k=1}^{n} [a_k, b_k)\right) = \\ = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T}^{T} \cdots \int_{-T}^{T} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-ia_k y_k} - e^{-ib_k y_k}}{iy_k} \times \\ \times \chi_\nu(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \ldots dy_n.$$

Вернемся к измеримому линейному пространству $(X, \mathfrak{A}_Y, \mu)$ с квазимерой. Без ограничения общности можно считать, что Y — линейное пространство, находящееся с X в двойственности с соотношением двойственности $\langle x, y\rangle$. При каждом $y \in Y$ функция $e^{i\langle x, y\rangle}$ —ограниченная цилиндрическая функция на X. Поэтому имеет смысл интеграл

$$\chi_\mu(y) = \int_X e^{i\langle x, y\rangle} \mu(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} \mu^y(dz), \qquad (3.6)$$

где $\mu^y(B) = \mu(x\colon \langle x, y\rangle \in B)$ —одномерная проекция квазимеры μ.

Определение 3.2. Функцию $\chi_\mu(y)$ $(y \in Y)$ назовем *характеристическим функционалом квазимеры* μ, а отображение $\mu \to \chi_\mu$ — *преобразованием Фурье.*

Таким ооразом, характеристический функционал квазимеры μ однозначно определяется ее одномерными проекциями μ^y.

Рассмотрим теперь конечномерные проекции μ. Пусть $\mathscr{L} \subset Y$ — конечномерное подпространство и $y_1, y_2, ..., y_n$ — базис в нем.

Обозначим через $\mu^{(y_1, \dots, y_n)}$ образ квазимеры μ при отображении $X \to (\langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle, \dots, \langle x, y_n\rangle)$ пространства X в конечномерное пространство $X/\mathscr{L}^\perp$, где

$\mathscr{L}^\perp$ — ядро рассматриваемого отображения.

Тогда имеет место формула

$$\chi_\mu\left(\sum_{k=1}^n t_k y_k\right) = \int_X e^{i\sum_{k=1}^n t_k\langle x, y_k\rangle} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sum t_k z_k}\mu^{(y_1, \dots, y_n)}(dz),$$

из которого следует утверждение.

Предложение 3.2. *Характеристический функционал квазимеры однозначно определяет ее конечномерные проекции: сужение* χ_μ *на конечномерное подпространство* $\mathscr{L} \subset Y$ *есть характеристический функционал образа квазимеры при отображении* $X \to X/\mathscr{L}^\perp$, *где* $\mathscr{L}^\perp \subset X$ *—подпространство, аннулирующееся функционалами из* $\mathscr{L}$.

Пример 3.1. Рассмотрим, в частности, оснащенное гильбертово пространство $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_- = \mathscr{H}$ (см. пример 2.2).

В этом случае характеристический функционал квазимеры μ, на $X = \mathscr{H}_-$ есть функция на двойственном пространстве $Y = \mathscr{H}_+$, которую можно (используя связь $\langle x, y\rangle = (x, y)_{\mathscr{H}}$) записать в виде

$$\chi_\mu(y) = \int_X e^{i(x, y)_{\mathscr{H}}}\mu(dx). \tag{3.7}$$

Пусть P —конечномерный ортопроектор в $\mathscr{H}$, действующий из $\mathscr{H}_-$ в $\mathscr{H}_+$. В этом случае пространство $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathsf{P}} = \mathsf{P}\mathscr{H}_-$ можно, используя скалярное произведение из $\mathscr{H}$, считать евклидовым. При этом $X/\mathscr{L}^\perp$ естественно отождествляется с $\mathscr{L}$, и мы получаем в соответствии с предложением 3.2 для образа μ_{P} квазимеры μ

$$\chi(\mathsf{P}y) = \int_{\mathscr{H}_-} e^{i(x, \mathsf{P}y)_{\mathscr{H}}}\mu(dx) = \int_{\mathscr{H}_-} e^{i(\mathsf{P}x, y)_{\mathscr{H}}}\mu(dx) =$$

$$= \int_{\mathscr{L}_{\mathsf{P}}} e^{i(\xi, y)}\mu^{\mathsf{P}}(d\xi) = \chi_{\mu^{\mathsf{P}}}(\mathsf{P}y).$$

Рассмотрим некоторые преобразования квазимер, определенных на измеримых линейных пространствах, и связанные с ними преобразования характеристических функционалов.

а) Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_{Y_1})$ и $(X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$ — измеримые линейные пространства. Введем в каждом из них слабую топологию $\sigma(X_1, Y_1)$, $\sigma(X_2, Y_2)$, определяемую пространствами линейных функционалов Y_1 и Y_2 соответственно. Тогда непрерывное линейное отображение $S: (X_1, \sigma(X_1, Y_1)) \to (X_2, \sigma_2(X_2, Y_2))$, очевидно, (Λ_1, Λ_2)-измеримо. Если μ — квазимера на $(X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$, то ее образ μ_S — квазимера на $(X_2, \mathfrak{A}_{Y_2})$, и в силу формулы (3.4)

$$\chi_{\mu_S}(y) = \int_{X_2} e^{i\langle x_2, y\rangle}\mu_S(dx_2) = \int_{X_1} e^{i\langle Sx_1, y\rangle}\mu(dx_1) = \\ = \int_{X_1} e^{i\langle x_1, S^*y\rangle}\mu(dx_1) = \chi_\mu(S^*y) \quad (y \in Y_2), \quad \textbf{(3.8)}$$

где $S^*: Y_2 \to Y_1$—сопряженное отображение.

В частности, если S —вложение и $Y_1 = Y_2/(SX_\perp)^\perp$, то S*— естественное проектирование $Y_2 \to Y_1$ и χ_{μ_S} постоянно на классах смежности Y_2 по N.

б) Пусть μ — квазимера на $(X, \mathfrak{A})$ и $h \in X$. Рассмотрим отображение сдвига в пространстве:

$$X \to X + h.$$

Это отображение переводит квазимеру μ. в новую квазимеру μ_h в том же измеримом линейном пространстве

$$\mu_h(A) = \mu(A - h).$$

При этом

$$\chi_{\mu_h}(y) = \int_X e^{i\langle x, y\rangle}\mu_h(dx) = \\ = \int_X e^{i\langle x+h, y\rangle}\mu(dx) = e^{i\langle h, y\rangle}\chi_\mu(y). \quad (3.9)$$

в) Рассмотрим пару измеримых линейных пространств с квазимерами $(X_j, \mathfrak{A}_{Y_j}, \mu_j)$ и их произведение

$$(X_1 \times X_2, \mathfrak{A}_{Y_1} \times \mathfrak{A}_{Y_2}, \mu_1 \times \mu_2).$$

Легко видеть, что при этом $\mathfrak{A}_{Y_1} \times \mathfrak{A}_{Y_2} = \mathfrak{A}_{Y_1 \times Y_2}$, причем двойственность между $X = X_1 \times X_2$ и $Y = Y_1 \times Y_2$ определяется соотношением $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle$, где $x = \{x_1; x_2\}$, $y = \{y_1; y_2\}$. Поэтому

$$\chi_{\mu_1 \times \mu_2}(y_1, y_2) = \int_{X_1 \times X_2} e^{i[\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle]}(\mu_1 \times \mu_2)(dx) = \\ = \int_{X_1} e^{i\langle x_1, y_1\rangle}\mu_1(dx_1) \int_{X_2} e^{i\langle x_2, y_2\rangle}\mu_2(dx_2) = \chi_{\mu_1}(y_1)\chi_{\mu_2}(y_2). \quad (3.10)$$

г) Пусть теперь $X_1 = X_2,\ Y_1 = Y_2$. Рассмотрим отображение

$$S(x_1,\ x_2) = x_1 + x_2, \quad S\colon\ X_1 \times X_1 \to X_1. \qquad (3.11)$$

Определение 3.3. Образ $\mu_S = \mu_1 * \mu_2$ квазимеры $\mu_1 \times \mu_2$ при отображении (3.11), являющийся квазимерой в $(X_1,\ \mathfrak{A}_{Y_1})$, называется *сверткой квазимер* μ_1 и μ_2.

Пусть $A \in \mathfrak{A}_{Y_1}$. Функция $\mu_2(A - x)$ является цилиндрической и $\mathfrak{A}_{Y_1}$-измеримой. Поэтому имеют смысл следующие преобразования:

$$(\mu_1 * \mu_2)(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(S^{-1}(A)) = \int\limits_{x_1 + x_2 \in A} (\mu_1 \times \mu_2)(dx) =$$

$$= \int\limits_{X_1} \mu_2(dx_2) \int\limits_{A - x_2} \mu_1(dx_1) = \int\limits_{X_1} \mu_1(A - x_1)\,\mu_2(dx_1). \qquad 12)$$

Из определения свертки, очевидно, следует ее коммутативность. Из соотношений (3.8) и (3.10) следует, что

$$\chi_{\mu_1 * \mu_2}(y) = \chi_{\mu_1 \times \mu_2}(S^* y) = \chi_{\mu_1}(y)\,\chi_{\mu_2}(y), \qquad (3.13)$$

поскольку сопряженным к отображению (3.11) является

$$S^* y = (y,\ y).$$

4°. Неотрицательные квазимеры. В общем случае не удается описать характеристические функционалы квазимер на *X*. Положение, однако, упрощается для знакопостоянных квазимер.

Определение 3.4. Комплекснозначная функция $\psi(y)$, определенная на линейном пространстве *Y*, называется *положительно определенной,* если для любого конечного набора элементов $y_1, \dots, y_n \in Y$ и комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ справедливо неравенство

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \psi(y_j - y_k)\,\alpha_k \bar{\alpha}_j \geqslant 0.$$

Очевидно, что положительная определенность функции $\psi(y)$ эквивалентна положительной определенности совокупности ее сужений на конечномерные подпространства.

В конечномерном случае справедливо следующее хорошо известное утверждение, которое мы приведем без доказательства.

Теорема 3.2 (Бохнер). *Для того чтобы функция* $\psi(y),\ y \in \mathbb{R}^n$ *являлась преобразованием Фурье некоторой неотрицательной меры* μ *на* $(\mathbb{R}^n,\ \mathfrak{B}_n)$:

$$\psi(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\,y)}\mu(dx),$$

необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определена и непрерывна в точке y = 0.

Из теоремы 3.2 следует

Предложение 3.3. *Пусть X, Y—пара линейных пространств в двойственности. Для того чтобы комплекснозначная функция* $\psi(y)\ (y \in Y)$ *являлась характеристическим функционалом неотрицательной квазимеры* μ *на* $(X,\ \mathfrak{A}_Y)$, *необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определенной и ее сужение на каждое конечномерное подпространство L* $\subset$ *Y было непрерывно в точке у* = 0.

Доказательство. Необходимость немедленно следует из теоремы Бохнера, поскольку сужение $\psi|_L$ является преобразованием Фурье соответствующей конечномерной проекции μ.

Наоборот, пусть ψ положительно определена и имеет непрерывные в нуле (а значит, и во всем пространстве — это следует из положительной определенности) конечномерные сужения.

Пусть $\mathcal{M} \subset X$—замкнутое в топологии $\sigma(X,\ Y)$ подпространство конечной коразмерности, $\mathcal{M}^{\perp} \subset Y$ — конечномерное подпространство, состоящее из аннулирующихся на $\mathcal{M}$ функционалов. В силу теоремы Бохнера на фактор-пространстве $X/\mathcal{M}$ существует единственная неотрицательная мера $\mu_{\mathcal{M}}$, для которой

$$\psi(y) = \int\limits_{X/\mathcal{M}} e^{i\langle x,\ y\rangle} \mu_{\mathcal{M}}(dx) \qquad (y \in \mathcal{M}^{\perp}).$$

Построенные меры в фактор-пространствах согласованы, так как если $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ и $g\colon X/\mathcal{M}_1 \to X/\mathcal{M}_2$—каноническое отображение, то для меры

$$\nu = (\mu_{\mathcal{M}_1})\, g$$

выполняется соотношение

$$\chi_\nu(y) = \chi_{\mu_{\mathcal{M}_1}}(y)\,|_{\mathcal{M}_2^{\perp}} = \psi(y)\,|_{\mathcal{M}_1^{\perp}}\,|_{\mathcal{M}_2^{\perp}} = \psi(y)\,|_{\mathcal{M}_2^{\perp}} =$$
$$= \chi_{\mu_{\mathcal{M}_2}}(y) \qquad (y \in \mathcal{M}_1^{\perp}),$$

которое показывает, что

$$\nu = \mu_{\mathcal{M}_2}.$$

Полученная согласованнаясистема конечномерных распределений и определяет неотрицательную квазимеру μ на *X*.

5°. Интегрирование нецилиндрических функций. Выше было показано, что для цилиндрических функций интеграл по квазимере определяется без трудностей путем сведения к интегралу по конечномерным проекциям, которые уже σ-аддитивны.

Нашей дальнейшей целью является расширение процедуры интегрирования, по крайней мере, на некоторые классы нецилиндрических функций.

Пусть

$$\left(X,\ \mathfrak{A} = \lim_{\Lambda} \mathfrak{A}_\lambda\right)$$

— измеримое пространство с предельной структурой. Рассмотрим линейное пространство *F*, состоящее из $\sigma(\mathfrak{A})$[-измеримых вещественных ограниченных функций на *X*.

Определение 3.5. Будем называть *системой проектирований* определенное на *F* семейство, $S_\lambda\ (\lambda \in \Lambda)$ линейных операторов в *F*, обладающее следующими свойствами:

а) $(S_\lambda f)(x) - \mathfrak{A}_\lambda$-измеримая функция на X,

б) выполняется соотношение

$$S_{\lambda_1} S_{\lambda_2} = S_{\lambda_1} \qquad (\lambda_1 < \lambda_2), \tag{3-14}$$

в) в пространстве *F* существует топология σ, в которой

$$\lim_{\Lambda} S_\lambda(f) = f \qquad (f \in F).$$

Пусть μ — квазимера в $(X, \mathfrak{A})$ и задана система проектирований *{Sλ}*. Для каждой $f \in F$ измеримое отображение $S_\lambda(f)\colon\ (X,\ \mathfrak{A}_\lambda) \to (\mathbb{R}^1,\ \mathfrak{B})$ порождает на $(\mathbb{R}^1,\ \mathfrak{B})$ σ-аддитивную меру

$$\theta_{\lambda, f}(B) = \mu_{S_\lambda(f)}(B) = \mu_\lambda\left[(S_\lambda f)^{-1}(B)\right] \qquad (B \in \mathfrak{B}).$$

Определение 3.6. Пусть G —некоторое линейное пространство, состоящее из ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}^1$. Назовем квазимеру μ *квазимерой типа (F, G),* если для любой $f \in F$ направленное семейство мер $\theta_{\lambda, f}$ $(\lambda \in \Lambda)$ слабо сходится как семейство распределений над основным пространством G, т. е. для каждой $g \in G$ существует предел

$$\lim_{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, \theta_{\lambda, f}(dy) = \lim_{\Lambda} \int_X g(S_\lambda f(x))\, \mu(dx) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int_X g(f(x))\, \mu(dx). \tag{3.15}$$

Этот предел мы по определению назовем *интегралом по квазимере* μ от функции *g(f(x)).*

Замечание 3.1. По определению для квазимеры типа *(F, G)* интеграл (3.15) существует при любой паре $f \in F,\ g \in G$. Если при этом пространство G —топологическое и его сопряженное пространство слабо полно, то существует распределение $\theta_f \in G'$ такое, что

$$\int_X g(f(x))\, \mu(dx) = \int_Y g(y)\, \theta_f(dy).$$

При этом из сходимости $g_n \to g$ в пространстве *G* следует сходимость интегралов

$$\int_X g_n(f(x))\,\mu(dx) \to \int_X g(f(x))\,\mu(dx). \quad (3.16)$$

Существуют естественные способы задания системы проектирований.

Пример 3.2. Пусть ν — вероятностная мера на $(X,\ \sigma(\mathfrak{A}))$. Для каждой σ-подалгебры $\mathfrak{A}_\lambda \subset \sigma(\mathfrak{A})$, как известно, для любой ν-интегрируемой функции $f(x)$ на $(X,\ \sigma(\mathfrak{A}))$ mod ν однозначно определяется условное математическое ожидание $M_\lambda f$ как $\mathfrak{A}_\lambda$-измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_X [M_\lambda f(x)]\,g(x)\,\nu(dx) = \int_X f(x)\,g(x)\,\nu(dx)$$

для любой ограниченной $\mathfrak{A}_\lambda$-измеримой вещественной функции $g(x)$. При этом операторы

$$S_\lambda f(x) = M_\lambda f(x)$$

удовлетворяют условиям, налагаемым на систему проектирований. Последнее свойство следует из теоремы Дуба, согласно которой

$$\lim_{\Lambda} M_\lambda f(x) = f(x) \quad (\nu\text{-почти везде}).$$

Очевидно, что при этом

$$\lim_{\Lambda} \int_X g(S_\lambda f(x))\,\nu(dx) = \int_X g(f(x))\,\nu(dx)$$

для любой непрерывной функции $g(y)$ и ограниченной $\sigma(\mathfrak{A})$-измеримой $f(x)$, где интеграл справа понимается в обычном смысле.

Таким образом, существуют пространства G и F такие, что любая мера ν имеет тип (G, F) при соответствующей системе проектирований.

Пример 3.3. Пусть X —линейное топологическое пространство, и предельная измеримая структура в нем определяется системой $\mathcal{P} = \{\mathrm{P}\}$ непрерывных проекторов на конечномерные подпространства X_{P}, удовлетворяющих условиям а) и б) п. 2.4.

Тогда систему проектирований можно определить формулой

$$(S_{\mathrm{P}} f)(x) = f(\mathrm{P}x) \qquad (\mathrm{P} \in \mathcal{P}).$$

При этом для каждой ограниченной непрерывной функции

$$\lim_{\mathcal{P}} (S_{\mathrm{P}} f)(x) = \lim_{\mathcal{P}} f(\mathrm{P}x) = f(x) \qquad (x \in X).$$

Для любой меры ν на $(X,\ \sigma(\mathfrak{A}))$ в этих условиях выполняется соотношение

$$\lim_{\mathcal{P}} \int_X (S_{\mathrm{P}} f)(x)\,\nu(dx) = \int_X f(x)\,\nu(dx).$$

Рассмотрим теперь один класс функционалов, интегрируемых по квазимере, ограничившись для простоты изложенным случаем оснащенного гильбертова пространства.

Пусть $X = \mathscr{H}_- \supset \mathscr{H} \supset \mathscr{H}_+$. Рассмотрим квазимеру μ на $\mathscr{H}_-$ с непрерывным, ограниченным на $\mathscr{H}_+$ характеристическим функционалом

$$\chi_\mu(\theta) = \int_{\mathscr{H}_+} e^{i(x,\theta)_{\mathscr{H}}} \mu(d\theta).$$

Пусть F — пространство функций на $\mathscr{H}_-$, представимых в виде преобразования Фурье

$$f(x) = \int_{\mathscr{H}_+} e^{i(x,\theta)} \nu(d\theta) \qquad (3.17)$$

какой-нибудь комплексной меры *ν* на $\mathscr{H}_+$.

Предложение 3.4. *Для каждой функции вида* (3.17) *существует интеграл*

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{\mathscr{P}} \int_X f(\mathrm{P}x)\mu(dx) = \lim_{\mathscr{P}} \int_{X_\mathrm{P}} f(y)\mu_\mathrm{P}(dy) \qquad (3.18)$$

по квазимере μ *с ограниченным непрерывным на* $\mathscr{H}_+$ *характеристическим функционалом, где* $\mathscr{P}$ *—система конечномерных ортопроекторов в* $\mathscr{H}$, *действующих из* $\mathscr{H}_-$ *в* $\mathscr{H}_+$. *При этом справедлива формула*

$$\int_{\mathscr{H}_-} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathscr{H}_+} \chi_\mu(\theta)\nu(d\theta). \qquad (3.19)$$

Доказательство. При каждом $\mathrm{P} \in \mathscr{P}$, применяя теорему Фубини, получаем

$$\int_X f(\mathrm{P}x)\mu(dx) = \int_{X_\mathrm{P}} \int_{\mathscr{H}_+} e^{i(\mathrm{P}y,\theta)}\nu(d\theta)\mu_\mathrm{P}(dy) =$$

$$= \int_{\mathscr{H}_+} \int_{X_\mathrm{P}} e^{i(y,\mathrm{P}\theta)}\mu_\mathrm{P}(dy)\nu(d\theta) = \int_{\mathscr{H}_+} \chi_\mu(\mathrm{P}\theta)\nu(d\theta).$$

В правой части этого равенства при рассматриваемых условиях можно сделать предельный переход при $\mathrm{P} \to \mathrm{I}$.

Замечание 3.2. Комплексные меры на $\mathscr{H}_+$ образуют банахову алгебру $M(\mathscr{H}_+)$ со сверткой $\nu_1 * \nu_2$ в качестве умножения и нормой $\|\nu\| = |\nu|(\mathscr{H}_+)$. Преобразование Фурье (3.17) переносит структуру банаховой алгебры на пространство $\Phi(\mathscr{H}_-)$ функций, если под нормой понимать $\|f\| = \|\nu\|$, а под умножением — обычное поточечное.

Если $f \in \Phi(\mathscr{K}_-)$ и $\varphi(z)$ функция, голоморфная в круге $\{|z| \leqslant \|f\|\}$, то и $\varphi(f(x)) \in \Phi(\mathscr{K}_-)$. Таким образом, в качестве пространства *G* в рассматриваемом случае может быть принято пространство аналитических в замкнутом круге функций.

1. 4. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Здесь кратко в удобной для нас форме излагаются сведения из топологии линейных пространств, используемые в книге (особенно в гл. III).

1°. Преднормы. Пусть *X*— линейное пространство над полем S ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). *Преднормой (полунормой)* на *X* называется неотрицательная функция *p(y)*, обладающая свойствами

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y); \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \qquad (x,\ y \in X;\ \alpha \in S).$$

Рассмотрим в *X* линейное подпространство

$$N_p = \{x \in X: \quad p(x) = 0\}.$$

При $N_p = \{0\}$ X—нормированное пространсгво с нормой *p (x).* Если N_p не тривиально, рассмотрим фактор-пространство $X_p = X/N_p$, и пусть Q_p: $X \to X_p$—соответствующее каноническое отображение. Пространство X_p нормировано с нормой $\|\xi\|_p = p(Q_p^{-1}\xi)$ $(\xi \in X_p)$.

Обозначим $\bar{X}_p$ банахово пространство, получаемое путем пополнения X_p; i_p—естественное вложение X_p в $\bar{X}_p$ и $\bar{Q}_p = i_p Q_p$.

Пусть *q* — еще одна преднорма на *X*, для которой

$$p(x) \leqslant Cq(x) \qquad (x \in X).$$

Тогда $N_q \subseteq N_p$ и каноническим образом определяется непрерывное линейное отображение ψ_{pq}: $\bar{X}_q \to \bar{X}_p$:

$$\psi_{pq}(\xi) = \bar{Q}_p(Q_q^{-1}\xi) \qquad (\xi \in i_q(X_q));$$

$$\psi_{pq}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \psi_{pq}(\xi_n) \qquad \left(\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n;\ \xi_n \in i_q(X_q);\ \xi \in \bar{X}_q\right).$$

Если N_p имеет в *X* прямое дополнение, то X_p можно отождествить с этим дополнением: $X = X_p \dotplus N_p$, и в этом случае Q_p — проектор на X_p. Если при этом N_q дополняемо в N_p:

$$X = N_q \dotplus N_{pq} \dotplus X_p = N_q \dotplus X_q,$$

то ψ_{pq} есть замыкание сужения

$$Q_{pq} = Q_p|_{X_q}.$$

Преднорма *p* называется *гильбертовой,* если $p^2(x) = b(x,\ x)$, где *b* — неотрицательная билинейная форма на *X*×*X.* Если *p* гильбертова, то X_p — гильбертово пространство.

2°. Локально выпуклые пространства. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство (л. в. п.), топология которого (согласованная с линейной структурой) определяется некоторым семейством П преднорм, как слабейшая из топологий, в которых все эти преднормы непрерывны. Фундаментальную систему замкнутых окрестностей нуля пространства X образуют при этом множества вида

$$\left\{x: \sup_{1 \leqslant l \leqslant n} p_l(x) \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ p_l \in \Pi\right\}.$$

Эти множества являются *абсолютно выпуклыми* в том смысле, что вместе с каждой парой точек x, y они содержат и все точки $\alpha x + \beta y$ $(|\alpha| + |\beta| \leqslant 1)$. Они являются *поглощающими* в том смысле, что для каждого $x \in X$ содержат точки $\frac{1}{\lambda} x$ при достаточно больших $|\lambda|$.

Наоборот, каждое абсолютно выпуклое поглощающее множество $A \subset X$ порождает преднорму

$$p_A(x) = \inf\left\{\lambda > 0: \frac{1}{\lambda} x \in A\right\},$$

которая непрерывна тогда и только тогда, когда A—окрестность нуля пространства X.

Топология, порождаемая системой П, отделима, если для каждого $x \neq 0$ существует $p \in \Pi$, для которой $p(x) \neq 0$

Множество в X называется ограниченным, если оно поглощается любой окрестностью нуля. Если абсолютно выпуклое множество A ограничено, то $P_A(x)$ — норма (вообще говоря, не на всем X, а на его подпространстве $X_A = \left\{x \in X: \exists \lambda > 0,\ \frac{1}{\lambda} x \in A\right\}$). Это множество называется гильбертовым, если норма p_A гильбертова.

3°. Двойственность линейных пространств. Пусть X и Y—линейные пространства. Говорят, что пара *(X; Y)* находится *в двойственности,* если определен билинейный функционал $\langle x, y\rangle$ $(x \in X,\ y \in Y)$, обладающий следующим свойством: для каждого $y \in Y$ $(y \neq 0)$ существует $x \in X$ такой, что $\langle x, y\rangle \neq 0$, и для каждого $x \in X$ $(x \neq 0)$ существует $y \in Y$, для которого $\langle x, y\rangle \neq 0$. Функционал $\langle x, y\rangle$ называют *соотношением двойственности* или *спариванием.*

Каждое л. в. п. X находится в двойственности со своим сопряженным пространством X'—пространством всех линейных непрерывных на X функционалов с соотношением: $\langle x, f\rangle = f(x)$ $(f \in X')$.

Пусть X, Y — пара линейных пространств в двойственности, $\langle x, y\rangle$ — соотношение спаривания для них.

Локально выпуклая топология β в X называется *согласующейся с двойственностью,* если алгебраически

$$Y = X'_\beta,$$

где X'_β — пространство всех линейных непрерывных в топологии β функционалов на X. Слабейшей из таких топологий является слабая топология σ (X, Y) в X, определяемая системой преднорм

$p_y(x) = |\langle x, y\rangle| \ (y \in Y)$.

Существует сильнейшая топология, согласующаяся с двойственностью л. в. п. X, и $Y = X'$— *топология Макки* $\tau(X, X')$: топология равномерной сходимости на всех абсолютно выпуклых σ(X', X)-компактных множествах из $X' = X'_\sigma$. Пространство X, топология которого совпадает с τ(X, X'), называется *пространством Макки.*

Бочкой в л. в. п. называется всякое его замкнутое и поглощающее абсолютно выпуклое подмножество. Л. в. п. называется *бочечным,* если каждая бочка в нем является окрестностью нуля. Отделимые бочечные пространства являются пространствами Макки. Наоборот: полное, отделимое пространство Макки—бочечно.

К числу бочечных пространств относятся пространства Фреше (полные метризуемые л. в. п.), в том числе банаховы пространства. Бочечными являются пространства, получающиеся из бочечных путем перехода к фактор-пространству и к индуктивному пределу.

4°. Оснащенные гильбертовы пространства. Пусть $\mathscr{H}$—гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathscr{H}}$, Y—плотно вложенное в него л. в. п. с топологией, более сильной, чем индуцированная из $\mathscr{H}$. Каждый элемент $h \in \mathscr{H}$ определяет на Y линейный непрерывный функционал

$h(y) = (y, h)_{\mathscr{H}}$,

и, таким образом, $\mathscr{H}$ вкладывается в $X = Y'$ плотно в топологии σ (X, Y). (Мы обозначаем здесь одним и тем же символом совпадающие при вложении элементы различных пространств.)

Таким образом, получается тройка плотно вложенных пространств

$$Y \subset \mathscr{H} \subset X = Y',$$

причем соотношение двойственности $\langle x, y\rangle$ является расширением скалярного произведения. Подчеркивая этот факт, часто обозначают

$\langle x, y\rangle = (x, y)_{\mathscr{H}}$

и при произвольных $x \in X$, $y \in Y$. В частности, Y может быть гильбертовым (тогда и X—гильбертово) или проективным пределом гильбертовых пространств (тогда X—индуктивный предел гильбертовых пространств).

Рассмотренная выше ситуация возникает, если *Y*—*квазигильбертово* пространство, т. е. л. в. п., на котором существует непрерывная гильбертова норма *p (y).* В качестве $\mathcal{H}$ тогда выбирается пополнение *Y* по этой норме.

Если топология *Y* определяется счетным набором гильбертовых норм, то всегда можно считать, что $Y=\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_k$, где $\mathcal{H}_{k+1}\subset\mathcal{H}_k$ и $\|x\|_k\leqslant\|x\|_{k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Такое пространство *Y* называется *счетно-гильбертовым.* При этом $X=\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathcal{H}_{-k}$, где $\mathcal{H}_{-k}=\mathcal{H}'_k$ и $\mathcal{H}_k\subseteq\mathcal{H}_0\subset\mathcal{H}_{-k}$.

5°. Поляры. Пусть X — л. в. п. *Полярой* множества $\mathcal{M}\subset X$ называется подмножество $\mathcal{M}^0$ сопряженного пространства X':

$$\mathcal{M}^0=\{y\in X':\ |\langle x,\ y\rangle|\leqslant 1,\ \forall x\in\mathcal{M}\}.$$

Поляра представляет собой слабо замкнутое абсолютно выпуклое множество в X'. Поляра каждой окрестности нуля в X есть слабо компактное подмножество X'.

Если $F\subset X$—линейное подпространство, то $F^0\subset X'$—линейное подпространство, состоящее из элементов, аннулирующихся на *F:*

$$F^0=\{y\in X':\ \langle x,\ y\rangle=0,\ \forall x\in F\}.$$

Пусть *L* — замкнутое линейное подпространство X'_σ; X'_σ/L—фактор-пространство, наделенное фактор-топологией (сильнейшей топологией, при которой естественное отображение $P\colon\ X'_\sigma\to X'_\sigma/L$ непрерывно). Тогда поляра $L^0\subset X$ может быть отождествлена с пространством, сопряженным к фактор-пространству $L^0=(X'_\sigma/L)'$ при естественном соотношении двойственности

$$\langle x,\ \{\xi+L\}\rangle\overset{\text{def}}{=\!=}\langle x,\ \xi\rangle\quad(x\in L^0,\ \xi\in X').$$

Если $\mathcal{M}$ —абсолютно выпуклое множество в *X* и $\mathcal{M}^0\subset X'$—его поляра, то $P\mathcal{M}^0$ есть поляра в X'/L множества $\mathcal{M}\cap L^0\subset L^0$.

Отметим, что поляра гильбертова множества *A* также является гильбертовым множеством, причем

$$p_{A^0}(y)=\sup_{x\in A}|\langle x,\ y\rangle|.$$

6°. Ядерная топология. (Эту топологию называют также *топологией Сазонова,* который ввел ее для гильбертова пространства)

Пусть *X* — л. в. п. с некоторой топологией β. Рассмотрим совокупность *R(X,* β) всех гильбертовых преднорм на *X,* непрерывных в топологии β. Пусть $q\in R(X,\ \beta)$; S — положительный оператор Гильберта —

Шмидта в $\bar{X}_q$ и $p(x) = q(S\bar{Q}_q x)$. Систему всех полученных таким образом преднорм обозначим $\mathscr{F}(X, \beta)$. Эта система непуста.
Так как $R(X, \beta) \supset R(X, \sigma)$, а пространства $\bar{X}_q$, соответствующие преднормам, определяющим слабую топологию, конечномерны и потому без ограничения общности могут считаться гильбертовыми.
Топологию в *X*, порождаемую системой преднорм $\mathscr{F}(X, \beta)$, назовем *ядерной топологией* $\tau_S(X, \beta)$, *ассоциированной с топологией* β.
Л. в. п. *(X*, β) называется *ядерным,* если $\tau_S(X, \beta) = \beta$.
Поскольку ограниченные операторы в конечномерном пространстве являются операторами Гильберта—Шмидта, то пространство (X, σ) ядерно: $\tau_S(X, \sigma) = \sigma$ и, следовательно, любая ядерная топология в *X* сильнее слабой топологии σ*(X, X')*.
Приведенное выше построение эквивалентно следующему:
$p \in \mathscr{F}(X, \beta)$ тогда и только тогда, когда $p \in R(X, \beta)$ и существует мажорирующая *(p≤q)* преднорма $q \in R(X, \beta)$, для которой каноническое вложение

$$\tau_{pq}: \bar{X}_q \to \bar{X}_p$$

является оператором Гильберта—Шмидта.
В качестве примера рассмотрим гильбертово пространство *X* с топологией β сильной сходимости. Поскольку любая непрерывная преднорма гильбертова пространства мажорируется его нормой, то $\mathscr{F}(X, \beta)$ состоит из преднорм вида $p_S(x) = \|Sx\|$, где S пробегает совокупность всех неотрицательных операторов Гильберта—Шмидта.
Более общо, пусть топология л. в. п. *X* определяется совокупностью *R (X*, β) гильбертовых преднорм. Тогда $\mathscr{F}(X, \beta)$ состоит из преднорм вида

$$\bar{p}(x) = \|SQ_p(x)\|_p \quad (p \in R(X, \beta)),$$

где $Q_p: X \to \bar{X}_p$—каноническое отображение, S —оператор Гильберта— Шмидта в $\bar{X}_p$, $\|\cdot\|_p$—норма в $\bar{X}_p$.
Пример ядерного пространства представляет счетно-гильбертово пространство, у которого операторы вложения

$$J_k: \mathscr{H}_{k+1} \to \mathscr{H}_k$$

— операторы Гильберта — Шмидта (счетно-гильбертово пространство с гильбертово -шмидтовыми вложениями).
7e. Компактность. Напомним некоторые понятия, связанные с компактностью множеств. Множество $\mathscr{M} \subset X$ называется *компактным,* если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное. Каждое бесконечное подмножество $\mathscr{M}_1$ компактного множества $\mathscr{M}$ имеет предельную точку $x \in \mathscr{M}$. Более слабое свойство, состоящее

в том, что предельная точка $x \in X$ множества $\mathcal{M}_1$ существует, но возможно $x \overline{\in} \mathcal{M}$, называется *относительной компактностью* $\mathcal{M}$ в X. Замыкание относительно компактного множества компактно. Множество $\mathcal{M}$ называется (относительно) *секвенциально компактным,* если из каждой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке $x \in \mathcal{M}$ (соответственно $x \in X$). Для счетного множества $\mathcal{M}$ относительная секвенциальная компактность влечет относительную компактность.

Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет точно одну предельную точку. Если последовательность имеет точно одну предельную точку и, кроме того, относительно компактна, то она сходится.

Пусть X, Y — двойственная пара линейных пространств. Если пространство $(Y, \sigma(Y, X))$ сепарабельно, то относительно компактная последовательность $\{x_n\} \subset (X, \sigma(X, Y))$ является и относительно секвенциально компактной. Достаточно показать, что из каждой бесконечной части этой последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую единственную предельную точку. Такая подпоследовательность очевидным образом строится при помощи диагонального процесса так, чтобы она сходилась на элементах счетного плотного в $(Y, \sigma(Y, X))$ множества.

Последовательность
$\{x_n\} \subset (X, \sigma(X, Y))$
называется *фундаментальной,* если фундаментальна каждая последовательность $\langle x_n, y\rangle \quad (y \in Y)$. Пространство *X слабо полно,* если каждая фундаментальная в этом смысле последовательность сходится. Так как фундаментальная последовательность не может иметь более одной предельной точки, то для ее сходимости достаточна ее относительная компактность.

Алгебра цилиндрических множеств на произведении пространств естественно возникает в теории случайных функций. В этом случае неотрицательная нормированная квазимера есть не что иное, как согласованный набор конечномерных распределений случайной функции. А. Н. Колмогоров впервые установил, что такой набор порождает меру в произведении компактных пространств. Доказательство Колмогорова переносится на более общий случай, но с сохранением некоторых топологических требований. Ж. Неве топологические условия заменил требованием, сформулированным в терминах компактного класса множеств. Этот путь был развит О. Г. Смоляновым и С. В. Фоминым, сформулировавшими понятие измеримого пространства Радона. Они доказали теорему Колмогорова для произведения пространств Радона и вещественной ограниченной квазимеры.

Вариант теоремы Колмогорова для линейного пространства с достаточным множеством линейных функционалов рассматривали Р. Гетур, И. Сигал, Л Гросс, Е. Макшейн. Мы излагаем свойства цилиндрических множеств в линейном пространстве и теорему о σ-аддитивности образа ограниченной квазимеры при линейном расширении измеримого линейного пространства, следуя работе О. Г. Смолянова и С. В. Фомина**.**

Дальнейшее обобщение состоит в переходе от произведений пространств к пространствам с предельной измеримой структурой: обобщение теоремы Колмогорова на этот случай содержится в теореме 1.3

Интегрирование по положительной квазимере возникает уже в теории случайных функций при вычислении средних от функционалов с помощью конечномерных распределений. Возникающие здесь проблемы имеют в основном технический характер. Для ограниченной знакопеременной квазимеры ситуация аналогична. Заметим, что ряд теорем теории случайных процессов формально переносится на этот случай.

Значительно сложнее обстоит дело для неограниченных квазимер. Интегралы по таким квазимерам впервые возникли в работах Фейнмана. Точно говоря, «мера Фейнмана» не является квазимерой в рассмотренном выше смысле: ее конечномерные проекции не ограничены и становятся ограниченными лишь после специальной регуляризации.

Существует значительная литература по фейнмановским интегралам и другим интегралам по неограниченным квазимерам.

2. Гауссовы меры в гильбертовом пространстве

В этой главе рассматривается важный класс мер в функциональных пространствах—гауссовы меры. Все изложение проводится для гильбертова пространства: в следующей главе будет показано, что каждая гауссова цилиндрическая мера может быть реализована таким образом.

Мы рассматриваем измеримые квадратично интегрируемые линейные функционалы и операторы, строим известное ортогональное разложение пространства интегрируемых в квадрате по гауссовой мере функций на пространства, состоящие из полиномов. Изложение этих вопросов основано на использовании специальных формул

интегрирования по частям. Достаточно подробно изучается вопрос об абсолютной непрерывности гауссовых мер.
Далее рассматривается преобразование Фурье по гауссовой мере. Наконец, проводится простейшее рассмотрение фейнмановских интегралов — интегралов по гауссовой квазимере с комплексным параметром.
При чтении этой главы нужно лишь поверхностное знакомство с главой I, в основном в части, касающейся определений. От читателя требуется также некоторое владение элементарными понятиями из геометрии гильбертова пространства и теории операторов в нем.

2.1. Гауссовы меры в конечномерном пространстве

1°. Характеристический функционал и плотность. Напомним, что *гауссовой мерой* в $\mathbb{R}^1$ называется абсолютно непрерывная относительно лебеговой неотрицательная мера с плотностью
$\rho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}\right\}$. Она однозначно определяется вещественным числом α (средним) и положительным α^2 (дисперсией).
Легко проверить, что характеристический функционал гауссовой меры в $\mathbb{R}^1$ имеет вид

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\rho(x)\,dx = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2 + i\alpha\omega\right\}. \quad \textbf{(1.1)}$$

Неотрицательную меру μ в $\mathbb{R}^n$ назовем *гауссовой,* если гауссовыми являются все ее одномерные проекции μ^y $(y \in \mathbb{R}^n)$, где
$\mu^y(A) = \mu\{x \in \mathbb{R}^n\colon (x, y) \in A\}$.

Из этого условия выводится выражение характеристического функционала χ_μ. Действительно, для характеристического функционала проекции μ^y из (1.3.6) следует соотношение
$\chi_{\mu^y}(\omega) = \chi_\mu(\omega y)$,
которое влечет равенство

$$u(\omega y) = \ln\chi_\mu(\omega y) = -\frac{1}{2}\sigma^2(y)\,\omega^2 + i\alpha(y)\,\omega.$$

Дифференцируя его по ω при ω = 0, получаем, что
$\alpha(y) = (a, y)$ $(a = -iu'(0))$ — линейный функционал, а
$\sigma^2(y) = (\mathrm{B}y, y)$ $(\mathrm{B} = -u''(0))$ —квадратичный.
Таким образом, характеристический функционал гауссовой меры μ в $\mathbb{R}^n$ всегда имеет вид

$$\chi_\mu(y) = \left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}y, y) + i(a, y)\right\}, \quad (1.2)$$

где $a \in \mathbb{R}^n$ —среднее, В —(очевидным образом) положительный оператор в $\mathbb{R}^n$, который называют *корреляционным.* При помощи прямого вычисления, приводя матрицу оператора В к диагональному виду, нетрудно проверить, что при $\det \mathrm{B} \neq 0$ функция (1.2) является преобразованием Фурье положительной функции

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathrm{B}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}^{-1}x,\ x)\right\},$$

которая представляет собою плотность по отношению к мере Лебега некоторой неотрицательной нормированной меры μ в $\mathbb{R}^n$.
Таким образом, при det $B \neq 0$ формула (1.2) описывает все (невырожденные) гауссовы меры в $\mathbb{R}^n$.
Если $\det \mathrm{B} = 0$, то существует максимальный ортопроектор Р в $\mathbb{R}^n$, для которого В = РВ = ВР. При этом мера μ сосредоточена в сдвинутом на вектор *а* подпространстве $\mathrm{P}\mathbb{R}^n$ и там уже является невырожденной.
2°. Вычисление некоторых интегралов. Пусть μ_B — невырожденная центрированная (*a* = 0) гауссова мера с корреляционным оператором В. Для вычисления моментов

$$m_{2k}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}) = \int\limits_{R^n} (x,\ \varphi_1)(x,\ \varphi_2)\ldots(x,\ \varphi_{2k})\,\mu(dx)$$

удобно пользоваться соотношением

$$m_{2k}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}) = (-1)^k \chi_{\mu}^{(2k)}(0)(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}),$$

(где справа записана производная порядка *2k* в направлении векторов $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}$), которое влечет равенство

$$\begin{aligned} m_{2k}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}) &= \left[e^{-\frac{1}{2}(\mathrm{B}y,\ y)}\right]_{y=0}^{(2k)}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}) = \\ &= \frac{1}{k!2^k}[(\mathrm{B}y,\ y)^k]^{(2k)}(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{2k}) = \\ &= \frac{1}{k!2^k} \sum_{(i_1,\ \ldots,\ i_{2k})} (\mathrm{B}\varphi_{i_1},\ \varphi_{i_2})\ldots(\mathrm{B}\varphi_{i_{2k-1}},\ \varphi_{i_{2k}}), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где сумма берется по всем перестановкам последовательности индексов. В частности, $m_2(\varphi_1,\ \varphi_2) = (\mathrm{B}\varphi_1,\ \varphi_2)$,

$$\begin{aligned} &m_4(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4) = \\ &= (\mathrm{B}\varphi_1,\varphi_2)(\mathrm{B}\varphi_3,\ \varphi_4) + (\mathrm{B}\varphi_1,\ \varphi_3)(\mathrm{B}\varphi_2,\ \varphi_4) + (\mathrm{B}\varphi_1,\varphi_4)(\mathrm{B}\varphi_2,\ \varphi_3). \end{aligned}$$

Как следствие, получим полезные формулы:

$$\int_{R^n} (Ax, x)\,\mu_B(dx) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \int_{R^n} x_j x_k \mu_B(dx) =$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} b_{jk} = \mathrm{Tr}\,AB, \qquad (1.4)$$

$$\int_{R^n} (Ax, x)^2 \mu_B(dx) = \sum_{j,k,j_1,k_1=1}^{n} a_{jk} a_{j_1k_1} \int_{R^n} x_j x_k x_{j_1} x_{k_1} \mu_B(dx) =$$
$$= \sum_{j,k,j_1,k_1} a_{jk} a_{j_1k_1} (b_{jk} b_{j_1k_1} + b_{jj_1} b_{kk_1} + b_{jk_1} b_{k_1j}) =$$
$$= (\mathrm{Tr}\,AB)^2 + 2\,\mathrm{Tr}\,(AB)^2. \qquad \mathbf{(1.5)}$$

Из этих формул легко выводятся следующие оценки.

Лемма 1.1. *Пусть* A>0. *Тогда*

$$\mu_B\{x:\ (Ax, x) \geqslant 1\} \leqslant \mathrm{Tr}\,AB$$

и

$$\mu_B\left\{x:\ |(Ax, x) - \mathrm{Tr}\,AB| < c\sqrt{\mathrm{Tr}\,AB}\right\} \geqslant 1 - \frac{2}{c^2}\|AB\|.$$

Доказательство. Пользуясь известным неравенством Чебышева, получаем

$$\mu_B\{x:\ (Ax, x) \geqslant 1\} =$$
$$= \int_{\{(Ax, x) \geqslant 1\}} \mu_B(dx) \leqslant \int_{R^n} (Ax, x)\,\mu_B(dx) = \mathrm{Tr}\,AB,$$

и, аналогично,

$$\mu_B\left\{x:\ |(Ax, x) - \mathrm{Tr}\,AB| \geqslant c\sqrt{\mathrm{Tr}\,AB}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \int_{R^n} \frac{[(Ax, x) - \mathrm{Tr}\,AB]^2}{c^2\,\mathrm{Tr}\,AB} \mu_B(dx) = \frac{2}{c^2} \frac{\mathrm{Tr}\,(AB)^2}{\mathrm{Tr}\,AB} \leqslant \frac{2}{c^2}\|AB\|.$$

Вычислим еще интегралы от некоторых функций экспоненциального характера. Используя замену $(x, y) = \theta$, переводящую меру μ_B в меру μ^y_B на прямой, получаем формулу

$$\int_{R^n} e^{(x, y)} \mu_B(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta} \mu_B^y(d\theta) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(By, y)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta - \frac{\theta^2}{2(By, y)}}\, d\theta = e^{\frac{1}{2}(By, y)}. \qquad (1.6)$$

Несколько сложнее вычисляется интеграл от квадратичной экспоненты.

Предложение 1.1. *Пусть оператор* A *подчиняется оценке* $2(Ax, x) < (B^{-1}x, x)\quad (x \in R^n)$ *(или, что то же самое,* $2B^{1/2}AB^{1/2} < I$*). Тогда*

$$\int_{R^n} e^{(Ax,\,x)}\mu_B(dx) = \{\det(I - 2B^{1/2}AB^{1/2})\}^{-1/2} =$$

$$= \{\det(I - 2AB)\}^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Доказательство. При помощи замены $x = B^{1/2}y$ получаем

$$\int_{R^n} e^{(Ax,\,x)}\mu_B(dx) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{(B^{1/2}AB^{1/2}y,\,y)-\frac{1}{2}\|y\|^2}dy.$$

Пусть $B^{1/2}AB^{1/2} = S\Lambda S^*$, где Λ —диагональная, S — ортогональная матрицы. Проводя дальнейшую замену $y = Sz$, приведем последний интеграл к виду (заметим, что собственные числа λ_k матрицы Λ при рассматриваемых условиях подчиняются соотношению $\lambda_k < 1/2$)

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{(\Lambda z,\,z)-\frac{1}{2}\|z\|^2}dz = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\lambda_k-\frac{1}{2}\right)z_k^2}dz_k =$$

$$= \left\{\prod_{k=1}^{\infty}(1-2\lambda_k)\right\}^{-1/2} = \{\det(I - 2A^{1/2}BA^{1/2})\}^{-1/2}.$$

3°. Интегрирование по частям. Здесь будут выведены некоторые полезные формулы для интегралов по гауссовой мере, которые мы будем условно называть формулами интегрирования по частям.
Пусть *u (x)* — дифференцируемая функция в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Введем обозначения для ее градиента (вектора, составленного из первых производных)

$$u'(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

и гессиана (матрицы, составленной из вторых производных)

$$u''(x) = \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right\|_{k,\,j=1}^{n}.$$

Предложение 1.2. *Пусть u(x) —дифференцируемая функция в* R^n, *удовлетворяющая условиям*

$$\int_{R^n} |u(x)|^2 \mu_B(dx) < \infty, \quad \int_{R^n} |u'(x)|^2 \mu_B(dx) < \infty.$$

Тогда справедлива формула

$$\int_{R^n} u(x)(x,\,\psi)\mu_B(dx) = \int_{R^n}(u'(x),\,B\psi)\mu_B(dx) \quad (\psi \in R^n). \quad (1.8)$$

Доказательство. Каждую функцию *u(x),* удовлетворяющую рассматриваемым условиям, можно аппроксимировать в среднем квадратичном по мере μ_B вместе с производной $(u'(x),\ B\psi)$ по фиксированному направлению $B\psi$ многочленами. При этом, как легко видеть, в формуле (1.8) можно сделать предельный переход, и поэтому ее достаточно проверить для многочленов, а в силу линейности —даже для одночленов вида $u(x) = (x, \varphi_1) \times (x, \varphi_2) \dots (x, \varphi_s)$. Для таких функций левая и правая части (1.8) —симметричные относительно φ_k $(k=1, 2, \dots, s)$ функционалы, а потому равенство достаточно проверить для $\varphi_1 = \dots = \varphi_s = \varphi$ при s = 2*p* — 1 (при четном s обе его части, как легко видеть, равны нулю). Для этого случая из (1.3) следует, что

$$\int_{R^n} u(x)(x, \psi)\mu_B(dx) = \int_{R^n} (x, \varphi)^{2p-1}(x, \psi)\mu_B(dx) =$$
$$= \frac{(2p)!}{p!2^p}(B\varphi, \varphi)^{p-1}(B\psi, \psi)$$

и

$$\int_{R^n} (u'(x), B\psi)\mu_B(dx) = (2p-1)\int_{R^n} (x, \varphi)^{2p-2}\mu_B(dx)(B\psi, \psi) =$$
$$= \frac{(2p-1)!}{(p-1)!\,2^{p-1}}(B\varphi, \varphi)^{p-1}(B\psi, \psi).$$

Следствие 1.1. *Если v(x) также дифференцируема и*

$$\int_{R^n} |u(x)v(x)|^2\mu_B(dx) < \infty,$$
$$\int_{R^n} \{|u(x)|^2|v'(x)|^2 + |v(x)|^2|u'(x)|^2\}\mu_B(dx) < \infty,$$

то, применяя (1.8) *к произведению u(x)v(x), получаем формулу*

$$\int_{R^n} \{u(x)(x, \varphi) - (u'(x), B\varphi)\}v(x)\mu_B(dx) =$$
$$= \int_{R^n} u(x)(v'(x), B\varphi)\mu_B(dx). \qquad (1.9)$$

Предложение 1.3. *Если u(x) и v (x) удовлетворяют условиям предложения* 1.2, *то справедлива формула*

$$\int_{R^n} [u(x)(x, \varphi) - (u'(x), B\varphi)]\times$$
$$\times[v(x)(x, \psi) - (v'(x), B\psi)]\mu_B(dx) =$$
$$= (B\varphi, \psi)\int_{R^n} u(x)v(x)\mu_B(dx) +$$
$$+ \int_{R^n} (u'(x), B\psi)(v'(x), B\varphi)\mu_B(dx). \qquad (1.10)$$

Доказательство. Пусть сначала *v(x)* дважды дифференцируема и ограничена вместе с производными. Из (1.9) и (1.8) следует

$$\int_{R^n} [u(x)(x,\ \varphi) - (u'(x),\ B\varphi)]\, v(x)(x,\ \psi)\,\mu_B(dx) =$$

$$= \int_{R^n} u(x)\{(v'(x),\ B\varphi)(x,\ \psi) + v(x)(\psi,\ B\varphi)\}\,\mu_B(dx) =$$

$$= \int_{R^n} \{u(x)\,v(x)(B\varphi,\ \psi) + (u'(x),\ B\psi)(v'(x),\ B\varphi) +$$

$$+ u(x)(v''(x)\,B\varphi,\ B\psi)\}\,\mu_B(dx)$$

и очно так же

$$\int_{R^n} [u(x)(x,\ \varphi) - (u'(x),\ B\varphi)](v'(x),\ B\psi)\,\mu_B(dx) =$$

$$= \int_{R^n} u(x)(v''(x)\,B\varphi,\ B\psi)\,\mu_B(dx).$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем (1.10). В частности, при $u = v$ и $\varphi = \psi$ имеем

$$\int_{R^n} \{u(x)(x,\ \varphi) - (u'(x),\ B\varphi)\}^2\,\mu_B(dx) =$$

$$= (B\varphi,\ \varphi)\int_{R^n} u^2(x)\,\mu_B(dx) + \int_{R^n} (u'(x),\ B\varphi)^2\,\mu_B(dx). \quad (1.11)$$

Аппроксимируя в среднем квадратичном функцию *u (x),* удовлетворяющую условиям предложения, гладкими ограниченными функциями и переходя к пределу, получим для нее оценку

$$\int_{R^n} [u(x)(x,\ \varphi) - (u'(x),\ B\varphi)]^2\,\mu_B(dx) < \infty$$

и квадратичное соотношение (1.11), а вместе с ним и соответствующую билинейную формулу (1.10).

Следствие 1.2. *Пусть u(x), v(x) — векторные функции со значениями в* R^n, *h (x) — скалярная функция, удовлетворяющие условиям предложения* 1.2. *Тогда имеют место равенства:*

$$\int_{R^n} (u(x),\ x)\,\mu_B(dx) = \int_{R^n} \mathrm{Tr}\,[u'(x)\,B]\,\mu_B(dx), \quad (1.12)$$

$$\int [(u(x),\ x) - \mathrm{Tr}\,u'(x)\,B]\,h(x)\,\mu_B(dx) = \\ = \int_{R^n} (u(x),\ Bh'(x))\,\mu_B(dx), \quad (1.13)$$

$$\int_{R^n} [(u(x),\ x) - \mathrm{Tr}\,u'(x)\,B]\,[(v(x),\ x) - \mathrm{Tr}\,v'(x)\,B]\,\mu_B(dx) = \\ = \int_{R^n} (Bu(x),\ v(x))\,\mu_B(dx) + \\ + \int_{R^n} \mathrm{Tr}\,[v'(x)\,Bu'(x)\,B]\,\mu_B(dx). \quad \mathbf{(1.4)}$$

Доказательство каждого из этих равенств основано на переходе к координатным представлениям и соответствующих равенствах для скалярных функций. Достаточно записать соотношения

$$(u(x),\ x) = \sum_k (u(x),\ \varphi_k)(\varphi_k,\ x);$$

$$(v(x),\ x) = \sum_k (v(x),\ \varphi_k)(\varphi_k,\ x)$$

и заметить, что для функции $u_k(x) = (u(x),\ \varphi_k)$ справедливо $(u_k(x),\ B\varphi) = (u'(x)\,B\varphi,\ \varphi_k)$.

4°. Решение задачи Коши. Гауссова мера μ_B тесно связана с параболическим дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j,\ k=1}^{n} b_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \quad (x \in R^n,\ t \geq 0). \quad (1.15)$$

Рассмотрим задачу Коши для него с условием $u(x,\ 0) = u_0(x)$. Для преобразования Фурье $v(\omega,\ t) = \int_{R^n} e^{i(\omega,\ x)} u(x,\ t)\,dx$ из (1.15)

следует соотношение $v'(\omega,\ t) = -\frac{1}{2}(B\omega,\ \omega)\,v(\omega,\ t)$, которое влечет

$$v(\omega,\ t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(B\omega,\ \omega)\,t\right\} v_0(\omega)$$

Применяя теорему о свертке и используя тот факт, что $e^{-\frac{t}{2}(B\omega,\ \omega)}$ есть характеристический функционал гауссовой меры μ_{Bt} с корреляционным оператором Bt, получаем выражение для решения задачи (1.15) в виде интеграла по гауссовой мере от начальной функции

$$u(x,\ t) = \int_{R^n} u_0(x - y)\,\mu_{Bt}(dy). \quad (1.16)$$

Нетрудно проверить, что этот результат справедлив и для достаточно быстро растущих функций $u_o(x)$ (лишь бы существовал интеграл **(1.16)** и интегралы, получаемые из него дифференцированием по параметру x до второго порядка включительно).

2. 2. Гауссовы меры в гильбертовом пространстве

1°. Условие σ-аддитивности гауссовой цилиндрической меры. Всюду в этой главе X — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $\mathfrak{A}$— борелевская σ-алгебра в нем, $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}$—алгебра цилиндрических множеств, порождаемая некоторой системой конечномерных ортопроекторов, описанной в 1.2.2, так что $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{A}^{\mathscr{P}})$ — минимальная σ -алгебра, содержащая $\mathfrak{A}^{\mathscr{P}}$. При этом $X = \bar{X}_{\mathscr{P}}$, где

$$X_{\mathscr{P}} = \bigcup_{P \in \mathscr{P}} X_P \quad (X_P = PX).$$

Цилиндрическаямера μ на X называется *гауссовой,* если гауссовой является каждая ее конечномерная (каждая одномерная) проекция. Напомним, что цилиндрическая мера μ определяется своим характеристическим функционалом χ_μ, который является общим продолжением согласованной системы $\{\chi^{(P)}\}$ характеристических функционалов проекций μ^P. Мы будем сейчас рассматривать центрированную цилиндрическую меру μ, т. е. такую, у которой все проекции μ^P центрированы:

$$\int_{X_P} (x, \varphi)\mu^P(dx) = 0 \quad (\varphi \in X_P, \ P \in \mathscr{P}).$$

Из формулы (1.2) следует, что ее характеристический функционал имеет вид

$$\chi_\mu(y) = e^{-\frac{1}{2} b(y, y)}, \tag{2.1}$$

где $b(y_1, y_2)$— неотрицательный билинейный функционал на линейном множестве X_P, непрерывный вдоль каждого конечномерного подпространства $X_P (P \in \mathscr{P})$. Этот функционал называют *корреляционным.*

Если $b(y_1, y_2) = (By_1, y_2)$, где B —положительный, определенный на X_P оператор (возможно, неограниченный), то B называют *корреляционным оператором* цилиндрической меры μ (при этом мы будем часто обозначать $\mu = \mu_B$). Отметим, что корреляционный оператор B_P конечномерной проекции μ^P имеет вид $B_p = PBP$.

Наоборот, если $b(y_1, y_2)$ —неотрицательный билинейный функционал на плотном в *X* множестве $\mathscr{D}$, можно построить цилиндрическую гауссову меру μ, приняв (2.1) за ее характеристический функционал, причем $\mathscr{P}$ — совокупность ортопроекторов на конечномерные подпространства, лежащие в $\mathscr{D}$.

Теорема 2.1. *Для того чтобы центрированная гауссова цилиндрическая мера* μ *была* σ*-аддитивной в X, необходимо и достаточно, чтобы ее корреляционный функционал имел вид* $b(y_1, y_2) = (\mathrm{B}y_1, y_2)$, *где B — неотрицательный ядерный оператор в X.*

Доказательство. Пусть мера μ σ-аддитивна. Тогда ее характеристический функционал непрерывен в X, вместе с ним непрерывен и корреляционный функционал и, следовательно, $b(y, y) = (\mathrm{B}y, y)$ $(\mathrm{B} \in \mathscr{L}(X))$. Покажем, что ограниченный оператор B ядерен. Допуская противное, можно будет найти конечномерный ортопроектор P со сколь угодно большим TrPBP = *R*. Рассмотрим цилиндрическое множество $Ц(\mathrm{P}, \mathscr{M})$, где $\mathscr{M} = \{x \in X_{\mathrm{P}}: |\|x\|^2 - R| < \alpha\sqrt{R}\}$ лежит вне шара радиуса $R - \alpha\sqrt{R}$. Из леммы 1.1 следует оценка снизу

$$\mu(Ц(\mathrm{P}, \mathscr{M})) \geq 1 - \frac{2\|B\|}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \quad \text{при } \alpha = 2\sqrt{\|B\|}.$$

Таким образом, в *X* существуют шары с центром в нуле сколь угодно большого радиуса $R - \alpha\sqrt{R}$, имеющие меру, меньшую 1/2, что невозможно в силу непрерывности μ, поскольку μ (X)=1. Это доказывает необходимость условия теоремы.
Достаточность следует из леммы 1.1 и предложения 1.1.3. Действительно, для любого цилиндрического множества $Ц(\mathrm{P}, \mathscr{M})$, лежащего вне шара радиуса *R* (компактного в слабой топологии), основание $\mathscr{M}$ лежит вне такого же шара в X_P, и потому величина

$$\mu(Ц(\mathrm{P}, \mathscr{M})) = \mu^{\mathrm{P}}(\mathscr{M}) \leq \frac{\mathrm{Tr\,PBP}}{R^2} \leq \frac{\mathrm{Tr\,B}}{R^2}$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом *R*.

2°. Некоторые преобразования гауссовых мер в *X*.

а) Сдвиг $x \to x + a$. При таком преобразовании цилиндрическая мера μ переходит в цилиндрическую меру $\mu^{(a)}$ с характеристическим функционалом

$$\chi_{\mu^{(a)}}(y) = e^{-\frac{1}{2}b(y, y) + i(a, y)}. \quad \textbf{(2.2)}$$

Наоборот, мера с характеристическим функционалом (2.2) может быть получена из центрированной при помощи сдвига на элемент $a \in X$, который называют *средним значением меры* $\mu^{(a)}$.

Очевидно, что цилиндрические меры μ и $\mu^{(a)}$ одновременно обладают или не обладают свойством σ-аддитивности.

б) Линейное преобразование $x \to Sx$. Характеристический функционал при этом преобразуется по закону (см. (1.3.8))

$$\chi_{\mu^S}(y) = \chi_\mu(S^*y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(SBS^*y,\ y)\right\}$$

и, следовательно, преобразованная цилиндрическая мера μ^S снова является гауссовой. Она σ-аддитивна, если оператор SBS* ядерен в пространстве *SX*.

в) Произведение мер. Пусть μ_1, μ_2— цилиндрические гауссовы меры в гильбертовых пространствах X_1, X_2 соответственно. Произведение $\mu_1 \times \mu_2$ в пространстве $X_1 \times X_2$ представляет собою снова гауссову цилиндрическую меру с характеристическим функционалом

$$e^{-\frac{1}{2}[b_1(y_1, y) + b_2(y, y)]}.$$

Наоборот, пусть $X = X_P \oplus X_Q$ — разложение на ортогональные подпространства X_P, X_Q и P, $Q = I - P$—соответствующие ортопроекторы. Если Р коммутирует с В, ВР=РВ, то, очевидно,

$$(By,\ y) = (B_P y_P,\ y_P) + (B_Q y_Q,\ y_Q)$$

и, следовательно, цилиндрическая гауссова мера μ_B расщепляется в произведение

$$\mu_B = \mu_{B_P} \times \mu_{B_Q} \qquad \textbf{(2.3)}$$

гауссовых цилиндрических мер $\mu_{B_P} = \mu_B^P$, $\mu_{B_Q} = \mu_B^Q$ в пространствах X_P, X_Q.

г) Свертка мер. Так как при свертывании цилиндрических мер их характеристические функционалы перемножаются (1.3.13), то свертка гауссовых цилиндрических мер $\mu_{B_1}^{(a_1)}$ и $\mu_{B_2}^{(a_2)}$ снова является гауссовой с корреляционным оператором B_1+B_2 и средним $a_1 + a_2$.

3°. Вычисление интегралов. Вычислим некоторые интегралы по центрированной гауссовой мере μ с ядерным корреляционным оператором В в гильбертовом пространстве X.

Простейшие примеры получаются при рассмотрении функций от конечного числа линейных функционалов

$$f(x) = F((x,\ \varphi_1),\ \ldots,\ (x,\ \varphi_n)),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X$ — ортонормированная система, а $F(t_1, \ldots, t_n)$ — измеримая функция в $\mathbb{R}^n$. Такая функция *f(x)* цилиндрична и потому

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_{R^n} F(t_1, \ldots, t_n)\,\mu^{(y_1, \ldots, y_n)}(dt);$$

где $\mu^{(y_1, \ldots, y_n)}$ —мера в R^n, получающаяся из μ при отображениях $x \to (y_1, \ldots, y_n)$, $y_k = (x, \varphi_k)$, имеющая характеристический функционал

$$\chi^{(y_1, \ldots, y_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \chi_\mu\left(\sum_{k=1}^n t_k\varphi_k\right) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^n t_k t_j (B\varphi_k, \varphi_j)\right\}.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\int_X F((x, \varphi_1), \ldots, (x, \varphi_n))\,\mu_B(dx) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det\beta}}\int_{R^n} F(t_1, \ldots, t_n)\,e^{-\frac{1}{2}(\beta^{-1}t,\, t)}\,dt, \qquad \textbf{(2.4)}$$

где через β обозначена матрица $\beta = \|(B\varphi_k, \varphi_j)\|_{j,\,k=1}^n$.

В частности, в качестве φ_k часто будут использоваться собственные векторы e_k оператора В. В этом случае матрица $\beta = \|\lambda_k\delta_{jk}\|_{j,\,k=1}^n$ диагональна и вычисления упрощаются.

В качестве примера, так же как и в конечномерном случае, получаем формулу

$$\int_X e^{(\varphi,\, x)}\mu_B(dx) = e^{\frac{1}{2}(B\varphi,\, \varphi)}. \qquad (2.5)$$

Отметим, что в проведенных выше рассуждениях ядерность оператора В не играла роли и они справедливы для гауссовых квазимер.

При вычислении интегралов от нецилиндрических функционалов удобно использовать пример 1.3.3. Рассмотрим несколько примеров.

а) Пусть $f(x) = \|x\|^2$. Обозначим через P_n ортопроектор на линейную оболочку $\mathcal{L}_n =$ л. о. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ первых n собственных векторов оператора В. Тогда из (1.4)

$$\int_X \|P_n x\|^2\,\mu(dx) = \int_{R^n}\|x\|^2\,\mu_{P_n B P_n}(dx) = \operatorname{Tr} P_n B P_n.$$

Так как последовательность $\|P_n x\|$ стремится к $\|x\|$ монотонно, то

$$\int_X \|x\|^2\,\mu_B(dx) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{Tr} P_n B P_n = \operatorname{Tr} B < \infty.$$

Таким образом, σ-аддитивная гауссова мера μ в гильбертовом пространстве X имеет конечный второй момент. Теперь уже можно заключить, что для любого ограниченного оператора А функция *(Ax, x)* интегрируема, и таким же образом вывести формулу

$$\int_X (Ax, x)\,\mu_B(dx) = \mathrm{Tr}\,AB. \qquad \textbf{(2.6)}$$

Аналогичным образом показывается конечность моментов более высокого порядка и выводятся формулы для них, например,

$$\int_X (Ax, x)^2\,\mu_B(dx) = [\mathrm{Tr}\,AB]^2 + 2\,\mathrm{Tr}\,(AB)^2. \qquad \textbf{(2.7)}$$

Замечание 2.1. Из формул (2.6) и (2.7) следует, что утверждение леммы 1.1 без изменений переносится на бесконечномерное пространство X.

б) Рассмотрим теперь функцию $f(x) = e^{(Ax,\,x)}$, где А — ограниченный оператор в X, удовлетворяющий условию

$$A \leqslant \alpha I \qquad (2\alpha B < I). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Пусть сначала $A = \alpha I$. Тогда $\exp\{\alpha\|P_n x\|^2\} \to \exp\{\alpha\|x\|^2\}$ монотонно, и можно, используя формулу (1.7), записать

$$\int_X e^{\alpha\|x\|^2}\mu_B(dx) = \lim_{n\to\infty}[\det(I - 2\alpha BP_n)]^{-1/2}.$$

Из ядерности оператора В следует сходимость произведения

$$\det(I - 2\alpha B) = \lim_{n\to\infty}(I - 2\alpha BP_n) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - 2\alpha\lambda_k)$$

и, таким образом,

$$\int_X e^{\alpha\|x\|^2}\mu_B(dx) = [\det(I - 2\alpha B)]^{-1/2}.$$

В частности, функция $e^{\alpha\|x\|^2}$ интегрируема, а вместе с ней при условии (2.8) интегрируема функция $e^{(Ax,\,x)}$, причем $e^{(Ax,\,x)} \leqslant e^{\alpha\|x\|^2}$. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла при $P \to I$ в (1.7), в результате которого получается формула

$$\int_X e^{(Ax,\,x)}\mu_B(dx) = [\det(I - 2B^{1/2}AB^{1/2})]^{-1/2}. \qquad (2.9)$$

в) Пусть $(Ax, x) \geqslant 0$, $a > 0$. Подставляя в (2.9) —λA вместо А и интегрируя почленно полученное равенство, предварительно умноженное на $e^{-\lambda a}$, получаем формулу

$$\int_X \frac{e^{-\lambda_0(Ax,\,x)}}{a + (Ax,\,x)}\,\mu(dx) = \int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda a}d\lambda}{\sqrt{\det(I + 2\lambda B^{1/2}AB^{1/2})}}, \quad \lambda_0 \geqslant 0. \qquad (2.10)$$

4°. Гауссова цилиндрчиеская мера с произвольным корреляционным оператором. Пусть $\mu = \mu_B$ — центрированная цилиндрическая гауссова мера в X с корреляционным оператором B, который уже не предполагается ядерным. Рассмотрим линейное отображение $S: X \to X_1$, где X_1— также гильбертово пространство. В X_1 индуцируется цилиндрическая мера μ^s с характеристическим функционалом

$$\chi_{\mu^s}(y) = \chi_\mu(S^*y) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(BS^*y,\ S^*y)_X\right\} = \\ = \exp\left\{-\frac{1}{2}(SBS^*y,\ y)_{X_1}\right\}.$$

Ее корреляционный оператор $B_S = SBS^*$ может оказаться уже ядерным в X_1 и, следовательно, цилиндрическая мера μ^s— σ-аддитивной (оператор S при этом называется *радонифицирующим* для μ).

Рассмотрим, в частности, случай, когда S плотно вкладывает X в X_1. Сужение скалярного произведения $(\bullet, \bullet)_{X1}$, на X непрерывно и потому

$$(Sx,\ Sy)_{X_1} = (Tx,\ Ty)_X \qquad (2.11)$$

где T — ограниченный оператор в X. Из (2.11) следует, что TS^{-1} действует из $SX \subset X_1$ в X изометрично и потому имеет непрерывное продолжение $\tilde{T}$ $(\tilde{T}S = T)$ на $X_1 = \bar{S}X$ со значениями в X, для которого $(\tilde{T}x_1,\ \tilde{T}y_1)_X = (x_1,\ y_1)_{X_1}$, и, следовательно,

$(Sx,\ y_1)_{X_1} = (Tx,\ \tilde{T}y_1)_X = (x,\ T^*\tilde{T}y_1)_X$, т. е. $S^* = T^*\tilde{T}$.

Корреляционный оператор при этом имеет вид $B_S = SBT^*T\ (B_S|_{SX} \cdot S = BT^*T)$—этот оператор неотрицателен в скалярном произведении $(\cdot,\ \cdot)_{X_1}$.

Предложение 2.1. *Пусть* $\mu = \mu_B$ — *цилиндрическая гауссова мера в гильбертовом пространстве X. В X всегда можно ввести скалярное произведение* $(x,\ y)_1 = (Tx,\ Ty)$ *так, что в его пополнении* X_1 *по норме* $\|x\|_1^2 = (x,\ x)$ *мера* μ *σ-аддитивна.*

Доказательство. Оператор T можно выбрать так, чтобы оператор TBT^* был ядерным в X. При этом B_S оказывается ядерным в X_1, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}(SBT^*\tilde{T}e_k,\ e_k)_{X_1} = \sum_{k=1}^{\infty}(TBT^*f_k,\ f_k) < \infty$$

для некоторого ортобазиса $\{e_k\}$ в X_x и $f_k = \tilde{T}e_k$. Остается воспользоваться теоремой 2.1.

Следствие 2.1. *Пусть* B *овраничен в X и* T — *невырожденный оператор Гильберта — Шмидта. Тогда* μ_B *имеет σ-аддшипивное продолжение в пространстве* X_1, *получающемся путем пополнения X по норме* $\|x\|_1 = \|Tx\|$. *В этом случае и оператор вложения* $S: X \to X_1$ *есть оператор Гильберта — Шмидта:*

$$\sigma^2(\mathrm{S}) = \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathrm{S}f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{T}f_k|^2 = \sigma^2(\mathrm{T}) < \infty.$$

В частности, сказанное справедливо для цилиндрической меры μ_I *с тождественным в X корреляционным оператором.*

Пример 2.1. Пусть X $= l_2$, — пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $|x|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$. Цилиндрическая гауссова мера μ_I определяется на цилиндрических множествах

$$Ц(\mathrm{P}_{k_1, \ldots, k_n}, \mathcal{M}) = \{x: (x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) \in \mathcal{M}\}$$

формулой

$$\mu_I(Ц(\mathrm{P}_{k_1 \ldots k_n}, \mathcal{M})) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathcal{M}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} |x_{k_j}|^2\right\} \prod_{j=1}^{n} dx_{k_j}.$$

Эта мера σ-аддитивна в пространстве X_1 последовательностей с нормой $\|x\|_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 |x_k|^2$, где $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$.

Гауссову меру μ_I, σ-аддитивную в расширении X_1 пространства *X* с оператором вложения S: $\sigma_2(\mathrm{S}) < \infty$ *(квази ядерном вложении),* назовем *канонической.*

Предложение 2.2. *Каждая центрированная гауссова мера* μ *в гильбертовом пространстве X может быть представлена как каноническая.*

Докавательство. Пусть $\mu = \mu_B$. Без ограничения общности можно считать корреляционный оператор B невырожденным (иначе мы перешли бы к подпространству пространства *X,* в котором это свойство выполняется). Превратим область определения неограниченного оператора $\mathrm{B}^{-1/2}$ в полное гильбертово пространство введя $\mathcal{H}_0$, в нем скалярное произведение $(x, y)_0 = (\mathrm{B}^{-1/2}x, \mathrm{B}^{-1/2}y)$, и пусть S — оператор вложения $\mathcal{H}_0$ в *X*. Если $\{e_k\}$—ортобазис в $\mathcal{H}_0$, составленный из собственных векторов оператора B: $\mathrm{B}e_k = \lambda_k^2 e_k$, то

$$\sum_k |\mathrm{S}e_k|^2 = \sum_k |\mathrm{B}^{-1/2}\mathrm{B}^{1/2}e_k|^2 =$$

$$= \sum \|\mathrm{B}^{1/2}e_k\|_0^2 = \sum_k \lambda_k^2 < \infty.$$

Роль оператора T играет оператор $\mathrm{B}^{1/2}$. Нетрудно проверить, что цилиндрическая мера μ в $\mathcal{H}_0$ имеет тождественный корреляционный оператор. Действительно,

$$\int_{\mathcal{H}_0} (x, \varphi)_0 (x, \psi)_0 \mu(dx) = \int_X (x, B^{-1}\varphi)(x, B^{-1}\psi)\mu(dx) =$$

$$= (BB^{-1}\varphi, B^{-1}\psi) = (B^{-1/2}\varphi, B^{-1/2}\psi) = (\varphi, \psi)_0.$$

Ниже мы будем часто использовать указанное в предложении 2.2 описание гауссовой меры, обозначая $X = \mathcal{H}_-$. Вводя при этом на множестве $B^{-1}X$ структуру гильбертова пространства $\mathcal{H}_+$ при помощи скалярного произведения $(x, y)_+ = (B^{-1}x, B^{-1}y) = (T^{-1}x, T^{-1}y)_0$, мы получаем оснащенное гильбертово пространство $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-$. В такой ситуации под характеристическим функционалом меры μ удобно понимать характеристический функционал порожденной ею цилиндрической меры μ_I в $\mathcal{H}_0$, который можно определить как интеграл

$$\chi(\theta) = \int_{\mathcal{H}_-} e^{i(x, \theta)_0}\mu(dx) = e^{-\frac{1}{2}\|\theta\|^2}$$

пока что лишь для $\theta \in \mathcal{H}_+$. По непрерывности он распространяется на все $\mathcal{H}_0$.

Замечание 2.2. Рассуждения, проведенные при доказательстве формулы (2.3), применимы для любого ортогонального в $\mathcal{H}_0$ проектора P со значениями в $\mathcal{H}_+$. Поэтому для любого такого проектора справедливо разложение

$$\mu = \mu_P \times \mu_{I-P}, \tag{2.12}$$

где μ_{I-P} —каноническая гауссова мера в оснащенном пространстве

$$\mathcal{H}_+ \cap (\mathcal{H}_0 \ominus P\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0 \ominus P\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_-^{(P)} =$$

$$= \{x \in \mathcal{H}_-: Px = 0\}.$$

2.3. Измеримые линейные функционалы и операторы

1°. Измеримые линейные функционалы. В этом параграфе будут определены и изучены измеримые линейные функционалы в гильбертовом пространстве X с гауссовой мерой μ. Без ограничения общности можно считать эту меру канонической $\mu = \mu_I$ в оснащенном гильбертовом пространстве $X = \mathcal{H}_- \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_+$ с квазиядерным вложением $S: \sigma_2(S) < \infty$. Пусть $\mathcal{P}$ —совокупность ортогональных в $\mathcal{H}_0$ конечномерных проекторов, для которых $\mathcal{H}_P = P\mathcal{H}_- \subset \mathcal{H}_+$.

Предложение 3.1. *Каждую* μ*-интегрируемую функцию f (x) можно с любой точностью аппроксимировать в среднем цилиндрическими функциями вида*

$$f_P(x) = f_P(Px) = \int f(Px + (I - P)y)\,\mu_{I-P}(dy), \quad (3.1)$$

где μ_{I-P}*—мера из разложения* (2.12).

Доказательство. Рассмотрим разложение пространства $\mathscr{H}_- = \mathscr{H}_P \dot{+} \mathscr{H}_-^{(P)}$. Из теоремы Фубини следует, что функция (3.1) определена почти везде (mod μ_P) в $\mathscr{H}_P$ и $\int\limits_{\mathscr{H}_P} f_P(Px)\,\mu_P(dPx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)\,\mu(dx)$. Полагая $f_P(x) = f_P(Px)$, мы распространим ее на $\mathscr{H}_-$ как цилиндрическую, причем

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} f_P(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{H}_P} f_P(Px)\,\mu_P(dPx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)\,\mu(dx). \quad \mathbf{(3.2)}$$

Отображение $f \to f_P$, очевидно, линейно. Из (3.2) следует, что на конусе неотрицательных функций в $\mathscr{L}_1(\mathscr{H}_-, \mu)$ оно изометрично. Разлагая произвольную функцию *f(x)* на разность неотрицательных $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, получаем из $f_P = (f^+)_P - (f^-)_P$ непрерывность этого отображения:

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |f_P(x)|\,\mu(dx) \leqslant \int\limits_{\mathscr{H}_-} \{(f^+)_P(x) + (f^-)_P(x)\}\,\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{H}_-} \{f^+(x) + f^-(x)\}\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} |f(x)|\,\mu(dx).$$

Для цилиндрической функции $g(x) = g(Px)$ имеем $g_P(x) = g(x)$ и потому

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |f(x) - f_P(x)|\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathscr{H}_-} |f(x) - g(x)|\,\mu(dx) + \int\limits_{\mathscr{H}_-} |g_P(x) - f_P(x)|\,\mu(dx) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{\mathscr{H}_-} |f(x) - g(x)|\,\mu(dx).$$

Остается заметить, что всегда существует цилиндрическая функция *g(x),* для которой правая часть достаточно мала.

Лемма 3.1. *Если измеримая функция f(x) инвариантна относительно сдвигов на элементы* $y \in \mathscr{H}_+$*:*

$$f(x + y) = f(x) \pmod{\mu} \qquad (y \in \mathscr{H}_+), \quad (3.3)$$

то она почти везде совпадает с постоянной:

$$f(x) \equiv \text{const} \pmod{\mu}. \quad (3.4)$$

Доказательство. Заменяя, в крайнем случае, $f(x)$ функцией $e^{if(x)}$, можно заранее считать ее ограниченной и, следовательно, интегрируемой по гауссовой мере μ. Из (3.1) следует, что свойство (3.3) переносится на $f_P(x)$.

Так как $\mathscr{K}_P \subset \mathscr{K}_+$, то для $f_P(x)$, очевидно, выполняется (3.4). Остается воспользоваться предложением 3.1.

Теорема 3.1. *Каждое измеримое линейное множество* $\mathscr{E} \subset \mathscr{K}_-$ *имеет меру* $\mu(\mathscr{E})$, *равную либо нулю, либо единице. При этом из* $\mu(\mathscr{E}) > 0$ *следует, что* $\mathscr{E} \supset \mathscr{K}_0$.

Доказательство. Пусть $\mu(\mathscr{E}) > 0$. Воспользуемся результатом следствия 4.1, согласно которому при этом $\mu(\mathscr{E} + \lambda x) > 0$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ при $x \in \mathscr{K}_0$ (доказательство этого результата не опирается на рассматриваемую теорему). При $x \bar{\in} \mathscr{E}$ мы получили бы континуум непересекающихся множеств $\mathscr{E}_\lambda = \mathscr{E} + \lambda x$ положительной меры, что невозможно. Поэтому $\mathscr{E} \supset \mathscr{K}_0$. Множество $\mathscr{E}$, а вместе с ним его индикатор $j_{\mathscr{E}}(x)$, инвариантны относительно сдвигов на элементы $\mathscr{K}_0$, и потому, в силу леммы 3.1, $j_{\mathscr{E}}(x) = \text{const} \pmod{\mu}$. Этой постоянной может быть только единица и, следовательно,

$$\mu(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{K}_-} j_{\mathscr{E}}(x)\,\mu(dx) = 1.$$

Определение 3.1. Измеримую функцию $f(x)$ в $\mathscr{K}_-$ назовем *измеримым линейным функционалом,* если она является пределом μ-почти везде сходящейся последовательности непрерывных линейных функционалов

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x, \varphi_n)_0 \pmod{\mu}, \qquad \varphi_n \in \mathscr{K}_+. \quad \textbf{(3.5)}$$

Теорема 3.2. *Каждый измеримый линейный функционал на* $\mathscr{K}_-$ *интегрируем в квадрате по мере* μ *и имеет непрерывное сужение на* $\mathscr{K}_0$ *и, наоборот, каждый непрерывный линейный функционал на* $\mathscr{K}_0$ *имеет измеримое линейное продолжение на* $\mathscr{K}_-$.

Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между пространством (классов mod μ) *измеримых линейных функционалов на* $\mathscr{K}_-$ *и пространством* $\mathscr{K}_0$: $f(x) \leftrightarrow f$, *изометрическое втом смысле, что*

$$\int_{\mathscr{K}_-} |f(x)|^2\,\mu(dx) = \|f\|_0^2.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n \in \mathscr{K}_+$ —последовательность элементов из (3.5) и $\mathscr{E}$ - линейное множество полной меры, на котором имеет место сходимость. По теореме 3.1 $\mathscr{E} \supset \mathscr{H}_0$ и, следовательно, φ_n слабо сходится в $\mathscr{H}_0$ к некоторому элементу $f \in \mathscr{H}_0$, так что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x, \varphi_n)_0 = (x, f)_0 \qquad (x \in \mathscr{H}_0).$$

Очевидно, что f однозначно определяется по $f(x)$. Из соотношения

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} \exp\{i(x, \varphi_n - \varphi_m)\}\,\mu(dx) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|\varphi_n - \varphi_m\|_0^2\right\}$$

следует, что последовательность φ_n сходится в $\mathscr{H}_0$ и сильно, а потому имеет место среднеквадратичная сходимость функционалов

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |(x, \varphi_n) - (x, \varphi_m)|^2\,\mu(dx) = \|\varphi_n - \varphi_m\|_0^2 \to 0 \qquad (3.6)$$

$$(n, m \to \infty).$$

Переходя в последней формуле к пределу при $m\to\infty$, получаем

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |(x, \varphi_n) - f(x)|^2\,\mu(dx) = \|\varphi_n - f\|^2 \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

и, следовательно,

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|^2 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathscr{H}_-} |(x, \varphi_n)|^2\,\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{H}_-} |f(x)|^2\,\mu(dx).$$

Наоборот, пусть $f \in \mathscr{H}_0$. Тогда существует последовательность элементов $\varphi_n \in \mathscr{H}_+$ такая, что $\|f - \varphi_n\|_0 \to 0.$

При этом последовательность непрерывных на $\mathscr{H}_-$ линейных функционалов (x, φ_n) сходится в среднем квадратичном. Выбирая из нее сходящуюся почти везде подпоследовательность φ_{n_k}, положим

$$f(x) = \lim_{k\to\infty}(x, \varphi_{n_k}) \quad (\mathrm{mod}\,\mu).$$

Повторяя для полученного измеримого линейного функционала проведенные выше рассуждения, приходим к формуле (3.6), показывающей, что $f(x)$ определяется однозначно (mod μ).

Замечание 3.1. Из теоремы следует, что каждый измеримый линейный функционал $f(x)$ определен на $\mathscr{H}_0$ и однозначно определяется своими значениями на этом пространстве. Ниже мы всегда будем отождествлять $f(x)$ с соответствующим элементом $f \in \mathscr{H}_0$ и применять обозначение

$$f(x) = (x, f)_0 \qquad (x \in \mathscr{H}_-, f \in \mathscr{H}_0)$$

даже и тогда, когда $x \overline{\in} \mathscr{H}_0$.

Замечание 3.2. Из доказательства теоремы следует, что отображение $x \to (x, f)_0$ приводит к гауссовой мере μ^f в $\mathbb{R}^1$ с характеристическим функционалом $\exp\left\{-\frac{1}{2}|f|_0^2\right\}$. Легко видеть, что имеет место соотношение

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} (x, f)_0 (x, g)_0 \mu(dx) = (f, g)_0.$$

Замечание 3.3. Полезно пересказать полученные результаты в терминах гильбертова пространства X с σ-аддитивной гауссовой мерой μ_B, имеющей невырожденный корреляционный оператор B. Множество непрерывных на X линейных функционалов отождествляется с $X: \varphi(x) = (x, \varphi)$, причем $\int\limits_X |(x, \varphi)|^2 \mu(dx) = (B\varphi, \varphi)$. Поэтому множество измеримых линейных функционалов, совпадающее с совокупностью квадратично интегрируемых, отождествляется с пространством X_B — пополнением X по норме

$$|x|_B^2 = |B^{1/2}x|^2 = (Bx, x).$$

2°. Измеримые линейные операторы. Для пары $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ банаховых пространств будем обозначать через $\mathscr{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ пространство ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{B}_2$, и в случае, когда $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ гильбертовы, через $\mathscr{L}_2(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ — подпространство $\mathscr{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$, состоящее из операторов Гильберта —Шмидта.

Определение 3.2. *Измеримым линейным оператором* на $\mathscr{H}_-$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ назовем μ-измеримую функцию A *(x)* на $\mathscr{H}_-$, являющуюся пределом почти везде сходящейся последовательности линейных непрерывных функций

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n x \pmod{\mu}, \quad A_n \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}). \quad \textbf{(3.7)}$$

Очевидно, что каждый непрерывный на $\mathscr{H}_-$ линейный оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H})$ порождает измеримый $\tilde{A}(x)$.
Его сужение $A_0 = AS$ на $\mathscr{H}_0$ является оператором Гильберта—Шмидта $(A_0 \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}))$, поскольку этим свойством обладает оператор вложения S.
С другой стороны, поскольку сходимость в (3.7) имеет место и в линейном множестве $\mathscr{E}_A$ положительной меры, содержащем $\mathscr{H}_0$, то однозначно определяется оператор

$$A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}): Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x \ (x \in \mathscr{H}_0).$$

Таким образяом, измеримый на $\mathscr{H}_-$ линейный оператор имеет непрерывное сужение на $\mathscr{H}_0$.

Отметим, что при $\varphi \in \mathscr{H}$ функция $(\tilde{A}(x), \varphi)_{\mathscr{H}}$ есть измеримый линейный функционал на $\mathscr{H}_-$, совпадающий на $\mathscr{H}_0$ с $(Ax, \varphi)_{\mathscr{H}} = (x, A^*\varphi)_0$. Поэтому справедлива формула

$$(\tilde{A}(x), \varphi)_{\mathscr{H}} = (x, A^*\varphi) \pmod{\mu}. \quad (3.8)$$

Теорема 3.3. *Каждый интегрируемый в квадрате измеримый линейный оператор* $\tilde{A}(x)$ *имеет непрерывное сужение* Ах *на* $\mathscr{H}_0$, *удовлетворяюще условию* $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$, *и, наоборот, каждый оператор* $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ *имеет измеримое линейное продолжение* А *(x) на* $\mathscr{H}_-$. *Получаемое при этом взаимно одноаначное соответствие между* $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ *и пространетвом линейных измеримых операторов изометрично:*

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |\tilde{A}(x)|^2 \mu(dx) = \sigma_2^2(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j |A\varphi_j|^2$$

($\{\varphi_j\}$ *—ортобаэис в* $\mathscr{H}_0$*).*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}$— ортобазис в $\mathscr{H}$.

Тогда, интегрируя почленно равенство

$$|\tilde{A}(x)|^2_{\mathscr{H}} = \sum_j |(\tilde{A}(x), \varphi_j)_{\mathscr{H}}|^2 = \sum_j |(x, A^*\varphi_j)_0|^2 \pmod{\mu},$$

получим, что $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$:

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} |\tilde{A}(x)|^2_{\mathscr{H}} \mu(dx) = \sum_j \int\limits_{\mathscr{H}_-} |(x, A^*\varphi_j)_0|^2 \mu(dx) = \sum_j |A^*\varphi_j|_0^2 = \sigma_2^2(A^*) = \sigma_2^2(A).$$

Наоборот, если $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$, то при $x \in \mathscr{H}_0$

$$Ax = \sum_k (Ax, \varphi_k)\varphi_k = \sum_k (x, A^*\varphi_k)\varphi_k.$$

Каждое слагаемое правой части продолжается измеримым образом на $\mathscr{H}_-$, а так как ряд сходится в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_-, \mu)$, то на $\mathscr{H}_-$ продолжается и его сумма. Из последовательности частных сумм этого ряда можно выбрать сходящуюся почти везде подпоследовательность, определяющую в силу (3.7) измеримый линейный оператор.

3°. Интегрирование по частям. Мы выяснили, что каждому оператору $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ соответствует измеримая функция $\tilde{A}x$ на $\mathscr{H}_-$, совпадающая с A_x на $\mathscr{H}_0$. Положение, однако, изменяется, если сам оператор $A = A_x$ зависит от *x*.

В этом случае выражение $\tilde{A}_x x$ может вообще не иметь смысла на множестве полной (и даже положительной) меры, так как область определения измеримого линейного оператора, порождаемого A_x, может не содержать элемента *x,* за исключением множества таких элементов, имеющего нулевую меру.

Ниже будет показано, что функцию $A_x x$, имеющую вполне определенный смысл при $A_x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H})$, можно «регуляризовать», придав полученному выражению смысл и в более общем случае.

Введем некоторые обозначения.

Если *f(x)* —определенная на $\mathscr{H}_-$ функция со значениями из гильбертова пространства $\mathscr{H}$, то под ее *производной (вдоль $\mathscr{H}_0$)* в точке $x \in \mathscr{H}_-$ будет пониматься оператор $f'(x) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$, удовлетворяющий условию

$$f(x_0+h)-f(x)=f'(x)h+o(\|h\|_0) \quad (h \in \mathscr{H}_0,\ x \in \mathscr{H}_-).$$

Обозначим через $C_{12}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H})$ пространство непрерывных и ограниченных вместе с первой производной функций на $\mathscr{H}_-$ со значениями в $\mathscr{H}$, для которых $f'(x) \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$, через $\mathfrak{H}_1(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}, \mu)$ —пространство, получающееся из $C_{12}(\mathscr{H}_-, \mathscr{H})$ путем пополнения по норме

$$|||f|||_1^2=\int\limits_{\mathscr{H}_-}\{\|f(x)\|_{\mathscr{H}}^2+\sigma_2^2(f'(x))\}\,\mu(dx).$$

Обозначим через $\mathscr{L}^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ банахово пространство *n*-линейных операторов, действующих из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{H}$, через $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ — его подпространство, состоящее из операторов Гильберта — Шмидта, т. е. операторов, имеющих конечную норму

$$\sigma_2^2(T)=\sum_{l_1,\ \dots,\ l_n=1}\|T(e_{l_1}, \dots, e_{l_n})\|_{\mathscr{H}}^2,$$

где $\{e_l\}_{l=1}^{\infty}$—какой-нибудь (любой) ортобазис в $\mathscr{H}$. Пространство $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(T, V)_n = \sum_{l_1,\ \dots,\ l_n=1}^{\infty}(T(e_{l_1}, \dots, e_{l_n}), V(e_{l_1}, \dots, e_{l_n}))_{\mathscr{H}}. \qquad (3.10)$$

Под следом билинейного оператора $A \in \mathscr{L}^2(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ будет пониматься принадлежащее пространству $\mathscr{H}$ векторное выражение

$$\mathrm{Tr}\,A=\sum_{k=1}^{\infty}A(e_k, e_k), \qquad (3.11)$$

если только ряд сходится абсолютно. Множество таких билинейных операторов обозначим $N(\mathscr{H}, \mathscr{H})$. Нетрудно проверить, что из

$T \in \mathscr{L}^2(\mathscr{H}, \mathscr{H}), A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ следует, что оператор TA: $TA(f, g) = T(Af, g)$ принадлежит $N(\mathscr{H}, \mathscr{H})$. В частности, $(f(x)A)' = N(\mathscr{H}, \mathscr{H})$, если $f \in C_{12}(\mathscr{H}_-, \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}))$.

Теорема 3.4. *Пусть* $A, B \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$; $f(x), g(x) \in \in \mathfrak{H}(\mathscr{H}_-, \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}))$. *Тогда справеаливы равенства*

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)(\tilde{A}x)\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} \operatorname{Tr}(f(x)A)'\mu(dx) \tag{3.12}$$

и

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} (f(x)\tilde{A}x - \operatorname{Tr}(f(x)A)', \ g(x)\tilde{B}x - \operatorname{Tr}(g(x)B)')_{\mathscr{H}}\mu(dx) = \\ = \int\limits_{\mathscr{H}_-} \{(f(x)A, g(x)B)_1 + ((f(x)A)', (g(x)B)')_2\}\mu(dx). \tag{3.13}$$

Доказательство этой теоремы будет проведено ниже после рассмотрения двух частных случаев, представляющих и самостоятельный интерес.

Первый из этих частных случаев получается при условиях

$$\mathscr{H} = \mathbb{R}^1, \ A(x) = (x, \varphi), \ B(x) = (x, \psi); \ \varphi, \psi \in \mathscr{H}_0; \\ f, g \in \mathfrak{H}_1(\mathscr{H}_-, \mathbb{R}^1, \nu). \tag{3.14}$$

Утверждение теоремы 3.4 принимает в этом случае следующий вид.

Предложение 3.2. *При условиях* (3.14) *справедливы равенства*

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)(x, \varphi)\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} (f'(x), \varphi)\mu(dx) \tag{3.15}$$

и

$$\int\limits_{\mathscr{H}_-} [f(x)(x, \varphi) - (f'(x), \varphi)][g(x)(x, \psi) - (g'(x), \psi)]\mu(dx) = \\ = (\varphi, \psi)\int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)g(x)\mu(dx) + \\ + \int\limits_{\mathscr{H}_-} (f'(x), \psi)(g'(x), \varphi)\mu(dx). \tag{3.16}$$

Доказательство. Пусть сначала $f, g \in C_1(\mathscr{H}_-, \mathbb{R}^1)$ и $P \in \mathscr{P}$. Из предложения 1.3 следует справедливость формул (3.15), (3.16) для функций $f(Px)$, $g(Px)$. В этих формулах можно сделать предельный переход при $P \to I$, так как подынтегральные выражения ограничены и имеет место поточечная сходимость. Это доказывает рассматриваемые формулы для $f, g \in C_1(\mathscr{H}_-, \mathbb{R}^1)$.

Из (3.16) при $g = f$, $\psi = \varphi$ следует оценка

$$\int\limits_{\mathscr{X}_-} [f(x)(x,\ \varphi) - (f'(x),\ \varphi)]^2 \mu(dx) =$$

$$= \|\varphi\|^2 \int\limits_{\mathscr{X}_-} f^2(x)\mu(dx) + \int\limits_{\mathscr{X}_-} (f'(x),\ \varphi)^2 \mu(dx) \leqslant \|\varphi\|^2 |||f|||_1^2,$$

показывающая, что определенный на C_1 линейный оператор

$$l_\varphi(f) = f(x)(x,\ \varphi) - (f'(x),\ \varphi)$$

непрерывно действует из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$ —пространство интегрируемых в квадрате по мере μ функций. По непрерывности он распространяется на все пространство $\mathfrak{H}_1$. Так как каждый из интегралов, входящих в (3.15), (3.16), очевидно, непрерывен в $\mathfrak{H}_1$, то при помощи предельного перехода эти формулы доказываются для $f,\ g \in \mathfrak{H}_1$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда функции *f(x), g (x)* — векторные.

Предложение 3.3. *Пусть* $f(x), g(x) \in \mathfrak{H}_1(\mathscr{X}_-, \mathscr{X}, \mu)$; $A,\ B \in \mathscr{L}_2(\mathscr{X}_0,\ \mathscr{X})$. *Тогда справедливы формулы*

$$\int\limits_{\mathscr{X}_-} (f(x),\ \tilde{A}x)_{\mathscr{X}} \mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{X}_-} \mathrm{Tr}\,[f'(x)\,A^*]\mu(dx) \qquad (3.17)$$

и

$$\int\limits_{\mathscr{X}_-} [(f(x),\ \tilde{A}x)_{\mathscr{X}} - \mathrm{Tr}\, f'(x)\,A^*] \times$$

$$\times [(g(x),\ \tilde{B}x)_{\mathscr{X}} - \mathrm{Tr}\, g'(x)\,B^*]\mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{X}_-} \{(A^* f(x),\ B^* g(x)) + \mathrm{Tr}\, A^* f'(x)\, B^* g'(x)\}\mu(dx). \qquad (3.18)$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$—базис в $\mathscr{X}$. Интегрируя почленно сходящееся в среднем квадратичном разложение

$$(f(x),\ \tilde{A}x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x),\ \varphi_k)(x,\ A^*\varphi_k),$$

получаем первую формулу предложения:

$$\int\limits_{\mathscr{X}_-} (f(x),\ \tilde{A}x)_{\mathscr{X}} \mu(dx) = \sum_k \int\limits_{\mathscr{X}_-} (f(x),\ \varphi_k)(x,\ A^*\varphi_k)\mu(dx) =$$

$$= \sum_k \int\limits_{\mathscr{X}_-} (f'(x)\,A^*\varphi_k,\ \varphi_k)\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{X}_-} [\mathrm{Tr}\, f'(x)\,A^*]\mu(dx).$$

Для доказательства второй формулы рассмотрим разложения

$$
\begin{aligned}
&(f(x),\ Ax) - \operatorname{Tr} f'(x)\, A^* = \\
&\qquad = \sum_k \{(f(x),\ \varphi_k)(A^*\varphi_k,\ x) - (f'(x)\, A^*\varphi_k,\ \varphi_k)\}, \\
&(g(x),\ Bx) - \operatorname{Tr} g'(x)\, B^* = \\
&\qquad = \sum_k \{(g(x),\ \varphi_k)(B^*\varphi_k,\ x) - (g'(x)\, B^*\varphi_k,\ \varphi_k)\}.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

Пусть сначала каждое из них содержит конечное число слагаемых. Перемножая их, интегрируя почленно и используя предложение 3.2, получаем требуемое соотношение:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{X}_-} \{(f(x),\ Ax) - \operatorname{Tr} f'(x)\, A^*\}\{(g(x),\ Bx) - \operatorname{Tr} g'(x)\, B^*\}\,\mu(dx) = \\
&\quad = \sum_{k,\,l} \int_{\mathscr{X}_-} \{(f(x),\ \varphi_k)(A^*\varphi_k,\ x) - (f'(x)\, A^*\varphi_k,\ \varphi_k)\} \times \\
&\quad \times \{(g(x),\ \varphi_l)(B^*\varphi_l,\ x) - (g'(x)\, B^*\varphi_l,\ \varphi_l)\}\,\mu(dx) = \\
&\quad = \sum_{k,\,l} \int_{\mathscr{X}_-} \{(A^*\varphi_k,\ B^*\varphi_l)(f(x),\ \varphi_k)(g(x),\ \varphi_l) + \\
&\quad + (f'(x)\, B^*\varphi_l,\ \varphi_k)(g'(x)\, A^*\varphi_k,\ \varphi_l)\}\,\mu(dx) = \\
&= \int_{\mathscr{X}_-} \{(A^* f(x),\ B^* g(x)) + \operatorname{Tr} f'(x)\, B^* g'(x)\, A^*\}\,\mu(dx).
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Остается показать, что в (3.20) можно сделать предельный переход, так чтобы отказаться от предположения в конечности разложения (3.19). При $g=f$ и В =А из (3.20) следует формула

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{X}_-} [(f(x),\ Ax) - \operatorname{Tr} f'(x) A^*]^2\,\mu(dx) = \\
&\qquad = \int_{\mathscr{X}_-} \{\| A^* f(x)\|^2 + \operatorname{Tr}[f'(x)\, A^*]^2\}\,\mu(dx).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Левая и правая части этого равенства определены при $f \in \mathfrak{H}_1,\quad A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{K})$ и совпадают на плотном в $\mathscr{L}_2^-(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{K})$ множестве конечномерных операторов A-. Поэтому выражение

$$
l_A(f)(x) = (f(x),\ Ax) - \operatorname{Tr} f'(x)\, A^*
$$

представляет собою линейный относительно А оператор из плотного в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{K})$ множества в $\mathfrak{H}$. Из (3.21) следует его непрерывность:

$$
\int_{\mathscr{X}_-} |l_A(f)(x)|^2\,\mu(dx) \leqslant \| A\|^2 \| f\|_1^2.
$$

Поэтому он распространяется на все $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{K})$, так что при $f \in \mathfrak{H}_1$ выполняется (3.21). Теперь уже нетрудно перейти к пределу и в соответствующей билинейной формуле (3.20) или прямо вывести ее из квадратичного варианта (3.21).

Доказательство теоремы 3.4. Выведем сначала некоторые вспомогательные формулы. Дифференцируя почленно вдоль $h \in \mathscr{H}_0$ равенство

$$(f(x)\,\mathrm{A}\psi,\ \varphi)_{\mathscr{H}} = (\psi,\ \mathrm{A}^* f^*(x)\,\varphi)_{\mathscr{H}_0} \qquad (\psi \in \mathscr{H}_0,\ \varphi \in \mathscr{H}),$$

получаем соотношение

$$(f'(x)(h,\ \mathrm{A}\psi),\ \varphi)_{\mathscr{H}} = (\psi,\ \mathrm{A}^* f^{*\prime}(x)(h,\ \varphi))_{\mathscr{H}_0},$$

которое влечет

$$(\mathrm{A}^*[f^*(x)\,\varphi]'\,e_s,\ e_j)_{\mathscr{H}_0} = (\mathrm{A}^* f^{*\prime}(x)(e_s,\ \varphi),\ e_j)_{\mathscr{H}_0} = \\ = (f'(x)(e_s,\ \mathrm{A}e_j),\ \varphi)_{\mathscr{H}}.$$

Суммируя при $s = j$, получим

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*[f^*(x)\,\varphi]' = \sum_s (f'(x)(e_s,\ \mathrm{A}e_s),\ \varphi)_{\mathscr{H}} = \\ = (\mathrm{Tr}\,(f(x)\,\mathrm{A})',\ \varphi)_{\mathscr{H}}. \tag{3.22}$$

Такимже образом

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*[f^*(x)\,\varphi]'\,\mathrm{B}^*[g^*(x)\,\psi]' = \\ = \sum_{s,\ j} (f'(x)(e_s,\ \mathrm{A}e_j),\ \varphi)\,(g'(x)(e_j,\ \mathrm{B}e_s),\ \psi) = \\ = \sum_{s,\ j} ((f(x)\,\mathrm{A})'(e_s,\ e_j),\ \varphi)\,((g(x)\,\mathrm{B})'(e_j,\ e_s),\ \psi),$$

откуда, определяя оператор $\check{C} \in \mathscr{L}^2(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{H})$ при $C \in \mathscr{L}^2(\mathscr{H}_0,\ \mathscr{H})$: $\check{C}(\varphi,\ \psi) = C(\psi,\ \varphi)$, получаем

$$\sum_m \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*[f^*(x)\,\varphi_m]'\,\mathrm{B}^*[g^*(x)\,\varphi_m] = \\ = \sum_{s,\ j} ((f(x)\,\mathrm{A})'(e_s,\ e_j),\ (g(x)\,\mathrm{B})'(e_j,\ e_s)) = ((f(x)\,\mathrm{A})',\ (g(x)\,\mathrm{B})')_2.$$

Нетрудно проверить, что все ряды сходятся абсолютно и потому проведенные рассуждения корректны.

Перейдем к доказательству утверждений теоремы. Из (3.17) и (3.22) следует формула

$$\int_{\mathscr{X}_-} (f(x)\,\mathrm{A}x,\ \varphi)\,\mu(dx) = \int_{\mathscr{X}_-} (\mathrm{A}x,\ f^*(x)\,\varphi)\,\mu(dx) = \\ = \int_{\mathscr{X}_-} \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*[f^*(x)\,\varphi]'\,\mu(dx) = \int_{\mathscr{X}_-} (\mathrm{Tr}\,(f(x)\,\mathrm{A})',\ \varphi)\,\mu(dx),$$

которая приводит к (3.12) в силу произвольности φ. Наконец, используя разложение

$$f(x)\,\mathrm{A}x-\mathrm{Tr}\,[f(x)\,\mathrm{A}]'=\sum_m (f(x)\,\mathrm{A}x-\mathrm{Tr}\,[(f(x)\,\mathrm{A}]',\ \varphi_m)\,\varphi_m=$$

$$=\sum_m \{(\mathrm{A}x,\ f^*(x)\,\varphi_m)-\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*\,(f^*(x)\,\varphi_m)'\}\,\varphi_m$$

и такое же разложение для $g(x)$, получаем из (3.18) к (3.22)

$$\int_{\mathscr{X}_-}(f(x)\,\mathrm{A}x-\mathrm{Tr}\,[f(x)\,\mathrm{A}]',\ g(x)\,\mathrm{B}x-\mathrm{Tr}\,[g(x)\,\mathrm{B}]')\,\mu(dx)=$$

$$=\sum_m\int_{\mathscr{X}_-}\{(\mathrm{A}^*f^*(x)\,\varphi_m,\ \mathrm{B}^*g^*(x)\,\varphi_m)+$$

$$+\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}^*\,[f^*(x)\,\varphi_m]'\,\mathrm{B}^*\,[g^*(x)\,\varphi_m]'\}\,\mu(dx)=$$

$$=\int_{\mathscr{X}_-}\{(\mathrm{A}^*f^*(x),\ \mathrm{B}^*g^*(x))_1+((f(x)\,\mathrm{A})',\ (\check{g}(x)\,\mathrm{B})')_2\}\,\mu(dx).$$

Рассмотрим выражение

$$\beta(\mathrm{A},\ f)(x)=f(x)\,\mathrm{A}x-\mathrm{Tr}\,[f(x)\,\mathrm{A}]',\tag{3.23}$$

определенное при $f\in\mathfrak{H}_1\{\mathscr{K}_-,\ \mathscr{L}_2(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}),\ \mu\}$, где $\mathrm{A}\in\mathscr{L}_2(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}_0)$ как измеримая на $\mathscr{K}_-$ функция со значениями в $\mathscr{K}$. Из теоремы 3.4 следует, что $\beta(\mathrm{A},\ f)(x)\in\mathfrak{H}(\mathscr{K}_-,\ \mathscr{K},\ \mu)$ и оценка

$$\|\beta(\mathrm{A},\ f)\|^2_{\mathfrak{H}}\leqslant\int_{\mathscr{X}_-}\{\sigma_2^2[f(x)\,\mathrm{A}]+\sigma_2^2[(f(x)\,\mathrm{A})']\}\,\mu(dx).\tag{3.24}$$

Правая часть последнего неравенства, в отличие от левой, определена и тогда, когда $\mathrm{A}\in\mathscr{L}(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}_0)$ не есть оператор Гильберта — Шмидта. Далее, линейная относительно A функция $\beta(\mathrm{A},\ f)$ со значениями в $\mathfrak{H}$, очевидно, непрерывна. Заметим, что правая часть (3.24) непрерывна и в том смысле, когда сходимость операторов A понимается как сильная. Пусть $\mathrm{A}\in\mathscr{L}(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}_0)$,
$\mathscr{K}_-\ \mathrm{A}_n\in\mathscr{L}_2(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}_0)$ и

$$\mathrm{A}\varphi=\lim_{n\to\infty}\mathrm{A}_n\varphi\quad(\varphi\in\mathscr{K}_0).$$

Из оценки

$$\|\beta(\mathrm{A}_k,\ f)-\beta(\mathrm{A}_l,\ f)\|^2_{\mathfrak{H}}\leqslant\int_{\mathscr{X}_-}\{\sigma_2^2[f(x)\,(\mathrm{A}_k-\mathrm{A}_l)]+$$

$$+\sigma_2^2[(f(x)\,(\mathrm{A}_k-\mathrm{A}_l))']\}\,\mu(dx)\tag{3.25}$$

следует, что можно определить

$$\beta(\mathrm{A},\ f)=\lim_{l\to\infty}\beta(\mathrm{A}_l,\ f),$$

причем предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности. Эти рассуждения приводят к следующему результату.

Теорема 3.5. *Пусть* $f \in \mathfrak{H}_1(\mathscr{H}_-, \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{K}), \mu)$. *При* $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$ *определено линейное относительно* A *и* f *дифференциальное выражение* $\beta(A, f)(x)$, *сужение которого на* $A \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$ *имеет вид* (3.23). *Это выражение удовлетворяет соотношению*

$$\int_{\mathscr{X}_-} (\beta(A, f)(x), \beta(B, g)(x))_{\mathscr{K}} \mu(dx) = \int_{\mathscr{X}_-} \{(f(x)A, g(x)B)_1 + ((f(x)A)', (\check{g}(x)B)')_2\} \mu(dx). \quad (3.26)$$

В частности, для $\beta(f) = \beta(I, f)$ *выполняется оценка*

$$\int_{\mathscr{X}_-} \|\beta(f)(x)\|^2 \mu(dx) \leqslant \int_{\mathscr{X}_-} \{\sigma_1^2(f(x)) + \sigma_2^2(f'(x))\} \mu(dx). \quad (3.27)$$

Замечание 3.4. При дополнительном предположении $f \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_-, \mathscr{K})$, $f' \in N(\mathscr{H}_0, \mathscr{K})$ (3.23) остается справедливыми для $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$, в частности, $\beta(f) = f(x)x - \mathrm{Tr}\, f'(x)$.

Замечание 3.5. Отметим вариант теоремы 3.5, соответствующий условиям предложения 3.3.

Определенное при $f(x) \in \mathscr{H}_+$ выражение $l_1(f) = (f(x), x) - \mathrm{Tr}\, f'(x)$ распространяется на $f \in \mathfrak{H}_1(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}_0, \mu)$, причем

$$\int_{\mathscr{X}_-} |l_1(f)(x)|^2 \mu(dx) = \int_{\mathscr{X}_-} \{\|f(x)\|^2 + \mathrm{Tr}\, f'^2(x)\} \mu(dx) \leqslant \leqslant \int_{\mathscr{X}_-} \{\|f(x)\|^2 + \sigma_2^2(f'(x))\} \mu(dx). \quad (3.27^1)$$

Замечание 3.6. Все описанные выше результаты можно переформулировать в терминах гауссовой меры μ_B с корреляционным оператором B в гильбертовом пространстве X.

Например, формула (3.21) принимает вид

$$\int_X |(f'(x), Ax) - \mathrm{Tr}\, A^* f'(x) B|^2 \mu_B(dx) = \int_X \{(ABA^* f(x), f(x)) + \mathrm{Tr}\,[A^* f'(x) B]^2\} \mu_B(dx).$$

При этом дифференциальное выражение

$$l_X^{(B)}(f)(x) = (f(x), Ax) - \mathrm{Tr}\, A^* f'(x) B$$

распространяется на такие операторы A (возможно, неограниченные), что $ABA^* \in \mathscr{L}(X, \dot{X})$, $BA^* \in \mathscr{L}_2(X, X)$ для ограниченного оператора *f (x).*

4°. Разложение по ортогональным полиномам. В этом пункте построенные выше формулы интегрирования по частям будут использованы для ортогонального разложения гильбертова пространства $\mathfrak{H} = L_2(\mathscr{H}_-, \mathscr{H}, \mu)$ μ-интегрируемых в квадрате функций на $\mathscr{H}_-$ со значениями в $\mathscr{H}$ на подпространства, состоящие из полиномиальных функций.

Введем некоторые обозначения. Как и ранее, $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ — гильбертово пространство действующих из $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}$ n-линейных операторов Гильберта — Шмидта ($\mathscr{L}_2^0(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}) = \mathscr{H}$ — по определению). Рассмотрим линейный оператор

$$J_{n,j}\colon \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}) \to \mathscr{L}_2^j(\mathscr{H}_0, \mathscr{L}_2^{n-j}(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}))$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ j = 1, \ldots, n-1),$$

отождествляющий n-линейный оператор A со значениями в $\mathscr{H}$ с j-линейным $(j < n)$ оператором $J_{n,j}(A)$ со значениями в $\mathscr{L}_2^{n-j}(\mathscr{H}, \mathscr{H})$:

$$[J_{n,j}(A)(\varphi_1, \ldots, \varphi_j)](\varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) =$$
$$= A(\varphi_1, \ldots, \varphi_j, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_n) \qquad (\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathscr{H}).$$

Соотношение

$$\sigma_2^2(J_{n,j}(A)) = \sum_{k_1, \ldots, k_j} \| J_{n,j}(A)(e_{k_1}, \ldots, e_{k_j}) \|^2_{\mathscr{L}_2^{n-j}} =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_j} \sum_{s_1, \ldots, s_{n-j}} \| A(e_{k_1}, \ldots, e_{k_j}, e_{s_1}, \ldots, e_{s_{n-j}}) \|^2_{\mathscr{H}} = \sigma_2^2(A)$$

показывает, что оператор $J_{n,j}$ (очевидно, обратимый) унитарен: $J_{n,j}^* = J_{n,j}^{-1}$. Мы будем использовать обозначение $J_{n,0}$= I в пространстве $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$.

Обозначим через $G_n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ пространство, состоящее из функций $A_n(x) = A(x, \ldots, x)$, $A \in \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ $(x \in \mathscr{H}_0)$, $(G_0(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}) = \mathscr{H})$, и пусть

$$S_n(\mathscr{H}, \mathscr{H}) = G_0(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}) \dotplus G_1(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}) \dotplus \ldots \dotplus G_n(\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$$

— пространство полиномов вида $\sum_{k=0}^{n} \tilde{A}_k(x)$. Обозначим далее через $\mathscr{L}_{20}^n$, G_{n0}, S_{n0} подмножества соответствующих пространств, состоящие из конечномерных в следующем смысле функций: $A \in \mathscr{L}_{20}^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$, если $A(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = A(P_1\varphi_1, \dots, P_n\varphi_n)$ при некоторых конечномерных ортопроекторах $P_1, \dots, P_n$.

Нашей целью сейчас является построение линейного отображения $\theta_n\colon \mathscr{L}_2^n \to S_n$, сопоставляющего каждому полилинейному оператору A полиномиальную функцию $\theta_n(A)(x) = \theta_{n,A}(x)$, удовлетворяющую рекуррентному соотношению

$$\theta_n(A)(x) = \beta(\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A)))(x) = [\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))(x)](x) - \\ - \operatorname{Tr} J_{2,1}^*[\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))]'(x).$$

Это будет сделано по индукции сначала для конечномерных операторов $A \in \mathscr{L}_{20}^n$, а затем уже предельным переходом в общем случае. Проверим сначала, что для конечномерных операторов, когда все рассматриваемые функции цилиндричны и, тем самым, определены на $\mathscr{K}_-$, а кроме того, не приходится заботиться о сходимости следов рассматриваемых операторов, формула (3.28) корректно определяет θ_n по θ_{n-1}. Действительно, если $A \in$ $\in \mathscr{L}_{20}^n(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$, то $J_{n,n-1}(A) \in \mathscr{L}_{20}^{n-1}(\mathscr{K}_0, \mathscr{L}_{20}^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K}))$.
Если отображение θ_{n-1} на $\mathscr{L}_2^{n-1}(\mathscr{K}_0, \mathscr{L}_0(\mathscr{K}_0, \mathscr{K}))$ определено, то $\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))$ —полиномиальная функция со значениями в $\mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$. Ее производная $[\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))]'(x) \in$ $\in \mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K}))$ отождествляется оператором $J_{2,1}^*$ с некоторым элементом $\mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$, след которого принадлежит $\mathscr{K}$. Так как и первое слагаемое (3.28) в рассматриваемом случае есть элемент $\mathscr{K}$, то однозначно определяется $\theta_n(A)$, причем, очевидно, $\theta_n(A) \in \mathscr{P}_{n0}$.
Это позволяет по индукции определить θ_n, начиная с θ_0: $\theta_0(f) = f$. Отметим, что при этом, очевидно, $\theta_1(A)(x) = Ax$ при $A \in \mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$, и потому при $A \in \mathscr{L}_2^1(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$

$$\theta_1(J_{21}(A))(x) = J_{21}(A)(x), \quad [\theta(J_{21}(A))]'(x) = J_{21}(A),$$

а, следовательно,

$$\theta_2(A)(x) = [J_{21}(A)(x)](x) - \operatorname{Tr} J_{21}^* J_{21}(A) = A(x, x) - \operatorname{Tr} A.$$

Выясним некоторые свойства отображений θ_n.

Предложение 3.4. *Пусть* $A \in \mathscr{L}_{20}^n(\mathscr{K}_0, \mathscr{K})$ *—симметричен относительно любых перестановок аргументов.Тогда*

$$\theta_n(A)'(x) = n\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))(x) \qquad (3.29)$$

и соотношению (3.28) *можно придать вид*

$$\theta_n(A)(x) = [\theta_{n-1}(J_{n,n-1}(A))(x)](x) - \\ - (n-1)\operatorname{Tr}[\theta_{n-2}(J_{n,n-2}(A))(x)]. \qquad (3.30)$$

Доказательство. При n=1 (3.29) превращается в очевидное тождество (Аx)' = А. Пусть теперь (3.29) установлено для $n \le m$ — 1. Тогда для $n \le m$ из просто проверяемого соотношения $J^*_{2,1} J_{n-1, n-2} J_{n, n-1} = J_{n, n-2}$ следует (3.30). Дифференцируя эту формулу почленно, получаем

$$\theta_m (\mathrm{A})' (x) h = \theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A})) (x) h + \\ + \theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A}))' (x) (h, x) - \\ - (m-1) \operatorname{Tr} \theta_{m-2} (\mathrm{J}_{m, m-2} (\mathrm{A}))' (x) h,$$

или, используя симметричность А:

$$\theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A})' (x) (h, x)) = \\ = (m-1) \theta_{m-2} (\mathrm{J}_{m-1, m-2} \mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A})) (x) (h, h);$$

$$\theta_m (\mathrm{A})' (x) = \theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A})) (x) + \\ + (m-1) \{\theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m-1, m-2} \mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A}))\} (x) (x) - \\ - \operatorname{Tr} \mathrm{J}^*_{2,1} [\theta_{m-2} (\mathrm{J}_{m-1, m-2} \mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A}))]' (x) = \\ = m\theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{A})) (x).$$

Иа формул (3.26), (3.28) и (3.29) вытекает следующий результат.

Предложение 3.5. *При* $\mathrm{A} \in \mathscr{L}^k_{10} (\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$, $\mathrm{B} \in \mathscr{L}^j_{10} (\mathscr{H}_0, \mathscr{H})$ *справедлива формула*

$$\int_{\mathscr{H}_-} (\theta_k (\mathrm{A}) (x), \theta_j (\mathrm{B}) (x)) \mu (dx) = \\ = \int_{\mathscr{H}_-} \{(\theta_{k-1} (\mathrm{J}_{k, k-1} (\mathrm{A})) (x), \theta_{j-1} (\mathrm{J}_{j, j-1} (\mathrm{B})) (x))_1 + \\ + (k-1) (j-1) \times \\ \times (\theta_{k-2} (\mathrm{J}_{k, k-2} (\mathrm{A})) (x), \theta_{j-2} (\mathrm{J}_{j, j-2} (\mathrm{B})) (x))_2\} \mu (dx). \blacksquare \quad (3.31)$$

Следствие 3.1. *При тех же условиях выполняется соотношение ортогональности*

$$\int_{\mathscr{H}_-} (\theta_k (\mathrm{A}) (x), \theta_j (\mathrm{B}) (x)) \mu (dx) = \delta_{kj} \cdot k! (\mathrm{A}, \mathrm{B})_k. \quad (3.32)$$

Действительно, формула (3.31) очевидна при j=k=0 и непосредственно следует из (3.12) при j = 0 и произвольном $k>0$. Если предположить, что она доказана для всех $j<m$ и $k<r$, то

$$\int_{\mathscr{H}_-} (\theta_{r-1} (\mathrm{J}_{r, r-1} (\mathrm{A})) (x), \theta_{m-1} (\mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{B}) (x)))_1 \mu (dx) = \\ = \delta_{mr} (r-1)! (\mathrm{J}_{r, r-1} (\mathrm{A}), \mathrm{J}_{m, m-1} (\mathrm{B})) = \delta_{mr} (r-1)! (\mathrm{A}, \mathrm{B})_r,$$

и точно так же

$$(m-1)(r-1)\int_{\mathscr{H}_-}(\theta_{r-2}(J_{r,\,r-2}(A))(x),$$

$$\theta_{m-2}(J_{m,\,m-2}(B))(x))_2\,\mu(dx)=\delta_{mr}(r-1)(m-1)(r-2)!\,(A,\,B)_r.$$

Складывая полученные выражения, приходим к требуемому результату.

Теперь мы уже можем отказаться от требования конечномерности при определении θ_n.

Теорема 3.6. *Существует единственное отображение*

$$\theta_n\colon \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K})\to L_2(\mathscr{H}_-,\,\mathscr{K},\,\mu),$$

сопоставляющее каждому полилинейному оператору A $\in \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K})$ *измеримый полином* $\theta_n(A)(x)$, *определяемое соотношениями*

$$\begin{aligned}&\theta_1(A)(x)=\mathring{A}x;\\&\theta_n(A)(x)=\beta(\theta_{n-1}(J_{n,\,n-1}(A)))(x)\ \ (n>1).\end{aligned}\qquad(3.33)$$

При этом выполняется условие ортогональности

$$\int_{\mathscr{H}_-}(\theta_k(A)(x),\ \theta_j(B)(x))_{\mathscr{K}}\,\mu(dx)=\delta_{jk}\cdot k!\,(A,\,B)\qquad(3.34)$$

и для симметричного A — *формула дифференцирования*

$$\theta_n(A)'(x)=n\theta_{n-1}(J_{n,\,n-1}(A))(x).$$

Доказательство. Обладающее требуемыми свойствами отображение уже определено на плотном в $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K})$ множестве $\mathscr{L}_{20}^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K})$, состоящем из конечномерных операторов. Формула

$$\int_{\mathscr{H}_-}\|\theta_n(A)(x)\|_{\mathscr{K}}^2\,\mu(dx)=n!\,\sigma_2^2(A),\qquad(3.35)$$

следующая ив (3.34), покавывает изометричность θ_n, позволяющую распространить это отображение с сохранением перечисленных свойств на все $\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K})$., Единственность следует из рекуррентности формулы (3.33).

Следствие 3.2. *Пространство* $\mathfrak{H}=L_2(\mathscr{H}_-,\,\mathscr{K},\,\mu)$ μ-*интегрируемых в квадрате на* $\mathscr{H}_-$ *функций со значениями в* $\mathscr{K}$ *разлагается в ортогональную сумму*

$$\mathfrak{H}=\otimes\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$$

подпространств $\Lambda_n=\theta_n(\mathscr{L}_2^n(\mathscr{H},\,\mathscr{K}))$, *состоящих из измеримых полиномов.*

Ортогональность следует на (3.34), а равенство из плотности в $\mathfrak{H}$ множества полином

2. 4. Абсолютная непрерывность гауссовых мер

1°. Эквивалентность мер в произведении пространств.
Пусть на измеримом пространстве $(X, \mathfrak{A})$ заданы две меры μ_1 и μ_2. Напомним, что мера μ_2 *абсолютно непрерывна* относительно μ_1 $(\mu_2 \prec \mu_1)$, если всякий раз, когда $\mu_1(A) = 0$ $(A \in \mathfrak{A})$, имеет место и равенство $\mu_2(A) = 0$. Меры μ_1 и μ_2 *эквивалентны* $(\mu_1 \sim \mu_2)$, если $\mu_2 \prec \mu_1$ и $\mu_1 \prec \mu_2$.

Мы рассматриваем здесь только конечные неотрицательные меры. В этом случае $\mu_2 \prec \mu_1$ в точности тогда, когда выполнена формула

$$\mu_2(A) = \int_A \rho(x)\,\mu_1(dx), \quad (4.1)$$

где $\rho(x)$ — неотрицательная интегрируемая относительно μ_1 функция *(плотность* или *производная Радона —Никодима),* или, что то же самое, формула

$$\int_X f(x)\,\mu_2(dx) = \int_X f(x)\,\rho(x)\,\mu_1(dx) \quad \mathbf{(4.2)}$$

при любой ограниченной измеримой функции $f(x)$.

Противоположная ситуация возникает, когда меры сосредоточены на непересекающихся множествах: существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого $\mu_1(A) = \mu_1(X)$, $\mu_2(A) = 0$. Меры μ_1 и μ_2 при этом называют *взаимно сингулярными* (или *ортогональными:* $\mu_1 \perp \mu_2$).

Хотя, вообще говоря, возможна и промежуточная ситуация, мы сейчас рассмотрим важный для дальнейшего случай, когда имеет место альтернатива: либо одна из мер абсолютно непрерывна относительно другой, либо они ортогональны.

Пусть $X = \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ —бесконечное произведение измеримых пространств, на каждом из которых задана пара неотрицательных нормированных мер $\mu_k \prec \nu_k$ с плотностями $\rho_k(x) = \frac{\mu_k(dx)}{\nu_k(dx)}$.

Рассмотрим бесконечное произведение мер

$$\mu = \prod_{k=1}^{\infty} \mu_k, \quad \nu = \prod_{k=1}^{\infty} \nu_k.$$

Теорема 4.1 (Какутани). *В зависимости от того, сходится или расходится к нулю бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \quad \alpha_k = \int_{X_k} \sqrt{\rho_k(x_k)}\,\nu_k(dx_k), \quad \mathbf{(4.3)}$$

мера μ *соответственно абсолютно непрерывна или сингулярна по отношению к* ν. *В первом случае последовательность*

$$r_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\rho_k(x) \quad \textbf{(4.4)}$$

сходится в среднем к интегрируемой функции $r(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k(x)$, *которая является плотностью:* $r(x)=\dfrac{\mu(dx)}{\nu(dx)}$.

Доказательство. Так как

$$\alpha_k^2=\left|\int_{X_k}\sqrt{\rho_k(x_k)}\,\nu_k(dx_k)\right|^2\leq\int_{X_k}\rho_k(x_k)\,\nu_k(dx_k)=1,$$

то произведение (4.3) не может расходиться к бесконечности. Если оно расходится к нулю, то существует последовательность $\beta_s=\prod_{k=n_s}^{m_s}\alpha_k$, для которой сходится ряд $\sum_{s=1}^{\infty}\beta_s$. Рассмотрим последовательность цилиндрических множеств $A_s=\left\{x:\ \prod_{k=n_s}^{m_s}\rho_k(x_k)\geq 1\right\}$. Из оценки

$$\nu(A_s)=\int_{A_s}\nu(dx)\leq\int_{A_s}\sqrt{\prod_{k=n_s}^{m_s}\rho_k(x_k)}\,\nu(dx)=$$

$$=\prod_{k=n_s}^{m_s}\int_{X_k}\sqrt{\rho_k(x_k)}\,\nu_k(dx_k)=\beta_s$$

в силу сходимости ряда $\sum_{s=1}^{\infty}\beta_s$ следует, что

$$\nu(A)=0\quad\left(A=\overline{\lim_{s\to\infty}}A_s\right).$$

С другой стороны, если $B_s=X\setminus A_s$, то

$$\mu(B_s)=\int_{B_s}\mu(dx)\leq\int_{B_s}\left\{\prod_{k=n_s}^{m_s}\rho_k(x_k)\right\}^{-1/2}\mu(dx)=$$

$$=\int_{B_s}\sqrt{\prod_{k=n_s}^{m_s}\rho_k(x_k)}\,\nu(dx)\leq\prod_{k=n_s}^{m_s}\int_{X_k}\sqrt{\rho_k(x_k)}\,\nu_k(dx_k)=\beta_s,$$

и потому $\mu(A)\geq\mu(\underline{\lim}A_s)=1$, а значит,

$$\mu\left(\overline{\lim_{s\to\infty}}\, B_s\right)=0,$$

т. е. μ *(A)=I,* откуда следует, что $\mu \perp \nu$.
Пусть теперь произведение (4.3) сходится. Рассмотрим последовательность цилиндрических функций $\varphi_n(x) =$

$$=\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\rho_k(x_k)}.$$

Из соотношения

$$\int_X|\varphi_{n+p}(x)-\varphi_n(x)|^2\nu(dx)=$$

$$=\int_X\prod_{k=1}^{n}\rho_k(x_k)\left|\sqrt{\prod_{k=n+1}^{n+p}\rho_k(x_k)}-1\right|^2\nu(dx)=$$

$$=\int_{X_{n+1}}\cdots\int_{X_{n+p}}\left|\sqrt{\prod_{k=n+1}^{n+p}\rho_k(x_k)}-1\right|^2\prod_{k=n+1}^{n+p}\nu_k(dx_k)=$$

$$=2\left(1-\prod_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k\right)$$

следует фундаментальность последовательности $\varphi_n(x)$ в $L_2(X,\ \nu)$. При этом последовательность $r_n=\varphi_n^2$ сходится в среднем, так как

$$\int_X|r_{n+p}(x)-r_n(x)|\,\nu(dx)\leqslant\left\{\int_X|\varphi_{n+p}(x)-\varphi_n(x)|^2\nu(dx)\right\}^{1/2}\times$$

$$\times\left\{\int_X[|\varphi_{n+p}(x)|+|\varphi_n(x)|]^2\nu(dx)\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left\{\int_X|\varphi_{n+p}(x)-\varphi_n(x)|^2\nu(dx)\right\}^{1/2}.$$

Пусть

$$r(x)=\lim_{n\to\infty}r_n(x).$$

Для любой ограниченной цилиндрической функции выполняется соотношение

$$\int_X f(x)\,\mu(dx)=\int_X f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\prod_{k=1}^{n}\mu_k(dx_k)=$$

$$=\int_X f(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,r_n(x)\prod_{k=1}^{n}\nu_k(dx_k)=\int_X f(x)\,r_n(x)\,\nu(dx)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_X f(x)\,r_n(x)\,\nu(dx)=\int_X f(x)\,r(x)\,\nu(dx).$$

Аппроксимируя ограниченную измеримую функцию цилиндрическими, получим (4.2) уже для любой такой функции. Применим доказанную теорему к рассмотрению вопроса об абсолютной непрерывности гауссовых мер в произведении прямых. Пусть

$$X = \mathbb{R}^\infty = \prod_{k=1}^{\infty} X_k \ (X_k = \mathbb{R}^1); \quad \frac{\nu_k(dx_k)}{dx_k} = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k-\gamma_k)^2}{2\sigma_k^2}};$$

$$\frac{\mu_k(dx_k)}{dx_k} = \frac{1}{\lambda_k\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k-\beta_k)^2}{2\lambda_k^2}}.$$

В этом случае

$$\rho_k(x_k) = \frac{\sigma_k}{\lambda_k}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2\lambda_k^2}\left[(x_k-\beta_k)^2\sigma_k^2 - (x_k-\gamma_k)^2\lambda_k^2\right]\right\} \quad (4.5)$$

и, как показывают простые вычисления,

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho_k(x_k)}\,\nu_k(dx_k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k\lambda_k}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{4\sigma_k^2\lambda_k^2}\left[\sigma_k^2(x_k-\beta_k)^2 + \lambda_k^2(x_k-\gamma_k)^2\right]\right\}dx_k =$$

$$= \sqrt{\frac{2\lambda_k\sigma_k}{\lambda_k^2-\sigma_k^2}}\exp\left\{-\frac{(\beta_k-\gamma_k)^2}{4(\lambda_k^2+\sigma_k^2)}\right\}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим теперь отдельные частные случаи.

Предложение 4.1. *Пусть* $\lambda_k = \sigma_k \ (k = 1, \ 2, \ \ldots)$. *Для эквивалентности гауссовых мер* μ, ν, *отличающихся лишь средним, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\beta_k-\gamma_k)^2}{\sigma_k^2} < \infty. \quad (4.7)$$

В этом случае плотность $r(x) = \frac{\mu(dx)}{\nu(dx)}$ *представила в виде*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k(\beta_k-\gamma_k)}{\sigma_k^2} - \frac{\beta_k^2-\gamma_k^2}{2\sigma_k^2}\right\}. \quad (4.8)$$

Если условие (4.7) *нарушается, то меры* μ *и* ν *ортогональны.*

Доказательство. В рассматриваемом случав $\alpha_k = \exp\left\{-\frac{(\beta_k-\gamma_k)^2}{8\sigma_k^2}\right\}$ и

сходимость бесконечного произведения (4.3) эквивалентна сходимости ряда (4.7). Формула (4.8) следует из (4.4) и (4.5). Так как меры μ, ν в рассматриваемой ситуации равноправны, то из абсолютной непрерывности следует их эквивалентность.

Предложение 4.2. *Пусть* $\beta_k = \gamma_k = 0$. *Тогда гауссовы меры* μ *и* ν *с нулевым средним эквивалентны точно при условии*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k - \sigma_k)^2}{\lambda_k \sigma_k} < \infty, \quad (4.9)$$

и в этом случае

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{\lambda_k} \exp\left\{-\frac{x_k^2}{2}\left(\frac{\sigma_k^2 - \lambda_k^2}{\sigma_k^2 \lambda_k^2}\right)\right\}. \quad (4.10)$$

При нарушении условия (4.10) *меры* μ *и* ν *ортогональны.*

Доказательство. В рассматриваемом случае $\alpha_k = \sqrt{\frac{2\sigma_k\lambda_k}{\sigma_k^2 + \lambda_k^2}}$ и

сходимость произведения (4.3), очевидно, эквивалентна сходимости произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-2} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(\sigma_k - \lambda_k)^2}{2\sigma_k\lambda_k}\right),$$

а значит, и сходимости ряда (4.9). При этом из (4.5) следует (4.10).

2°. Эквивалентность гауссовых мер, отличающихся средним.

Перейдем к рассмотрению гауссовых мер в гильбертовом пространстве *X*. Пусть $\nu = \mu_B$ —центрированная гауссова мера с ядерным корреляционным оператором B в X, $\mu = \mu_{B,a}$—мера, полученная из нее сдвигом на элемент $a \in X$. При исследовании абсолютной непрерывности этих мер удобно представить их в виде произведения одномерных.

Пусть $\{e_k\}$ — ортобазис в *X*, оставленный из собственных векторов оператора B:

$$Be_k = \lambda_k e_k, \ \lambda_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty.$$

Оператор $Ux = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \ x_k = (x, e_k)$ унитарно отождествляет *X* с пространством l_2, которое мы будем рассматривать как часть его линейного расширения R^∞. При этом проектор

$Px = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$ переходит в $\tilde{P}x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Образ гауссовой меры μ_B — также гауссова мера $\mu_{\tilde{B}}$,

с корреляционным оператором $\tilde{B} = U^*BU$, изображаемым в l_2 диагональной матрицей $\|\lambda_j \delta_{jk}\|_{j,k=1}^{\infty}$. Поэтому конечномерная проекция $\mu_{\tilde{P}_n B \tilde{P}_n}$ этой меры имеет по отношению к лебеговой мере в $\mathbb{R}^n$ плотность

$$\rho_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} e^{-\frac{x_k^2}{2\lambda_k}}.$$

Точно таким же образом мере $\mu_{B,a}$ сопоставляется мера $\mu_{\hat{B},\tilde{a}}$ с конечномерными проекциями, имеющимиплотность

$$q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}} \exp\left\{-\frac{(x_k - a_k)^2}{2\lambda_k}\right\};$$

$$a_k = (a, e_k); \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Обе эти сосредоточенные в l_2 меры можно рассматривать в $\mathbb{R}^\infty$ как бесконечные произведения одномерных. Их абсолютная непрерывность или ортогональность при таком преобразовании не нарушается и

$$\frac{\mu_{\tilde{B},\tilde{a}}(\mathrm{U}dx)}{\mu_{\tilde{B}}(\mathrm{U}dx)} = \frac{\mu_{B,a}(dx)}{\mu_B(dx)}. \qquad (4.11)$$

Теорема 4.2. *Для того чтобы гауссова мера* $\mu_{B,a}$, *полученная сдвигом на элемент* $a \in X$ *из центрированной гауссовой меры* μ_B, *была ей эквивалентна, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a \in B^{1/2}X. \qquad (4.12)$$

В атом случае плотность имеет вид

$$\frac{\mu_{B,a}(dx)}{\mu_B(dx)} = \exp\left\{(B^{-1}a, x) - \frac{1}{2}|B^{-1/2}a|^2\right\}. \qquad (4.13)$$

При нарушении условия (4.12) *меры* $\mu_{B,a}$ *и* μ_B *ортогональны.*

Доказательство. Условие (4.12) для

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

записывается в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda^k} < \infty \qquad (4.14)$$

и в данном случае совпадает с (4.7). Поэтому утверждения теоремы об эквивалентности и сингулярности следуют из предложения 4.1.

Для доказательства (4.13) остается заметить, что выражение

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k a_k}{\lambda_k}=(\mathrm{B}^{-1}a,\ x)$$

представляет собою измеримый линейный функционал на X, и поэтому формулу (4.8) можно переписать в виде (4.13).

Замечание 4.1. Если $\mathrm{B}^{-1}a\in X$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{\lambda_k^2}<\infty,$$

то производная *r(x)* непрерывна на X.

Замечание 4.2. Полезно переписать полученный результат в других терминах, полагая, что $X=\mathscr{H}_-\supset\mathscr{H}_0\supset\mathscr{H}_+$ и μ — каноническая гауссова мера: $\mathrm{B}=\mathrm{I}_{\mathscr{H}_0}$.

Условие (4.14) при этом означает, что $a\in\mathscr{H}_0$. Тогда (*a*, *x)* — измеримый линейный функционал на X и

$$r(x)=\exp\left\{(x,\ a)-\frac{1}{2}|a|^2\right\}.$$

Отметим, что $r(x)\in L_p(X,\ \mu)$ при любом р≥1:

$$\int_{\mathscr{H}_-}|r(x)|^p\,\mu(dx)=e^{-\frac{1}{2}p|a|^2}\int_{\mathscr{H}_-}e^{p(x,\ a)}\mu(dx)=$$

$$=\exp\left\{\frac{p(p-1)}{2}|a|^2\right\}.$$

Следствие 4.1. *Пусть* $\mathscr{E}$ *—измеримое множество положительной меры* $\mu(\mathscr{E})>0$ *в* $\mathscr{H}_-$ *и* $a\in\mathscr{H}_0$. *Тогда сдвинутое множество* $\mathscr{E}_a=\mathscr{E}+a$ *также имеет положительную меру:*

$$\mu(\mathscr{E}+a)=\int_{\mathscr{E}}\mu_a(dx)=\int_{\mathscr{E}}\exp\left\{(x,\ a)-\frac{1}{2}|a|^2\right\}\mu(dx)>0,$$

так как подынтегральная функция всюду положительна.

3°. Эквивалентность гауссовых мер с различными корреляционными операторами. Нам понадобятся свойства так называемых *регуляризованных* определителей, которые мы сейчас кратко изложим.

Рассмотрим в X оператор вида A=I+S, и пусть сначала S — конечномерный оператор, имеющий отличные от нуля собственные числа (более точно, нужно рассматривать ив пространство *X*, а его комплексификацию) $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ (перечисленные с учетом кратности). Положим

$$\Delta(A) = \det A = \prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j),$$

$$\tilde{\Delta}(A) = \det A \exp(-\operatorname{Tr}S) = \prod_{j=1}^{n}(1+\lambda_j)e^{-\lambda_j}.$$

При помощи предельного перехода Δ (A) распространяется на все A = I + S с ядерными операторами S, а $\tilde{\Delta}(A)$ —на все A = I+S с операторами S Гильберта —Шмидта, причем:

а) функция Δ (I+S) ограничена и равномерно непрерывна на ограниченных множествах в пространстве *N* ядерных операторов и справедлива теорема умножения:

$$\Delta(I+S_1)\Delta(I+S_2) = \Delta[(I+S_1)(I+S_2)],$$

б) функция $\tilde{\Delta}(I+S)$ ограничена и равномерно непрерывна на ограниченных множествах пространства $\mathscr{L}_2^1$ операторов Гильберта — Шмидта и справедлива теорема умножения:

$$\tilde{\Delta}(I+S_1)\tilde{\Delta}(I+S_2)\exp(-\operatorname{Tr}S_1S_2) = \tilde{\Delta}[(I+S_1)(I+S_2)].$$

Лемма 4.1. *Для эквивалентности центрированных гауссовых мер* μ_{B_1}, μ_{B_2} *в гильбертовом пространстве X необходимо совпадение множеств* X_{B_1}, X_{B_2} *их линейных измеримых функционалов. Если это условие нарушается, то* $\mu_{B_1} \perp \mu_{B_2}$.

Доказательство. Первая часть утверждения, очевидно, следует из того, что переход к эквивалентной мере не нарушает сходимости почти везде.

Пусть теперь $X_{B_1} \neq X_{B_2}$ и, следовательно, нормы $\| X \|_{B_j} = (B_j x, x)$ $(j = 1, 2)$ в *X* не эквивалентны. Поэтому существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset X$, для которой

$$\|x_n\|_{B_1} \to 0 \quad (n\to\infty), \qquad \|x_n\|_{B_2} = 1.$$

Рассмотрим последовательность непрерывных линейных функционалов *(x_n, x)* на *X*. Так как $\int_X |(x_n, x)|^2 \mu_{B_1}(dx) =$

$= \|x_n\|^2_{B_1} \to 0$, то из нее можно извлечь подпоследовательность (обозначим ее снова *x_n)*, сходящуюся к нулю μ_{B1}-почти везде. Линейное множество $\mathscr{L} = \{x\colon (x_n, x) \to 0\}$, очевидно, измеримо для каждой из мер, причем $\mu_{B_1}(\mathscr{L}) = 1$, но $\mu_{B_2}(\mathscr{L}) = 0$, так как иначе было бы, в силу теоремы 3.1, $\mu_{B_2}(\mathscr{L}) = 1$, что противоречит соотношению

$$\int_X |(x_n, x)|^2 \mu_{B_2}(dx) = \|x_n\|^2_{B_2} = 1. \ \blacksquare$$

Таким образом, при дальнейшем рассмотрении, исключая заведомо сингулярный случай, можно предполагать, что $X_{B_1} = X_{B_2}$, т. е. операторы $B_1^{1/2}B_2^{-1/2}$ и $B_2^{1/2}B_1^{-1/2}$ ограничены в X. Иными словами,

$$B_2^{1/2} = SB_1^{1/2} = B_1^{1/2}S^*,$$

где S —ограниченный, обратимый в *X* оператор.

Проведем теперь преобразование, при котором мера μ_{B1} превратится в каноническую гауссову меру μ, иными словами, примем $\mathscr{H}_- = X$, $\mathscr{H}_0 = B_1^{1/2}X$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_0 = (B_1^{-1/2}\varphi, B_1^{-1/2}\psi)$. При этом мера μ_{B1} будет иметь в качестве корреляционного оператора оператор $C = B_2B_1^{-1} = B_1^{1/2}S^*SB_1^{-1/2}$ (ограниченный и обратимый в $\mathscr{H}_0$, так как $B_1^{1/2}$ унитарен из *X* в $\mathscr{H}_0$):

$$\int_X |(x, \varphi)_0|^2 \mu_{B_2}(dx) = \int_X |(x, B_1^{-1}\varphi)|^2 \mu_{B_1}(dx) =$$

$$= (B_1^{-1}B_2B_1^{-1}\varphi, \varphi) = (B_2B_1^{-1}\varphi, \varphi)_0.$$

Итак, мы приходим к рассмотрению пары $\mu = \mu_1$, μ_C $(C \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}))$ сосредоточенных в $\mathscr{H}_-$ гауссовых мер.

Предложение 4.3. *Пусть* C = 1 + K. $K \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$ — *обратимый оператор в* $\mathscr{H}_0$. *Тогда мера* μ_C *эквивалентна канонической* $\mu = \mu_I$

$$r(x) = \frac{\mu_C(dx)}{\mu(dx)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}(1+K)}} \exp\{\theta_2(K)(x) - \|KC^{-1/2}x\|^2\}. \quad (4.15)$$

Доказательство. Пусть *{e}* — ортобазис в $\mathscr{H}_0$, составленный из собственных векторов оператора K. Рассмотрим унитарное отображение

$$U: \mathscr{H}_0 \to l_2: \ Ux = (x_1, \dots, x_n, \dots),$$
$$x_k = (x, e_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пространство $\mathscr{H}_-$ отобразится при этом в $\mathbb{R}^\infty$, а меры μ, μ_C перейдут в произведения одномерных гауссовых мер с плотностями

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\lambda_k)}} e^{-\frac{x_k^2}{2(1+\lambda_k)}} \quad (Ke_j = \lambda_j e_j).$$

Условие (4.9) имеет вид $\sum \frac{(\sqrt{1+\lambda_j}-1)^2}{\sqrt{1+\lambda_j}} < \infty$ и, как легко видеть, эквивалентно условию $\sum_j |\lambda_j|^2 < \infty$. Поэтому $\tilde{\mu} \sim \tilde{\mu}_C$, а значит, и $\mu \sim \mu_C$. Выражение (4.10) в данном случае принимает вид

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} r_n(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1+\lambda_k)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x_k^2}{2}\frac{1-(1+\lambda_k)}{1+\lambda_k}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[(1+\lambda_k)e^{-\lambda_k}\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{\lambda_k x_k^2}{2} - \frac{\lambda_k}{2} - \frac{\lambda_k^2 x_k^2}{2(1+\lambda_k)}\right\}.$$

Легко проверяются соотношения

$$\prod_{k=1}^{n} (1+\lambda_k)e^{-\lambda_k} = \tilde{\Delta}(\mathrm{P}_n\mathrm{C}), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2 x_k^2}{1+\lambda_k} = \| \mathrm{P}_n\mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1/2} x \|^2,$$

где $\mathrm{P}_n x = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$ и, далее, $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k x_k^2 - \lambda_k) = \theta_2(\mathrm{K}\mathrm{P}_n)(x)$.

Таким образом,

$$r_n(x) = \left[\tilde{\Delta}_n(\mathrm{I}+\mathrm{P}_n\mathrm{K})\right]^{-1/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\theta_2(\mathrm{K}\mathrm{P}_n)(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\| \mathrm{P}_n\mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1/2} x \|^2\right\},$$

и для завершения доказательства предложения нужно перейти к пределу при $n\to\infty$. Заметим для этого, что $\tilde{\Delta}(\mathrm{I}+\mathrm{P}_n\mathrm{K}) \to \tilde{\Delta}(\mathrm{I}+\mathrm{K})$, а выражение под знаком exp сходится в $L_2(\mathscr{H}_-, \mu)$ к $\frac{1}{2}\theta_2(\mathrm{K})(x) - \frac{1}{2}\| \mathrm{K}(\mathrm{I}+\mathrm{K})^{-1/2} x \|^2$.

Поэтому существует сходящаяся почти везде подпоследовательность, а поскольку заранее известно, что $r_n(x)$ сходится в $L_1(\mathscr{H}_-, \mu)$, мы получаем формулу (4.15).

Следствие 4.2. *Пусть* μ_{C_1}, μ_{C_2} *—пара гауссовых мер в* $\mathscr{H}_-$ *с ограниченными и обратимыми в* $\mathscr{H}_0$ *корреляционными операторами* C_1, C_2 *Если* $\mathrm{K} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2 \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$, *то* $\mu_{C_2} \sim \mu_{C_1}$.

Действительно, можно провести замену переменных так, чтобы после перенормировки пространства $\mathscr{H}_0$ мера μ_{C_1} превратилась в μ_{I}, а μ_{C_2} в $\mu_{\mathrm{I}+\mathrm{K}C_1^{-1}}$, причем $\mathrm{K}C_1^{-1} \in$

$\in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$.

Теперь мы уже можем получить окончательный результат.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathrm{C} = \mathrm{C}^* \geqslant 0$ *--ограниченный в* $\mathscr{H}_0$ *оператор, имеющий ограниченный обратный* C^{-1}. *Для того чтобы сосредоточенная в* $\mathscr{H}_-$ *гауссова мера* μ_C *была эквивалентна канонической* μ_I, *необходима и достаточна представимость корреляционного оператора в виде* $C = I + K$, $\mathrm{K} \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$. *При нарушении этого условия меры* μ_C *и* μ_I *ортогональны.*

Доказательство. Достаточность следует из предложения 4.3.
Для доказательства необходимости заменим оператор C оператором $C+K$ $(K \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0))$, имеющим полную систему собственных векторов (такой оператор K существует в силу известной теоремы Неймана). При этом $\mu_{C+K} \sim \mu_C$. После такой замены можно при помощи уже использованного выше метода перейти к пространствам последовательностей, в которых соответствующие меры $\tilde{\mu}_{C+K}$ и $\tilde{\mu}_I$ имеют диагональные корреляционные матрицы с собственными числами соответственно λ_k^2, $\sigma_k^2 = 1$. В силу предложения 4.2 для этих мер, а значит, и для μ_{C+K}, μ_C, имеет место альтернатива: они либо эквивалентны, либо сингулярны, а условие эквивалентности принимает вид соотношения $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_k - 1)^2}{\lambda_k} < \infty$,

которое означает, что
$[(C+K)^{1/2} - I](C+K)^{-1/4} = K_1 \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$, откуда следует представление $C = I + K_2$, где $K_2 = K_1[(C+K)^{1/4} \times$
$\times (I + (C+K)^{1/2}) - I] \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$.

Замечание 4.3. В приложениях бывают удобны другие формы выражения для плотности $\frac{\mu_C(dx)}{\mu(dx)}$.

Рассмотрим прежде всего оператор $\hat{K} = C^{-1} - I$, который так же, как и K, принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$. Из очевидного соотношения $K + \hat{K} + K\hat{K} = 0$ следует, в силу ядерности $K\hat{K}$, что

$$\theta_2(K)(x) - \| KC^{-1/2}x \|^2 =$$
$$= -\theta_2(\hat{K})(x) - \theta_2(K\hat{K})(x) - (K^2(I + \hat{K})x, x) =$$
$$= -\theta_2(\hat{K})(x) + \mathrm{Tr}\, K\hat{K} - (K(\hat{K} + K + \hat{K}K)x, x) =$$
$$= -\theta_2(\hat{K})(x) + \mathrm{Tr}\, K\hat{K}.$$

Используя формулу (4.15), получаем выражение

$$r(x) = \sqrt{\tilde{\Delta}(C^{-1})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_2(C^{-1} - I)(x)\right\}. \quad (4.16)$$

Пусть теперь $S \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_0)$ удовлетворяет соотношению $C^{-1} = (I + S^*)(I + S)$. При помощи простого преобразования, использующего соотношения

$$\tilde{\Delta}(I + S) = \tilde{\Delta}(I + S^*), \quad \mathrm{Tr}\, S = \mathrm{Tr}\, S^*, \quad \theta_2(S) = \theta_2(S^*),$$

из (4.16) выводится формула

$$r(x) = \tilde{\Delta}(I + S) \exp\left\{-\theta_2(S)(x) - \frac{1}{2}\| Sx \|^2\right\}. \quad (4.17)$$

Замечание 4.4. Переформулируем результаты в терминах исходного гильбертова пространства *X*, в котором сосредоточены центрированные гауссовы меры μ_{B_1}, μ_{B_2} с ядерными корреляционными операторами B_1, B_2.

Пусть оператор $B_1^{-1/2}B_2B_1^{-1/2}$ *ограничен и обратим. Тогда, в зависимости от того, является ли оператор* $B_1^{-1/2}B_2B_1^{-1/2} - I$ *оператором Гильберта —Шмидта или нет, меры* μ_{B_1}, μ_{B_2} *эквивалентны или ортогональны. В случае эквивалентности плотность выражается любой из следующих формул:*

$$\frac{\mu_{B_2}(dx)}{\mu_{B_1}(dx)} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\Delta}(B_2B_1^{-1})}} \exp\frac{1}{2}\{\theta_2(B_2B_1^{-1} - I)(x) - \\ - ((B_2B_1^{-1})(B_2B_1^{-1} - I)^{-1/2}x, x)\} = \\ = \sqrt{\tilde{\Delta}(B_1B_2^{-1})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta_2(B_1B_2^{-1} - I)(x)\right\} = \\ = \tilde{\Delta}((B_2B_1^{-1})^{-1/2}) \exp\left\{-\theta_2((B_2B_1^{-1})^{-1/2} - I)(x) - \\ - \frac{1}{2}\|[(B_2B_1^{-1})^{-1/2} - I]x\|^2\right\}.$$

Замечание 4.5. При ядерном S формула (4.17) принимает более простой вид

$$r(x) = \Delta(I + S)\exp\left\{-(Sx, x) - \frac{1}{2}\|Sx\|^2\right\}.$$

4°. Абсолютная непрерывность мер, получающихся из гауссовых при некоторых преобразованиях пространства. Пусть $y = \Phi(x)$ — функция со значениями в пространстве X с мерой μ, определенная в некоторой окрестности U_{x_0} точки $x_0 \in X$ и обратимая в окрестности точки $y_0 = \Phi(x_0)$. Тогда в U_{x_0} определена мера $\mu^{\Phi^{-1}}$

$$\mu^{\Phi^{-1}}(A) = \mu(\Phi A).$$

Если f — непрерывная финитная функция с носителем, содержащимся в U_{y_0}, то

$$\int_X f(\Phi(x))\,\mu^{\Phi^{-1}}(dx) = \int_X f(y)\,\mu(dy).$$

Пусть $\mu^{\Phi^{-1}} \prec \mu$ и $\mathcal{J}(\Phi; x) = \frac{\mu^{\Phi^{-1}}(dx)}{\mu(dx)}$. Тогда выполняется соотношение

$$\int_X f(\Phi(x))\,\mathcal{J}(\Phi; x)\,\mu(dx) = \int_X f(y)\,\mu(dy), \quad (4.18)$$

где интегрирование справа фактически ведется по окрестности U_{y_0}.

Рассмотрим последовательно несколько частных случаев.

а) *Линейное преобразование.* Пусть $X = \mathscr{H}_-$, $\mu = \mu_I$ —

каноническая гауссова мера, $\Phi(x) = x + Sx$, где S — линейный измеримый оператор в $\mathscr{H}_-$, принадлежащий классу $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$. Мера $\mu^{\Phi^{-1}}$ в этом случае также гауссова с корреляционным оператором $(I+S)^{-1}(I+S^*)^{-1}$.

Из теоремы 4.3 и замечания 4.1 следует, что $\mu^{\Phi^{-1}} \sim \mu$ и

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \tilde{\Delta}(I+S)\exp\left\{-\theta_2(S)(x) - \frac{1}{2}|Sx|^2\right\}. \quad (4.19)$$

Пусть теперь $\Phi(x) = (I+S)x + a = \Phi_1 x + a \ (a \in \mathscr{H}_0)$.

Мера $\mu^{\Phi^{-1}}$ имеет тот же корреляционный оператор, что и $\mu^{\Phi_1^{-1}}$ и среднее $-(I+S)^{-1}a$. Поэтому (см. теорему 4.2)

$$\frac{\mu^{\Phi^{-1}}(dx)}{\mu^{\Phi_1^{-1}}(dx)} = \exp\left\{-((I+S)x,\ a) - \frac{1}{2}\|a\|^2\right\}.$$

Комбинируя полученное выражение с (4.19), получаем формулу

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \tilde{\Delta}(I+S)\exp\left\{-\theta(S+a)(x) - \frac{1}{2}|Sx+a|^2\right\}, \quad (4.20)$$

где $\theta(S+a)(x) = \theta_2(S)(x) + \theta_0(a)(x) = \theta_2(S)(x) + (a,\ x)$.

б) *Нелинейное преобразование в конечномерном пространстве.* Пусть $X = \mathbb{R}^n$, Φ — дифференцируемое в окрестности U_{x_0} отображение, причем $\det \Phi'(x_0) \neq 0$. Введем вспомогательное линейное отображение $z = C(x) = y_0 + \Phi'(x_0)(x - x_0)$ и нелинейное $y = C_1(z) = \Phi(x_0 + [\Phi'(x_0)]^{-1}(z - y_0))$. В этих обозначениях $\Phi = C_1C$ и

$$\left.\frac{\mu^{\Phi^{-1}}(dx)}{\mu(dx)}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mu^{C_0^{-1}C_1^{-1}}(dx)\,\mu^{C^{-1}}(dx)}{\mu^{C^{-1}}(dx)\,\mu(dx)}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\mu^{C^{-1}}(dx)}{\mu(dx)}\right|_{x=x_0},$$

так как $C_1'(Cx_0) = I$, и потому

$$\left.\frac{\mu^{C_0^{-1}C_1^{-1}}(dx)}{\mu^{C^{-1}}(dx)}\right|_{x=x_0} = 1.$$

Используя формулу (4.20), получаем выражение для плотности

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \Delta(\Phi'(x))\exp\left\{-(C(x)-x,\ x) - \frac{1}{2}|C(x)-x|^2\right\} =$$
$$= \tilde{\Delta}(\Phi'(x))\exp\left\{-l(\Phi - I)(x) - \frac{1}{2}|\Phi(x)-x|^2\right\},$$

сначала для $x = x_0$, а затем и для $x \in U_{x_0}$, поскольку точка x_0 может быть заменена произвольной точкой $x \in U_{x_0}$. Напомним, что $l(f)(x) = (f(x),\ x) - \operatorname{Tr} f'(x)$ (см. замечание 3.5).

в) *Нелинейное преобразование в бесконечномерном пространстве.* Пусть снова $X = \mathscr{H}_-$, $\mu = \nu$—каноническаягауссова мера и отображение $y = \Phi(x)$ в окрестности точки $x_0 \in \mathscr{H}_-$ имеет вид

$\Phi(x) = x + S'(x)$, где S *(х)* — функция, удовлетворяющая следующим условиям:
А —1) S — непрерывное и ограниченное отображение окрестности U_{x_0} в пространство $\mathscr{H}_0$.
А — 2) В каждой точке $x \in U_{x_0}$ существует $\mathscr{H}_0$— производная $S'(x) \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$, причем S'есть непрерывное и ограниченное отображение U_{x_0} в $\mathscr{L}_2(\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_0)$.
А — 3) Линейный оператор $[I + S'(x)]^{-1}$ ограничен в $\mathscr{H}_0$. при $x \in U_{x_0}$.
Для исследования абсолютной непрерывности

$$\mu^{\Phi} \prec \mu$$

воспользуемся конечномерными аппроксимациями.
Пусть Р — конечномерный ортопроектор в $\mathscr{H}$ со значениями в $\mathscr{H}$ $(P \in \mathscr{F}$ и $Q = I - P)$. Рассмотрим отображение

$$\Phi^{(P)}(x) = x + PS(x_0 + P(x - x_0)).$$

Представим меру μ в виде произведения $\mu = \mu_P \times \mu_Q$, соответствующего разложению пространства $\mathscr{H}_- = P\mathscr{H}_0 \dotplus \mathscr{H}_-^{(P)}$ (см. (2.12)). Сужая при необходимости окрестность U_{x_0}, можно считать ее произведением окрестностей проекций $Px_0 \in P\mathscr{H}_0$ и $Qx_0 \in \mathscr{H}_-^{(P)}$ точки x_0:
$U_{x_0} = U_{Px_0} \times U_{Qx_0}$. На этом произведении отображение $\Phi_{(x)}^{(P)}$, как легко видеть, эквивалентно паре преобразований

$$\Phi^{(P)} = (\Phi_P^{(P)}, \Phi_Q^{(P)}):$$

$$\Phi_P^{(P)}(Px) = Px + PS(x_0 + P(x - x_0)),$$

$$\Phi_Q^{(P)}(Qx) = Qx.$$

Первое из них конечномерное, второе — тождественное. Поэтому изучение свойств $\Phi^{(P)}$ сводится к изучению свойств конечномерного преобразования $\Phi_P^{(P)}$ в пространстве $P\mathscr{H}_0$.
Прежде всего заметим, что $\Phi_P^{(P)\prime}(Px)|_{x = x_0} = P + PS'(x_0)P$.
Этот оператор обратим в Р $\mathscr{H}_0$. если обратим в $\mathscr{H}_0$.оператор $I \dotplus PS'(x_0)P$. Из А — 2) и А — 3) следует, что это свойство выполняется, если Р достаточно хорошо аппроксимирует I, так что $\sigma_2(PS'(x_0)P - S'(x_0)) < \varepsilon$. Из формулы (4.21) при этом получается

$$\mathcal{J}(\Phi^{(P)};\ x_0) = \mathcal{J}(\Phi_P^{(P)};\ Px_0) =$$

$$= \Delta(I + PS'(Px_0)P)\exp\left\{-l(PS)(x_0) - \frac{1}{2}|PS(x_0)|^2\right\}.$$

Эта формула справедлива и в некоторой окрестности точки x_0, в точках которой оператор $I + S'(x_0)$ обратим.

Для функций f с носителем в этой окрестности и отображения Φ_P формула (4.21) принимает вид

$$\int_{\mathscr{H}_-} f(x+\mathrm{PS}(x))\,\tilde{\Delta}(\mathrm{I}+\mathrm{PS}'(\mathrm{P}x)\,\mathrm{P})\times$$
$$\times\exp\left\{-l(\mathrm{PS})(x)-\frac{1}{2}\|\mathrm{PS}(x)\|^2\right\}\mu(dx)=$$
$$=\int_{\mathscr{H}_-} f(x)\,\mu(dx). \qquad (4.22)$$

Дальнейший шаг состоит в том, чтобы сделать в (4.22) предельный переход при $\mathrm{P}\to\mathrm{I}$.

Из А—1) и А —2) и оценки (3.27[1]) следует среднеквадратичная сходимость

$$l(\mathrm{PS})(x)\to l(\mathrm{S})(x)$$

Поэтому существует последовательность P_n, для которой подынтегральное выражение в левой части (4.22) сходится почти везде в U к $f(\Phi(x))\,\mathscr{F}(\Phi;\ x)$, где

$$\mathscr{F}(\Phi;\ x)=\tilde{\Delta}(\mathrm{I}+\mathrm{S}'(x))\exp\left\{-l(\mathrm{S})(x)-\frac{1}{2}\|\mathrm{S}(x)\|^2\right\}.$$

Остается проверить выполнение какого-нибудь условия, дающего возможность сделать предельный переход под знаком интеграла.

Предложение 4.4. *Имеет место оценка*

$$\int_{U_{x_0}}|\mathscr{F}(\mathrm{I}+\mathrm{S};\ x)|^2\,\mu(dx)\leqslant C\int_{U_{x_0}}\mathscr{F}(\mathrm{I}+2\mathrm{S};\ x)\,\mu(dx)$$

где

$$C=\sup_{U_{x_0}}\left\{\Delta\left[(\mathrm{I}+\mathrm{S}'^2(x))(\mathrm{I}+2\mathrm{S}'(x))^{-1}\right]e^{\|\mathrm{S}(x)\|^2}\right\}.$$

Доказательство. Используя свойство определителей и тот факт, что $\mathrm{S}'^2(\mathrm{I}+2\mathrm{S}')^{-1}\in N$, при помощи непосредственного подсчета получаем соотношение

$$\frac{|\mathscr{F}(\mathrm{I}+\mathrm{S};\ x)|^2}{\mathscr{F}(\mathrm{I}+2\mathrm{S};\ x)}=\frac{\tilde{\Delta}^2(\mathrm{I}+\mathrm{S}')}{\tilde{\Delta}(\mathrm{I}+2\mathrm{S}')}e^{\|\mathrm{S}(x)\|^2}=$$
$$=\Delta\left[(\mathrm{I}+\mathrm{S}'^2(x)(\mathrm{I}+2\mathrm{S}'(x))^{-1})\right]e^{\|\mathrm{S}(x)\|^2}, \qquad (4.23)$$

которое и доказывает предложение.

Теорема 4.4. *Пусть функция* $\Phi(x)=x+\mathrm{S}(x)$ *удовлетворяет в окрестности* U_{x_0} *точки* $x_0\in\mathscr{H}_-$ *условиям* А — 1), А —2), А — 3). *Тогда в этой окрестности меоы* $\mu^{\Phi^{-1}}$ *и* μ *эквивалентны, причем плотность* $\mathscr{F}(\Phi;\ x)=\dfrac{\mu^{\Phi^{-1}}(dx)}{\mu(dx)}$ *интегрируема в квадрате по* U_{x_0} *и представима в виде*

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \tilde{\Delta}(\mathrm{I} + \mathrm{S}'(x)) \exp\left\{-l(s)(x) - \frac{1}{2}|\mathrm{S}x|^2\right\}. \quad (4.24)$$

Доказательство. Для отображений $\Phi^{(\mathrm{P}_n)}(x) = x + \mathrm{P}_n\mathrm{S}(\mathrm{P}_n x)$ утверждение доказано. Из (4.22) следует при f=1, что $\int\limits_{U_{x_0}} \mathcal{J}(\Phi^{(\mathrm{P}_n)};\ x)\,\mu(dx) \leqslant 1$, и потому, в силу полученной в предложении 4.4 оценки,

$$\int\limits_{U_{x_0}} |\mathcal{J}(\Phi^{(\mathrm{P}_n)};\ x)|^2 \times \mu(dx) \leqslant \mathrm{const}\ \ (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Этого достаточно для обоснования предельного перехода при $n\to\infty$ в (4.22). Интегрируемость в квадрате $\mathcal{J}(\Phi;\ x)$ следует из леммы Фату.

Следствие 4.3. *Если в условиях теоремы дополнительно* $\mathrm{S}'(x) \in N(\mathscr{K}_0,\ \mathscr{K}_0)$, *то*

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \Delta(\mathrm{I} + \mathrm{S}'(x)) \exp\left\{-(\mathrm{S}(x),\ x) - \frac{1}{2}|\mathrm{S}x|^2\right\}. \quad (4.25)$$

Замечание 4.6. Переформулируем полученные результаты в терминах гауссовой меры μ_{B} с невырожденным ядерным корреляционным оператором B в гильбертовом пространстве X.

Пусть $\Phi(x) = x + \mathrm{S}(x)$ — отображение, определенное в окрестности U_{x_0} пространства X, удовлетворяющее следующим условиям:

A— 1) Функция $\Lambda(x) = \mathrm{B}^{-1/2}\mathrm{S}(x)$—непрерывное и ограниченное отображение окрестности U_{x_0} в X.

A —2) функция $\Lambda(x + \mathrm{B}^{1/2}y)$ дифференцируема вдоль X по y при каждом $x \in$ X и $\mathrm{C}(x) = \Lambda'(x)\,\mathrm{B}^{1/2}$— непрерывное и ограниченное отображение U_{x_0} в $\mathscr{L}_2(X,\ X)$.

A — 3) При $x \in U_{x_0}$ оператор $[\mathrm{I} + \mathrm{C}(x)]^{-1}$ограничен в X.

Тогда в окрестности U_{x_0} $\mu^{\Phi^{-1}} \prec \mu$ и справедлива формула

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \tilde{\Delta}(\mathrm{I} + \mathrm{C}(x)) \exp\left\{-l^{(\mathrm{B})}_{\mathrm{B}^{-1/2}}(\Lambda)(x) - \frac{1}{2}|\Lambda(x)|^2\right\}, \quad (4.26)$$

где $l^{(\mathrm{B})}_{\mathrm{B}^{-1/2}}(\Lambda)(x)$—измеримый линейный функционал (см. замечание 3.6), являющийся расширением функционала $(\Lambda(x),\ \mathrm{B}^{1/2}x) - \mathrm{Tr}\,\mathrm{C}(x)$, определенного при $x \in \mathscr{D}_{\mathrm{B}^{-1/2}}$.

Если при этом функция $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{S}(x) = \mathrm{B}^{-1/2}\Lambda(x)$ непрерывна и $\mathrm{C}(x) \in N$, то

$$\mathcal{J}(\Phi;\ x) = \Delta[\mathrm{I} + \mathrm{C}(x)] \exp\left\{-(\mathrm{B}^{-1/2}\Lambda(x),\ x) - \frac{1}{2}|\Lambda(x)|^2\right\}. \quad (4.27)$$

2.5. Преобразование Фурье—Винера

1°. Преобразование Фурье по гауссовой мере. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\omega) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)\, e^{i(\omega,\, x)} \mu(dx) \qquad (5.1)$$

для функции $f \in \mathfrak{H} = L_2(\mathscr{H}_-, \mathbb{R}^1, \mu)$ по канонической гауссовой мере μ. Оно определено при $\omega \in \mathscr{H}_0$, так какв этом случае (ω, x) — измеримый линейный функционал на $\mathscr{H}_-$. Простое вычисление показывает, что

$$|\tilde{f}(\omega)| \leqslant \|f\|_{\mathfrak{H}}, \quad |\tilde{f}(\omega_2) - \tilde{f}(\omega_1)| \leqslant \|f\|_{\mathfrak{H}} \|\omega_2 - \omega_1\|_0. \qquad (5.2)$$

Определение 5.1. Назовем *преобразованием Фурье —Винера функции* $f \in \mathfrak{H}$ определенную на $\mathscr{H}_0$ функцию $\hat{f}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\, e^{\frac{1}{2}\|\omega\|^2}$.

Предложение 5.1. *Если* $f(x) = f(\mathrm{P}x)$ $(\mathrm{P} \in \mathscr{P})$*—цилиндрическая функция, то функция* $\hat{f}$ *также цилиндрична:*

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}(\mathrm{P}\omega) = e^{\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2} \tilde{f}(\mathrm{P}\omega) \qquad (5.3)$$

и, следовательно, продолжается как цилиндрическая функция на $\mathscr{H}_-$.

Доказательство. Используя (2.12), выводим

$$\tilde{f}(\omega) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(\mathrm{P}x) \exp\{i(\mathrm{P}x, \omega) + i((\mathrm{I}-\mathrm{P})x, \omega)\}\, \mu(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{H}} f(\mathrm{P}x)\, e^{i(\mathrm{P}x,\, \omega)} \mu^{(\mathrm{P})}(dx) \int\limits_{\mathscr{H}_-^{(\mathrm{P})}} e^{i((\mathrm{I}-\mathrm{P})x,\, \omega)} \mu^{(\mathrm{I}-\mathrm{P})}(dx) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\|(\mathrm{I}-\mathrm{P})\omega\|^2} \tilde{f}(\mathrm{P}\omega),$$

откуда и следует (5.3).

Предложение 5.2. *Пусть* $f \in \mathfrak{H}$, $g_{\mathrm{P}}(\omega) = \hat{f}(\mathrm{P}\omega)$ *Имеет место следующая формула обращения преобразования Фурье — Винера:*

$$f(x) = \lim_{\mathrm{P} \to 1} \tilde{g}_{\mathrm{P}}(-\mathrm{P}x).$$

Доказательство. При помощи (2.12) получаем

$$g_{\mathrm{P}}(\omega)=\exp\left(\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2\right)\int\limits_{\mathscr{X}_-} f(x)\,e^{i(x,\,\mathrm{P}\omega)}\mu(dx)=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2}\int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}}\left\{\int\limits_{\mathscr{X}_-^{(\mathrm{P})}} f(\mathrm{P}x+(\mathrm{I}-\mathrm{P})x)\mu^{(\mathrm{I}-\mathrm{P})}(dx)\right\}\times$$

$$\times e^{i(\mathrm{P}x,\,\mathrm{P}\omega)}\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2}d(\mathrm{P}x).$$

Это показывает, что преобразование Фурье функции $f^{(\mathrm{P})}(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2\right\}$, где $f^{(\mathrm{P})}(x)=\int\limits_{\mathscr{X}_-^{(\mathrm{P})}} f(\mathrm{P}x+(\mathrm{I}-\mathrm{P})y)\times$

$\times\mu^{(\mathrm{I}-\mathrm{P})}(dy)$, есть $g_{\mathrm{P}}(\omega)\,e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2}$. Обращая преобразование Фурье по конечномерному пространству $\mathrm{P}\mathscr{X}$, находим

$$f^{(\mathrm{P})}(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2}\int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} g_{\mathrm{P}}(\omega)\,e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2}e^{-i(\mathrm{P}x,\,\mathrm{P}\omega)}d(\mathrm{P}\omega)=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2}\int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} g_{\mathrm{P}}(\mathrm{P}\omega)\,e^{-i(\mathrm{P}x,\,\mathrm{P}\omega)}\mu^{(\mathrm{P})}(d\omega)=\hat{g}_{\mathrm{P}}(-\mathrm{P}x).\tag{5.4}$$

Остается воспользоваться предложением 3.1, из которого следует, что $f(x)=\lim\limits_{\mathrm{P}\to\mathrm{I}} f^{(\mathrm{P})}(x)\pmod{\mu}$.

Замечание 5.1. Пусть функция $\hat{f}$ (ω) распространяется на $\mathscr{X}_-$ так, что в (5.4) возможен предельный переход под знаком интеграла. Тогда

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}\|x\|^2}\int\limits_{\mathscr{X}_-}\hat{f}(\omega)\,e^{-i(x,\,\omega)}\mu(d\omega)=\hat{\hat{f}}(-x)\quad(x\in\mathscr{X}_0).\tag{5.6}$$

Если функция *f(x)* равномерно непрерывна на $\mathscr{X}_-$, эта формула однозначно определяет ее при всех $x\in\mathscr{X}_-$.

В частности, сказанное справедливо для цилиндрической функции *f*, так как в этом случае и $\hat{f}$ цилиндрична.

Введем в рассмотрение класс функций, для которых преобразование Фурье— Винера обладает более естественными свойствами. Пусть $\mu_{\frac{1}{2}\mathrm{I}}$ — гауссова мера в $\mathscr{X}_-$ с корреляционным оператором $\frac{1}{2}\mathrm{I}$; $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}=L_2\left(\mathscr{X}_-,\ \mathbb{R}^1,\ \mu_{\frac{1}{2}\mathrm{I}}\right)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$, состоящее из функций, для которых

$$\|f\|^2_{\tilde{\mathfrak{H}}} = \int\limits_{\mathscr{X}_-} |f(x)|^2 \mu(dx) + \int\limits_{\mathscr{X}_-} |f(x)|^2 \mu_{\frac{1}{2}I}(dx) =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{X}_-} \left\{ |f(x)|^2 + \left| f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 \right\} \mu(dx) < \infty.$$

Это пространство содержит класс *G* борелевских функций, подчиняющихся оценке

$$|f(x)| \leqslant Ae^{\alpha\|x\|^2} \quad \left(\alpha < \frac{1}{4}\right).$$

Линейное множество *G*, очевидно, плотно в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Теорема 5.1. *Преобразование Фурье — Винера продолжается до унитарного в* $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ *оператора* $\hat{f}$ =U*f*, *так что выполняется равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{\mathscr{X}_-} \left| f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 \mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{X}_-} \left| \hat{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 \mu(d\omega). \quad (5.6)$$

Обратное преобразование дается формулой

$$(\mathrm{U}^{-1}f)(x) = \hat{f}(-x). \quad (5.7)$$

Доказательство. Пусть сначала $f(x) = f(\mathrm{P}x)$ —цилиндрическая функция класса G. При этом $f^{(\mathrm{P})}(x) = f(x)$ и, как показано при доказательстве предложения 5.3, преобразование Фурье функции $f(\mathrm{P}x)e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2}$ в пространстве $\mathrm{P}\mathscr{X}$ равно $\hat{f}(\omega)e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2}$. Поэтому выполняется равенство Парсеваля

$$\int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} \left| f(\mathrm{P}x)e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}x\|^2}\right|^2 dx = \int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} \hat{f}(\mathrm{P}\omega)e^{-\frac{1}{2}\|\mathrm{P}\omega\|^2} d\omega,$$

которое после замены переменной принимает вид

$$\int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} \left| f\left(\frac{\mathrm{P}x}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 \mu^{(\mathrm{P})}(dx) = \int\limits_{\mathrm{P}\mathscr{X}} \left| \hat{f}\left(\frac{\mathrm{P}\omega}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 \mu^{(\mathrm{P})}(d\omega),$$

эквивалентный в силу цилиндричности функций *f* и $\hat{f}$ формуле (5.6). Таким образом, определенный на плотном в $\mathfrak{H}_{1/2}$ множестве оператор U изометричен. Поэтому он продолжается с сохранением изометричности на все $\mathfrak{H}_{1/2}$. Точно так же показывается, что аналогичными свойствами обладает оператор $\mathrm{V}f(x) = \hat{f}(-x)$. Из замечания 5.1 следует, что на плотном множестве, состоящем из цилиндрических функций, выполняется равенство $\mathrm{UV} = \mathrm{VU} = \mathrm{I}$, которое по непрерывности продолжается на все пространство.

2°. Преобразование Фурье — Винера целых функций. Пусть $\tilde{\mathscr{H}}_-$ — комплексная оболочка вещественного гильбертова пространства $\mathscr{H}_-$, т. е. ортогональная сумма двух экземпляров этого пространства, элементы которой записываются в виде $z = x + iy \quad (x,\ y \in \mathscr{H}_-)$ с нормой $\|x + iy\|_-^2 = \|x\|^2 + i\|y\|^2$.

Обозначим через Γ_α класс функций $f(z)$, определенных на $\tilde{\mathscr{H}}_-$ и обладающих следующими свойствами-.

а) $f(x + \lambda y)$ — целая функция комплексной переменной λ при каждых $x,\ y \in \mathscr{H}_-$;

б) выполняется оценка $|f(x + \lambda y)| \leqslant Ae^{\alpha\|x+\lambda y\|^2}$ при некотором $A=A_f>0$.

Отметим, что если $f \in \Gamma_\alpha \quad (\alpha < 1/4)$, то при фиксированном y имеем $f_{\lambda y}(x) = f(x + \lambda y) \in G$.

Введем интегральное преобразование

$$\mathrm{F}_f(\lambda,\ y) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x + \lambda y)\,\mu(dx) \qquad (y \in \mathscr{H}_-). \quad (5.8)$$

Очевидно, что при $f \in \Gamma_\alpha \quad (\alpha < 1/2)$ функция $\mathrm{F}_f(\lambda,\ y)$ определена и принадлежит классу $\Gamma_{2\alpha|\lambda|}$ для $\alpha < 1/4$ и классу G при $|\lambda| \leqslant 1,\quad \alpha < 1/4$. Преобразование (5.8) оставляет инвариантным класс $\Gamma_{+0} = \bigcap\limits_{\alpha>0} \Gamma_\alpha$.

Предложение 5.3. *Преобразование* (5.8) *для функций класса* Γ_α *при* $\lambda = i$ *совпадает с преобразованием Фурье — Винера*

$$\mathrm{F}_f(i,\ y) = \tilde{f}(y) \qquad (y \in \mathscr{H}_-). \quad (5.9)$$

Если $\tilde{f} \in \Gamma_\alpha$, *то имеет место формула обращения*

$$f(x) = \mathrm{F}_{\tilde{f}}(-i,\ x) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} \tilde{f}(y - ix)\,\nu(dy) \qquad (x \in \mathscr{H}_-). \quad (5.10)$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{F}_f(\lambda,\ y)$ при $y \in \mathscr{H}_0$, и пусть сначала λ>0. Тогда, в силу (4.13), имеем

$$\mathrm{F}_f(\lambda,\ y) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x + \lambda y)\,\mu(dx) = \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)\,\mu_{\lambda y}(dx) =$$

$$= e^{\frac{-\lambda^2}{2}\|y\|^2} \int\limits_{\mathscr{H}_-} f(x)\,e^{\lambda(x,\ y)}\,\mu(dx).$$

Функции, стоящие в левой и правой части равенства, определены при комплексных значениях λ и аналитичны. Это легко следует из оценок, которым подчиняются под-интегральные выражения. Они совпадают при λ >0, а значит, и при всех комплексных *X*. В частности, при λ = *i* получаем (5.9) для $y \in \mathscr{H}_0$. Если *f* — цилиндрическая функция, то обе части равенства в (5.9) цилиндричны, а потому продолжаются на $\mathscr{H}_-$ с сохранением равенства. Таким образом, операторы F_f и U*f* совпадают на плотном в $\mathfrak{H}$ множестве цилиндрических функций. Рассмотрим для $f \in \Gamma_\alpha$ аппроксимирующую последовательность цилиндрических функций $f_n(x) = f(P_n x)$. Эта последовательность имеет общую мажоранту и потому, как легко проверить, в пространстве $\mathfrak{H}_{1/2}$: $F_{f_n} \to F_f$, $Uf_n \to Uf$. Переходя к пределу, получаем (5.9) в общем случае. Так как все рассуждения применимы и к *f*, то формула (5.10) следует из (5.7).

3°. Связь преобразования Фурье —Винера с ортогональными полиномами.

Теорема 5.2. *Пусть* $A \in \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$. *Тогда*

$$\widehat{\theta_n(A)}(x) = i^n \tilde{A}(x) \qquad (x \in \mathscr{H}_0). \quad (5.11)$$

Доказательство. Пусть сначала $A \in \mathscr{L}_{20}^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ и, следовательно, функция $\tilde{A}(x) = A(x, \ldots, x)$ цилиндрична. Покажем, что при этом формула (5.11) справедлива. Для этого достаточно показать, что

$$\theta_n(A)(x) = i^n \int\limits_{\mathscr{H}_-} \tilde{A}(y) e^{-i(x, y)} \mu(dy) e^{\frac{1}{2}\|x\|^2} \qquad (x \in \mathscr{H}_0). \quad (5.12)$$

В силу линейности последнюю формулу достаточно проверить для операторов вида $A(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \varphi_1) \ldots$ $\ldots (x_n, \varphi_n)\psi$ $(\varphi_k \in \mathscr{H}_0, \ \psi \in \mathscr{H})$, а это можно сделать путем проверки (простой подстановкой) того, что правые части (5.12) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (3.27), однозначно определяющим θ_n. Таким образом, для цилиндрических операторов установлена формула (5.12), а вместе с ней получающаяся из нее путем обращения формула

$$e^{\frac{1}{2}\|x\|^2} \int\limits_{\mathscr{H}_-} \theta_n(A)(y) e^{i(x, y)} \mu(dy) = i^n A(x, \ldots, x). \quad (5.13)$$

Пусть теперь $A \in \mathscr{L}_2^n(\mathscr{H}, \mathscr{H})$ и

$$A = \lim_{k \to \infty} A_k,$$

$A_k \in \mathcal{L}^n_{20}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Легко видеть, что в (5. 13) можно провести почленный предельный переход, что и доказывает (5.11).

Следствие 5.1. *Пусть* $A_{n,j} \in \mathcal{L}^n_2(\mathcal{H}_-, \mathbb{R}^1)$ $(j = 1, 2, \ldots; n = 0, 1, \ldots)$ *— двойная последовательность операторов, для которой* $\{\theta_n(A_{n,j})(x)\}$*—полная ортонормированная система в* $L_2(\mathcal{H}_-, \mathbb{R}^1, \mu)$.

Из (5.13) *следует, что при* Im λ = 0 ;

$$\int\limits_{\mathcal{H}_-} \theta_n(A)(x)\exp\left\{i\lambda(x, y) + \frac{\lambda^2}{2}\|y\|^2\right\}\mu(dx) =$$
$$= (i\lambda)^n A(y, \ldots, y) \quad (y \in \mathcal{H}_0).$$

В силу аналитичности по λ *левая и правая части совпадают при всех* λ*, поэтому при* λ = — *i* *получаем соотношение*

$$\int\limits_{\mathcal{H}_-} \theta_n(A)(x)\exp\left\{(x, y) - \frac{1}{2}\|y\|^2\right\}\mu(dx) = A(y, \ldots, y),$$

которое влечет при каждом $y \in \mathcal{H}_0$ *ортогональное разложение в* $L_2(\mathcal{H}_-, \mathbb{R}^1, \mu)$:

$$e^{(x, y) - \frac{1}{2}\|y\|^2} = \sum_{n, j} A_{n,j}(y, \ldots, y)\,\theta_n(A_{n,j})(x).$$

Замечание 5.2. Легко видеть, что полиномы $\theta_n(A)(x\sqrt{2})$ ортогональны в пространстве $\mathfrak{H}_{1/2}$. Из предложения 5.3 следует, что образом полинома при преобразовании Фурье — Винера является полином, но в силу унитарности этого преобразования в $\mathfrak{H}_{1/2}$ соотношение ортогональности не должно нарушиться, а потому

$$U\theta_n(A)(x\sqrt{2}) = C_n\theta_n(A)(x\sqrt{2})$$

и, как нетрудно проверить, $C_n = l^n$.

Таким образом, для функции $g \in \mathfrak{H}_{1/2}$ преобразование Фурье — Винера можно выполнить так: если $g\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \sum c_{nj}\theta_n(A_{nj})(x)$, то

$$Ug(x) = \sum c_{nj} i^n \theta_n(A_{nj})(x\sqrt{2}).$$

2.6. Комплексные гауссовы квазимеры

1°. Интегралы Фейнмана. Пусть В —симметричный, положительный $((\mathrm{B}x,\ x)>0,\ \ x\neq 0)$ с плотной областью определения $\mathscr{D}$ в оператор в гильбертовом пространстве *X*. Рассмотрим зависящую от комплексного параметра z функцию $\chi(z,\ \theta)=\exp\left\{-\frac{z}{2}(\mathrm{B}\theta,\ \theta)\right\}$ $(\theta\in\mathscr{D}_{\mathrm{B}},\ \operatorname{Re}z\geqslant 0)$. Внутри правой полуплоскости (Re z≥0) она абсолютно интегрируема по S по любому содержащемуся в $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ конечномерному подпространству $\mathrm{P}X=X_{\mathrm{P}}$. При этих условиях функция $\chi(z,\ \theta)$ определяет в *X* квазимеру $\mu_{z\mathrm{B}}$, для которой она служит характеристическим функционалом. Далее мы будем считать В ограниченным $(\mathscr{D}_{\mathrm{B}}=X)$.

Из предложения 1.3.4 следует

Предложение 6.1. *Для каждой функции вида* $f(x)=\int_X e^{i(x,\ \theta)}\nu(d\theta)$,

где ν — *комплексная мера* $(\|\nu\|<\infty)$, *существует интеграл*

$$\int_X f(x)\,\mu_{z\mathrm{B}}(dx)=\lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{I}}\int_X f(\mathrm{P}x)\,\mu_{z\mathrm{B}}^{(\mathrm{P})}(dx)=$$

$$=\int_X e^{-\frac{z}{2}(\mathrm{B}\theta,\ \theta)}\nu(d\theta)\qquad(\operatorname{Re}z>0).\tag{6.1}$$

Особенно интересен случай $\operatorname{Re}z=0$; достаточно рассмотреть *z* = *i*. Квазимера $\nu_{i\mathrm{B}}$ называется *фейнмановской.* Конечномерное распределение

$$\frac{\mu_{z\mathrm{B}}^{(\mathrm{P})}(dx)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n z^n\det\mathrm{PBP}}}\exp\left\{-\frac{1}{2z}((\mathrm{PBP})^{-1}x,\ x)\right\}\tag{6.2}$$

при этом лишь локально интегрируемо в X_{P} и потому не имеет характеристического функционала в обычном понимании этого слова. Однако функция

$$\exp\left\{-\frac{z}{2}(\mathrm{B_P}\theta,\ 0)\right\}$$

представляет собою преобразование Фурье распределения (6.2) в классе обобщенных функций. Соотношение

$$\int_{X_{\mathrm{P}}} f(\mathrm{P}x)\,\mu_{z\mathrm{B}}^{(\mathrm{P})}(dx)=\int_X\chi(z,\ \mathrm{P}\theta)\,\nu(d\theta)$$

остается при этом справедливым для функций *f(x)*, интегрируемых по каждому конечномерному подпространству X_{P}. Поэтому имеет место ослабленный вариант предложения 6.1.

Предложение 6.2. *Если в условиях предложения* 6.1

$$\int\limits_{X_{\mathrm{P}}} |f(\mathrm{P}x)|\,dx < \infty \qquad (\mathrm{P} \in \mathscr{P}),$$

то формула (6.1) *сохраняется и при* Re z = 0.

Другой подход связан с изменением самого смысла интеграла по квазимере $\mu_{i\mathrm{B}}$. Положим по определению

$$\tilde{\int\limits_X} f(x)\,\mu_{i\mathrm{B}}(dx) = \lim_{z\to i} \int\limits_X f(x)\,\mu_{z\mathrm{B}}(dx), \qquad \textbf{(6.3)}$$

если предел существует.

Поскольку в условиях предложения 6.1 функция в правой части (6.3) аналитична внутри правой полуплоскости и непрерывна на ее границе, предельный переход при $z\to i$ в этой формуле корректен. Поэтому в условиях предложения 6.1 интеграл (6.3) существует и справедлива формула

$$\tilde{\int\limits_X} f(x)\,\mu_{i\mathrm{B}}(dx) = \int\limits_X e^{-\frac{i}{2}(\mathrm{B}\theta,\,\theta)}\,\nu(d\theta). \qquad (6.4)$$

2°. Интегрирование аналитических функционалов. Рассмотрим теперь другой класс функций, для которых существует интеграл (6.3). Пусть $\tilde{X} = X + iX$ —введенное в § 2.5 комплексное расширение пространства *X*. Рассмотрим функцию *f*(z), определенную на элементах вида z $= \lambda x,\ \lambda \in \overline{V},\ V = \left\{\lambda = \rho e^{i\gamma},\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{4}\right\}$ и

удовлетворяющую условиям:

В—1) *f(λx)* непрерывна относительно $x \in X$ при $\lambda \in \overline{V}$;

В—2) *f(λx)* аналитична по λ в области *V* при каждом $x \in X$ и непрерывна вплоть до границы (за исключением, возможно, λ = 0);

В—3) выполнена оценка

$$|f(xe^{i\gamma})| < Ce^{(\mathrm{A}x,\,x)\sin 2\gamma + g(x)}\,\varphi(\|x\|) \qquad (\mathrm{A} < \mathrm{B}^{-1}), \quad (6.5)$$

где $\varphi(\|x\|)$ ограничена и интегрируема в любом конечномерном пространстве, а $\frac{g(x)}{(\mathrm{B}^{-1}x,\,x)} \to 0$ при $\|x\| \to \infty$ равномерно на сфере в любом конечномерном пространстве.

Теорема 6.1. *Для функции f(x), удовлетворяющей условиям* В—1), В—2), В—3), *существует фейнмановский интеграл и имеет место формула*

$$\tilde{\int\limits_X} f(x)\,\mu_{i\mathrm{B}}(dx) = \int\limits_X f\left(e^{\frac{\pi i}{4}}x\right)\mu_{\mathrm{B}}(dx). \qquad \textbf{(6.6)}$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{P} \in \mathscr{P},\ \mathrm{B}_{\mathrm{P}} = \mathrm{PBP}$. Рассмотрим следующие интегралы по пространству X_{P}:

$$\int\limits_{X_P} f(Px)\,\mu_{\lambda^2 B_P}(dx) =$$
$$= \int\limits_{X_P} f(Px)\frac{1}{\sqrt{(2\pi\lambda^2)^n \det B_P}}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}(B_P^{-1}x,\ x)\right\}dx$$

и

$$\int\limits_{X_P} f(\lambda Px)\,\mu_{B_P}(dx) =$$
$$= \int\limits_{X_P} f(\lambda Px)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B_P}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(B_P^{-1}x,\ x)\right\}dx.$$

Простая замена переменной показывает, что они совпадают при $\lambda > 0$. Подынтегральные выражения при каждом x аналитичны по λ в области V и непрерывны в $\bar{V}\setminus 0$. Покажем, что подынтегральные выражения мажорируются равномерно относительно λ в области

$$V_m = V \cap \left\{\operatorname{Re}\lambda^2 \geqslant \frac{1}{m},\ |\lambda| \geqslant \frac{1}{2}\right\}\ (m = 1, 2, \ldots)$$

интегрируемыми функциями. При этом оба интеграла будут представлять аналитические в $\bigcup\limits_m V_m = \tilde{V}$ функции, и из совпадения их при $\lambda > 0$ следует совпадение в области $\tilde{V}$.

Имеем при $\lambda \in V_m$

$$\left|f(Px)\frac{1}{\sqrt{(2\pi\lambda^2)^n \det B_P}}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda^2}(B_P^{-1}x,\ x)\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\varphi(\|x\|)\frac{\exp\left\{g(x) - \operatorname{Re}\frac{\lambda^{-2}}{2}(B_P^{-1}x,\ x)\right\}}{|\lambda|^n(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det B_P}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varphi(\|x\|)\exp\left\{-\frac{1}{2m}(B_P^{-1}x,\ x)\left(1 - \frac{mg(x)}{(B_P^{-1}x,\ x)}\right)\right\} \leqslant C_2\varphi(\|x\|)$$

при достаточно большой $\|x\|$.

С другой стороны,

$$\left|f(\lambda Px)\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det B_P}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(B_P^{-1}x,\ x)\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C\varphi(\|x\|)}{(2\pi)^{n/2}\det B_P}\exp\{(A_P x,\ x) + 2g(x) - (B_P^{-1}x,\ x)\} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varphi(\|x\|)\exp\{(A_P x,\ x) - (1-\varepsilon)(B_P^{-1}x,\ x)\} \leqslant C_2\varphi(\|x\|)$$

при достаточно больших $x \in X_P$, так как в конечномерном пространстве из $A_P < B_P^{-1}$ следует, что $A_P < (1-\varepsilon)B_P^{-1}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Итак, при $\lambda \in \tilde{V}$

$$\int_{X_P} f(Px)\,\mu_{\lambda^2 B_P}(dx) = \int_{X_P} f(\lambda Px)\,\mu_{B_P}(dx) = \int_X f(\lambda Px)\,\mu_B(dx).$$

Но из непрерывности *f* по *x* и оценки (6.5) следует, что в правой части можно перейти к пределу при P→I.

Таким образом, при $\lambda \in \tilde{V}$ существует

$$\int_X f(x)\,\mu_{\lambda^2 B}(dx) = \lim_{P\to I} \int_X f(Px)\,\mu_{\lambda^2 B_P}(dx) = \int_X f(\lambda x)\,\mu_B(dx).$$

Остается заметить, что правая часть непрерывна по λ в $\bar{V}$, в частности, при $\lambda = i \in \tilde{\bar{V}}$, а следовательно, существует

$$\tilde{\int_X} f(x)\,\mu_{iB}(dx) = \lim_{\lambda^2\to i} \int_X f(x)\,\mu_{\lambda^2 B}(dx) = \int_X f\left(e^{\frac{\pi i}{4}}x\right)\mu_B(dx).$$

3°. Вычисление некоторых фейнмановских интегралов.

а) Пусть $f(x) = F((x, \varphi_1), \ldots, (x, \varphi_n)), \varphi_k \in X$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $F(x_1, \ldots, x_n)$— интегрируемая в $\mathbb{R}^n$ по гауссовой мере функция. Отображение $x \to (x_1, \ldots, x_n)$ $(x_k = (x, \varphi_k))$ переводит *X* в $\mathbb{R}^n$, а квазимеру с корреляционным оператором $\lambda^2 B$ в комплексную гауссову квазимеру в $\mathbb{R}^n$ с корреляционной матрицей $\lambda^2 B_n = \lambda^2 \| (B\varphi_j, \varphi_k) \|$. Поэтому

$$\int_X F((x, \varphi_1), \ldots, (x, \varphi_n))\,\mu_{iB}(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} F(y_1, \ldots, y_n)\,\mu_{iB_n}(dy) =$$

$$= \lim_{\lambda^2\to i} \frac{1}{\sqrt{(2\pi i)^n \det B_n}} \int_{\mathbb{R}^n} F(y_1, \ldots, y_n)\, e^{-\frac{1}{2\lambda^2}(B_n y,\, y)}\,dy.$$

В частности, $\int_X e^{(a,\, x)}\mu_{\lambda^2 B}(dx) = e^{\frac{\lambda^2}{2}(Ba,\, a)}$, и переходя к пределу при $\lambda^2 \to i$, получаем

$$\tilde{\int_X} e^{(a,\, x)}\mu_{iB}(dx) = e^{\frac{i}{2}(Ba,\, a)}.$$

б) Функция $(Ax, x)^m$ при подстановке вместо *x* величины λ*x* превращается в функцию $\lambda^{2m}(Ax, x)^m$, удовлетворяющую нужным условиям при $\varphi(x) = (Ax, x)^m \times \exp\left\{-\sqrt{(B^{-1}x, x)}\right\}$. Поэтому

$$\tilde{\int_X} (Ax, x)^m\,\mu_{iB}(dx) = i^m \int_X (Ax, x)^m\,\mu_B(dx),$$

в частности,

$$\tilde{\int\limits_X} (Ax, x)\, \mu_{iB}(dx) = i \operatorname{Tr} AB;$$

$$\tilde{\int\limits_X} (Ax, x)^2\, \mu_{iB}(dx) = -\{[\operatorname{Tr} AB]^2 + 2 \operatorname{Tr}(AB)^2\}.$$

в) Функцияпри $f(x) = \exp\{i(A_1 x, x) - (A_2 x, x)\}$ $A_1 = A_1^*$, $A_2 \geq 0$ удовлетворяет условиям теоремы 6.1

Поэтому

$$\tilde{\int\limits_X} f(x)\, \mu_{iB}(dx) = \int\limits_X e^{-(A_1 x, x) - i(A_2 x, x)} \mu_B(dx) =$$

$$= \{\det[I + B^{1/2}(A_1 + iA_2) B^{1/2}]\}^{-1/2},$$

если $A_1 > B^{-1/2}$.

Исторически первой была изучена специальная гауссовская мера в пространстве непрерывных функций — винеровская, построенная Винером еще в 20-х годах XX в. Это было сделано в большой серии работ Р. Камерона, В. Мартина и их сотрудников.

Общее понятие гауссовой меры в бесконечномерном пространстве (банаховом) было введено в 1935 г. А. Н. Колмогоровым при помощи определенного в этой же работе характеристического функционала.

Описание гауссовых мер в гильбертовом пространстве при помощи ядерных операторов (теорема 2.1) было получено Э. Мурье.

И. Сигал рассматривал линейные преобразования канонической гауссовой цилиндрической меры в гильбертовом пространстве. Продолжая эти исследования, Дж. Фельдман и независимо Я. Гаек установили, что гауссовы меры в гильбертовом пространстве могут быть либо эквивалентны, либо сингулярны, получили условие эквивалентности (см. теорему 4.3) и формулу для плотности в случае, когда корреляционный оператор удовлетворяет условию Tr (C— I) < ∞.

Вслед за этим Сейдмен рассмотрел абсолютно непрерывные линейные, а Л. Гросс — нелинейные преобразования канонической гауссовой меры в гильбертовом пространстве

В последующие годы теория преобразований гильбертова пространства с гауссовой мерой развивалась, уточнялась и детализировалась многими авторами.

Наиболее общие результаты по поводу нелинейных преобразований гауссовых мер получены А. В. Скороходом (который не ограничился гауссовыми мерами) и Р. Реймером. Приводимая нами теорема 4.4 представляет собою адаптированный на случай гильбертова пространства вариант теоремы Реймера. Наше изложение основывается на теореме Какутани и использует свойства измеримых функционалов.

Измеримые линейные и полилинейные функционалы для бесконечномерных пространств с мерой рассматривались в работах А. М. Вершика, О Г. Смолянова, Г. Е. Шилова и Фан Дык Тиня, Ю. А. Розанова , И. И. Гихмана и А. В. Скорохода.
Ортогональное разложение пространства функций, интегрируемых в квадрате по гауссовой мере, было для винеровскон меры построено разными способами в работах Р. Камерона и В Мартина и К. Ито. Для общих гауссовых мер оно рассматривалось А. М Вершиком.
Наш подход к этому разложению основан на использовании формул интегрирования по частям по гауссовой мере. Простейшая из них, формула (3.15), была получена в одном из вариантов Р. Камероном, позднее, в других вариантах, М. Донскером и Е. А. Новиковым.
Излагаемые здесь формулы были получены в работах Ю. Л. Далецкого и С. Н. Парамоновой в связи с исследованием стохастических интегралов по произвольным гауссовским случайным процессам.
Преобразования Фурье— Винера специально для меры Винера ввели Р. Камерон и В. Мартин. Эти работы были развиты и обобщены Р. В. Гусейновым и В. Г. Гаджиевым.
Метод интегрирования аналитических функционалов обобщает результат Р. Камерона и В. Мартина, относящийся к фейнмановским интегралам в узком смысле слова, получающимся путем аналитического продолжения винеровских. Теория интегрирования по абстрактной «мере Фейнмана» построена С. Альбеверио и Р. Хёг-Кроном и на другом пути А. В. Углановым.
Цилиндрическая гауссова мера (неотрицательная) всегда может быть продолжена до σ-аддитивной меры в некотором гильбертовом пространстве. Однако часто бывает полезным изучение более узких банаховых пространств, на которых она сосредоточена.
Л. Гросс начал изучение этого вопроса, введя понятие абстрактного винеровского пространства. X. Сато показал, что каждая гауссова мера в сепарабельном или рефлексивном банаховом пространстве может быть реализована как абстрактная мера Винера, Развитию этого направления были посвящены работы В. Гудмена, Р. Реймера (который именно в этих терминах построил теорию преобразования гауссовых мер), X. Куо и других авторов. В книге X. Куо имеется достаточно полное изложение некоторых аспектов этого направления.
Другое направление исследований гауссовых мер в банаховых пространствах, основанное на понятиях корреляционной теории, было начато в работах Н. Н. Вахании и продолжено С. А. Чобаняном и В. И. Тариеладзе.

Укажем, наконец, на глубокие исследования А. М. Вершика и В. Н. Судакова по различным вопросам теории меры в бесконечномерных пространствах, в ряде аспектов относящиеся и к гауссовым мерам.

3. Меры в линейных топологических пространствах

Эта глава посвящена рассмотрению неотрицательных цилиндрических мер в линейных топологических пространствах. Излагаются условия σ-аддитивности (обобщения теоремы Минлоса — Сазонова), условия слабой компактности мер (обобщение теорем Леви и Прохорова), а также условия слабой полноты пространства мер.

В качестве приложения мы получаем некоторые результаты спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве типа теоремы Стоуна

Изложение непосредственно опирается на некоторые результаты главы 1, при этом существенно используются сведения из теории линейных топологических пространств, приведенные в конце главы 1.

3.1. Условия σ-аддитивности неотрицательных цилиндрических мер в пространстве, сопряженном к локально выпуклому

1°. Достаточные условия σ-аддитивности. Сильная регулярность. Рассмотрим неотрицательную цилиндрическую меру μ в X' (ограниченную квазимеру). Напомним, что она описывается совокупностью согласованных между собой неотрицательных конечномерных распределений $\mu^{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)$ в конечномерных пространствах $\mathscr{L}^{(x_1, \ldots, x_n)}$, которые без ограничения общности можно считать гильбертовыми.

С другой стороны, цилиндрическая мера μ однозначно определяется своим характеристическим функционалом

$$\chi_\mu(x) = \int\limits_{X'} e^{i(x,\, y)} \mu(dy) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz} \mu^{(x)}(dz),$$

который представляет собою положительно определенную функцию на X, непрерывную в нуле вдоль каждого конечномерного подпространства $\mathscr{L} \subset X$.

Без ограничения общности можно считать, что $\mu(X')=1$ и $\chi_\mu(0)=1$. В главе 1 было показано, что цилиндрическая мера μ имеет σ-аддитивное продолжение в некотором линейном расширении пространства X', состоящем фактически из некоторой совокупности функций на X (не обязательно являющихся линейными непрерывными функционалами). Здесь будут указаны дополнительные условия, при которых эта σ-аддитивная мера сосредоточена в *X'*.

Установим сначала некоторые вспомогательные результаты.

Предложение 1.1. *Пусть* μ — *неотрицательная мера в* $\mathbb{R}^n$, $\chi_\mu(\theta)$ —*ее характеристический функционал,* A, B — *неотрицательные операторы в* $\mathbb{R}^n$. *Если на множестве* $\{y\in\mathbb{R}^n:\ (Ay,\ y)\leqslant 1\}$ *выполняется неравенство*

$$|1-\mathrm{Re}\,\chi_\mu(y)|\leqslant e,$$

то

$$\mu\{x\in\mathbb{R}^n:\ (Bx,\ x)>c\}\leqslant \leqslant\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left(e+\frac{2}{c}\,\mathrm{Tr}\,AB\right)\quad (c>0). \tag{1.1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что *c* = 1. Пусть ν_B — гауссова мера в $\mathbb{R}^n$, для которой

$$e^{-\frac{1}{2}(Bx,\ x)}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\ y)}\nu_B(dy).$$

Так как из (B*x, x)* ≥1 следует оценка

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left[1-e^{-\frac{1}{2}(Bx,\ x)}\right]\geqslant 1,$$

то можно записать цепочку соотношений

$$\mu\{x:\ (Bx,\ x)\geqslant 1\}= =\int_{(Bx,\ x)\geqslant 1}\mu(dx)\leqslant\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[1-e^{-\frac{1}{2}(Bx,\ x)}\right]\mu(dx)= =\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^n}\nu_B(dy)\int_{\mathbb{R}^n}[1-e^{i(x,\ y)}]\,\mu(dx)= =\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\int_{\mathbb{R}^n}[1-\mathrm{Re}\,\chi_\mu(y)]\,\nu_B(dy). \tag{1.2}$$

Заметим теперь, что при рассматриваемых условиях

$$\int_{(Ay,\ y)}[1-\mathrm{Re}\,\chi_\mu(y)]\,\nu_B(dy)\leqslant e\int_{(Ay,\ y)\leqslant 1}\nu_B(dy)\leqslant e$$

и, кроме того, в силу 2.2.6

$$\int\limits_{(Ay,\, y)>1} [1-\operatorname{Re}\chi_\mu(y)]\,\nu_B(dy) \leqslant 2 \int\limits_{(Ay,\, y)>1} \nu_B(dy) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{R^n} (Ay,\ y)\,\nu_B(dy) = 2\operatorname{Tr}(AB).$$

Складывая эти соотношения и учитывая (1.2), получаем требуемое.

Предложение 1.2. *Пусть X — конечномерное линейное пространство, Y = X' — его алгебраически сопряженное; p, q — гильбертовы преднормы в X, удовлетворяющие условию*
$p(x) \leqslant Cq(x) \quad (x \in X)$, $\psi_{p,q}$ *— каноническое отображение* X_q *на* X_p.
Пусть μ *— нормированная неотрицательная мера на борелевской* σ*-алгебре пространства Y, удовлетворяющая условию*

$$|1-\operatorname{Re}\chi_\mu(x)| \leqslant e \quad \textit{при} \quad p(x) \leqslant 1 \qquad (e<1).$$

Тогда для каждого r > 0 *мера дополнения к поляре множества* $S(q,\ r)=\{x \in X:\ q(x)<r\}$ *подчиняется оценке*

$$\mu\{Y \setminus S^0(q,\ r)\} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}[e+2r^2\sigma_2^2(\psi_{pq})], \qquad (1.3)$$

где σ_2*— норма Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Введем в X скалярное произведение следующим образом. Отождествим X_q с каким-нибудь прямым дополнением к N_q и пусть Q_q —проектор на X_q, соответствующий разложению

$$X = N_q \dotplus X_q. \qquad (1.4)$$

Положим

$$(x_1,\ x_2) = ((I-Q_q)\,x_1,\quad (I-Q_q)\,x_2)_0 + (Q_q x_1,\ Q_q x_2)_1,$$

где $(\cdot,\ \cdot)_1$—скалярное произведение в X_q, порождающее норму q, $(\cdot,\ \cdot)_0$— какое-нибудь скалярное произведение в N_q.

Пусть $p(x) = \|Ax\|$, где A —оператор в X (без ограничения общности неотрицательный). Имеет место аналогичное (1.4) разложение $X = N_p \dotplus X_p$, где $N_p = N(A) \supset N_q$ и $X_p = \Re(A) \perp N_p$. Оператор ψ_{pq} при этом есть оператор ортопроектирования X_q на X_p. Если $\{e_j\}_1^m$ — ортобазис в X_q такой, что $e_j \in X_p^-$ при $j \geq k$, то

$$\sigma_2^2(\psi_{pq}) = \sum_{j=1}^{m} p^2(\psi_{pq}e_j) = \sum_{j=1}^{k} p^2(e_j) = \sum_{j=1}^{k} \|Ae_j\|^2 = \sigma_2^2(A). \qquad (1.5)$$

Рассмотрим теперь в X норму $q_\delta\ (\delta>0)$:

$$q_\delta^2(x) = q^2(Q_q x) + \delta^2\|(I-Q_q)\,x\|^2 = \|B_\delta x\|^2;$$
$$B_\delta = Q_q + \delta(I-Q_q).$$

Соответствующее пространство $X_{q\delta}$ совпадает с X, причем из (1.5) по-прежнему следует, что $\sigma_2^2(\psi_{pq\delta}) = \sigma_2^2(A)$. Действительно, определенное выше скалярное произведение в *X* изменяется лишь на $N_q \subset N(A)$, и потому соотношение $p(x) = \|Ax\|$ сохраняется, причем оператор A остается неотрицательным. Нетрудно проверить, что при δ→0 монотонно $S(q_\delta, r) \nearrow S(q, r)$, а потому $S^0(q_\delta, r) \searrow S^0(q, r)$ и, следовательно,

$$\mu(S^0(q_\delta, r)) \searrow \mu(S^0(q, r)).$$

Поэтому оценку (1.3) достаточно установить для невырожденной преднормы q_δ. Отождествим *Y* с евклидовым пространством X, наделенным описанным выше скалярным произведением. Тогда полярой множества $S(q_\delta, r) = \{x: \|B_\delta x\| < r\}$ является, как легко видеть, множество

$$S^0(q_\delta, r) = \left\{y: \|B_\delta^{-1} y\| \leqslant \frac{1}{r}\right\}.$$

Из предложения 1.1 следует

$$\mu\{Y \setminus S^0(q_\delta, r)\} =$$

$$= \mu\left\{y: (B_\delta^{-2} y, y) > \frac{1}{r^2}\right\} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}(\varepsilon + 2r^2 \operatorname{Tr} A^2 B_\delta^{-2}),$$

где $\operatorname{Tr} A^2 B_\delta^{-2} = \operatorname{Tr} A B_\delta^{-2} A = \sigma_2^2(A B_\delta^{-1}) = \sigma_2^2(A) = \sigma_2^2(\psi_{pq})$, так как $A B_\delta^{-1} = A\left\{Q_q + \frac{1}{\delta}(I - Q_q)\right\} = A$.

Введем теперь некоторые важные понятия, используемые в этой главе.

Определение 1.1. Вещественную цилиндрическую меру μ в X' назовем *X-регулярной,* если для каждого ε> 0 существует компактное в X'_σ подмножество K_ε такое, что для каждого лежащего вне K_ε X-цилиндрического множества $B\,(B \cap K_\varepsilon = \varnothing)$ выполняется условие $|\mu(B)| < \varepsilon$ (и, следовательно, $|\mu|(B) < \varepsilon$)

Эту цилиндрическую меру назовем *сильно X-регулярной,* если множество K_ε может быть выбрано гильбертовым и абсолютно выпуклым.

Предложение 1.3. *Всякая вещественная цилиндрическая X-регулярная мера на* $(X', \mathfrak{A}_X)$ *σ-аддитивна.*

Доказательство. Рассмотрим класс $\mathcal{F}$ замкнутых в X'_σ X-цилиндрических множеств, т. е. цилиндрических множеств, основания которых замкнуты в соответствующих конечномерных носителях. Из предложения 1.1.4 следует, что класс $\mathcal{F}$ аппроксимирует μ. Поэтому выполняются условия предложения 1.1.3.

Следствие 1.1. *Пусть X — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Вещественная X'-цилиндрическая мера в X* *σ-аддитивна точно тогда, когда для каждого* ε>0 *существует R*>0, *обладающее тем свойством, что для любого X-цилиндрического множества B, лежащего вне шара* $\{x\colon |x| \leqslant R\}$, *справедлива оценка*

$|\mu(B)| < \varepsilon.$

Достаточность следует из предложения 1.3, поскольку X = (X')'; необходимость — из предложения 1.1.5, так как всякий компакт ограничен.

Это утверждение распространяется на рефлексивные сепарабельные пространства Фреше, если в формулировке заменить шар слабо компактным множеством.

Заметим далее, что сильная X-регулярность σ -аддитивной на борелевской σ -алгебре пространства X'_σ меры μ эквивалентна условию

$|\mu|(X' \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$

для описанного в определении множества K_ε.

Теорема 1.1. *Пусть* μ — *неотрицательная цилиндрическая мера на алгебре* $\mathfrak{A}_X$ *X-цилиндрических подмножеств пространства* X', *сопряженного к л. в. п. X.*

Если характеристический функционал $\chi_\mu(x)$ *непрерывен в нуле в ядерной топологии* $\tau_S(X, \beta)$, *отвечающей какой-нибудь топологии* β *пространства X, согласованной с двойственностью X и X', то цилиндрическая мера* μ *сильно X-регулярна и, следовательно,* σ *-аддитивна на* $\mathfrak{A}_X$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить существование компактного подмножества K_ε, подчиняющегося оценке, описанной в определении сильной регулярности.

Без ограничения общности можно считать, что β=τ(*X, X')* есть топология Макки— сильнейшая, согласованная с рассматриваемой двойственностью, так как при замене топологии более сильной непрерывность функции не теряется. Отметим, что поляра окрестности нуля пространства $(X, \tau(X, X'))$ компактна в X'_σ и абсолютно выпукла, что и будет использовано ниже при построении K_ε.

Из непрерывности χ_μ следует существование для каждого δ> 0 гильбертовой полунормы $p \in \mathscr{P}(X, \tau(X, X'))$, для которой $|1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| < \delta$ при $p(x)<1$. По определению ядерной топологии существует непрерывная в топологии $\tau(X, X')$ гильбертова полунорма *q*, для которой каноническое отображение $\psi_{pq}\colon \bar{X}_q \to \bar{X}_p$ является гильбертово-шмидтовым. Покажем, что поляра $S^0(q, r)$ множества $S(q, r) = \{x \in X\colon q(x) < r\}$ при подходящем выборе δ, *r* обладает нужными свойствами.

Пусть B — X-цилиндрическое множество, лежащее вне $S^0(q, r)$, и $L \subset X'$ — подпространство конечной коразмерности, определяющее B. Переходя к фактор-пространству X'/L, мы заменим множество В его основанием B_0 с той же мерой $\mu_L(B_0) = \mu(B)$. При этом канонический образ поляры $S^0(q, r)$ есть поляра множества $S(q, r) \cap L^0 = \{x \in L^0 : q(x) < r\}$, лежащего в конечномерном пространстве L^0, двойственным для которого является X'/L.
В этих условиях применимо предложение 1.2. Заметим, что при переходе к подпространству L^0 отображение ψ_{pq} заменится своим сужением и потому величина $\sigma_2(\psi_{pq})$ не увеличится. Таким образом, имеет место оценка:

$$\mu(B) = \mu_L(B_0) \leqslant \mu_L\{X'/L \setminus (S(q, r) \cap L^0)^0\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left(\delta + 2r^2\sigma_2^2(\psi_{pq})\right). \quad \textbf{(1.6)}$$

Выбирая достаточно малое $\delta > 0$ и затем достаточно малое $r > 0$, мы получим требуемую оценку для множества $K = S^0(q, r)$.
Замечание 1.1. Как следует из доказательства, оценка значения меры $\mu(B)$ зависит лишь от окрестности, определяемой ее характеристическим функционалом. Точнее, справедливо следующее утверждение.
Пусть p, q — непрерывные гильбертовы преднормы в X, такие, что каноническое вложение $\psi_{p,q}: \dot{X}_q \to \dot{X}_p$ обладает свойством $\sigma_2(\psi_{pq}) < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta > 0$, $r > 0$, что какова бы ни была положительная нормированная цилиндрическая мера μ на X', удовлетворяющая условию

$$|1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| < \delta \qquad (p(x) \leqslant 1),$$

выполняется условие:

$$\mu(B) < \varepsilon \qquad (B \in \mathfrak{A}_X; \quad B \cap S^0(q, r) = \varnothing).$$

2°. Необходимые условия σ-аддитивности. Приведем теперь результат, до некоторой степени обратный к результату теоремы 1.1.
Теорема 1.2. *Пусть X — л. в. п., μ — вещественная мера на борелевской σ-алгебре В пространства X'_σ. Если μ сильно X-регулярна, то характеристический функционал χ_μ непрерывен в ядерной топологии τ_S, ассоциированной с топологией Макки $\tau(X, X')$.*
Если, в частности, пространство (X,β) бочечно, то χ_μ непрерывен в ядерной топологии $\tau_S(X, \beta)$, отвечающей исходной топологии β (а *значит, и в самой топологии* (β).
Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно для каждого $\varepsilon > 0$ указать $\tau(X, X')$-непрерывную гильбертову полунорму $p_\varepsilon(x)$ и

оператор Гильберта — Шмидта A_ε в $\bar{X}_{p_\varepsilon}$, для которых выполняется оценка

$$|\chi_\mu(x_1) - \chi_\mu(x_2)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad p_\varepsilon(A_\varepsilon \bar{Q}_{p_\varepsilon}(x_1 - x_2)) < 1.$$

Без ограничения общности (переходя к вариации и нормируя) можно считать, что мера μ — вероятностная: легко видеть, что из непрерывности в нуле характеристического функционала $\chi_{|\mu|}$ вариации $|\mu|$ следует непрерывность во всем пространстве χ_μ:

$$\left| \int_{X'} e^{i\langle x_1, y\rangle}\mu(dy) - \int_{X'} e^{i\langle x_2, y\rangle}\mu(dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{X'} |e^{i\langle x_1 - x_2, y\rangle} - 1| \, |\mu|(dy) =$$

$$= \sqrt{2} \int_{X'} |1 - \cos\langle y, x_1 - x_2\rangle| \, |\mu|(dy) =$$

$$= \sqrt{2}\,(1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x_1 - x_2)).$$

Пусть *K* — подмножество, определяемое из условия сильной регулярности, такое что $\mu(X' \setminus K) < \varepsilon/4$ и K^0 — его поляра в *X*, которая, так же как и *K*, является гильбертовым подмножеством Пусть p_K, p_{K^0}—отвечающие этим подмножествам полунормы на X_K, X_{K^0} соответственно. Из определения поляры следует, что

$$p(x) = p_{K^0}(x) = \sup_{y \in K} |\langle x, y\rangle|. \quad (1.7)$$

Поскольку топология Макки определяется равномерной сходимостью на множествах, к числу которых относится *K*, полунорма p $\tau(X, X')$-непрерывна, Следовательно, K^0 есть окрестность нуля пространства $(X, \tau(X, X'))$.

Оценим величину

$$1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x) = \int_{X'} [1 - \cos\langle x, y\rangle]\,\mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_K [1 - \cos\langle x, y\rangle]\,\mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\int_K |\langle x, y\rangle|^2 \mu(dy). \quad (1.8)$$

Так как $\langle x, y\rangle = 0$ $(x \in N_p,\ y \in K)$, то стоящий в правой части интеграл можно рассматривать как квадратичный функционал на $\tilde{X}_p$:

$$\varphi(\tilde{x}) = \int_K |\langle x, y\rangle|^2 \mu\ dy) \qquad (\tilde{x} = x + N_p).$$

Пусть A — неотрицательный оператор в $\bar{X}_p$ такой, что $\varphi(\tilde{x}) = p^2(A\tilde{x})$ и $A_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A$. Из $p(A_\varepsilon Q_p x) < 1$ следует $\varphi(Q_p x) < \varepsilon$ и, в силу (1.8),

$$|1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| < \varepsilon.$$

Остается показать, что $\sigma_2(A) < \infty$. В силу компактности K пространство $\bar{X}_p$ сепарабельно, и если $\{e_j\}$ — ортобазис в нем, то

$$\sum_j p^2(Ae_j) = \sum_j \varphi(e_j) = \sum_j \int_K |\langle e_j, y\rangle|^2 \mu(dy) = \\ = \int_K \sum_j |\langle e_j, y\rangle|^2 \mu(dy) = \int_K |p_k(y)|^2 \mu(dy) \leqslant 1$$

в силу указанного выше отождествления и неравенства

$$p_k(y) \leqslant 1 \quad (y \in K).$$

Следствие 1.2. *Пусть* μ *—сильно X-регулярная цилиндрическая мера на алгебре* $\mathfrak{A}_X$ *цилиндрических подмножеств пространства X'. В силу теоремы* 1.4.3 *она* σ-*аддитивна и имеет продолжение, удовлетворяющее условиям теоремы* 1.2. *Поэтому характеристический функционал* χ_μ *этой цилиндрической меры непрерывен в топологии*

$$\tau_S(X, \tau(X, X')).$$

Из теорем 1.1 и 1.2 следует результат.

Теорема 1.3 (Минлос). *Пусть X —ядерное л. в. п. Для того чтобы функция χ(x) была характеристическим функционалом некоторой неотрицательной меры Радона на пространстве* X'_σ, *достаточно, а если X бочечно, то и необходимо, чтобы она была положительно определенной и непрерывной в нуле в топологии пространства X.*

Замечание 1.2. Пусть $\mathscr{M}$ — ограниченная совокупность вещественных мер, равномерно сильно регулярная в том смысле, что входящее в определение сильной регулярности множество K_ε не зависит от $\mu \in \mathscr{M}$. Легко видеть, что все рассуждения теоремы 1.2, за исключением доказательства того, что $\sigma_2(A) < \infty$, можно провести независимо от μ, если положить

$$\varphi(\bar{x}) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}} \int_K |\langle x, y\rangle|^2 \mu(dy).$$

При этих условиях совокупность $\tilde{\mathscr{M}}$ характеристических функционалов мер из $\mathscr{M}$ оказывается равностепенно непрерывной, но не в ядерной топологии, а в топологии $\tau(X, X')$.

Замечание 1.3. Если ослабить условия теоремы 1.2, заменив требование сильной регулярности требованием регулярности, то, как следует из доказательства этой теоремы, оценка

$$|1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad \varphi(x) < \varepsilon$$

сохраняется, но преднорма φ при этом, вообще говоря, не является гильбертовой. При этом сохраняется следующий (более слабый, чем в теореме 1.2) результат.

Теорема 1.2'. *Если* μ *— регулярно σ-аддитивная на пространстве X', сопряженном к бочечному пространству X, мера, то ее характеристический функционал* χ_μ *непрерывен в топологии X. Если* $\mathcal{M}$ *— равномерно регулярное множество таких мер, то множество* $\tilde{\mathcal{M}}$ *их характеристических функционалов равностепенно непрерывно.*

3°. Случай гильбертова пространства.

Пример 1.1. Пусть *(X,* τ) — гильбертово пространство с сильной топологией и *X'* отождествлено с *X*. Ядерная топология $\tau_S(X, \tau)$ (топология Сазонова) определяется совокупностью полунорм $\|x\|_S = \|Sx\|$, где S — оператор Гильберта —Шмидта. Так как в *X* каждая непрерывная полунорма гильбертова, то условие сильной регулярности сводится к регулярности меры, а это свойство выполняется, как показано в главе 1, для любой σ-аддитивной меры на B. Поэтому теоремы 1.1 и 1.2 сводятся к следующему утверждению.

Теорема 1.3' (Сазонов). *Нормированная неотрицательная цилиндрическая мера на борелевской* σ*-алгебре гильбертова пространства X σ-аддитивна, если и только если для каждого* ε > 0 *существует положительный оператор Гильберта — Шмидта* S_ε*, для которого*

$$\|S_\varepsilon x\| < 1 \Rightarrow |1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| < \varepsilon.$$

Отметим, что это условие, в частности, выполняется, если характеристический функционал χ непрерывен в нуле в топологии, определяемой какой-либо одной нормой $\|\cdot\|_S$; при этом $S_\varepsilon = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} S$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$, когда ε→0.

Рассмотрим, в частности, гауссову цилиндрическую меру μ в X, имеющую характеристический функционал $\chi_B(x) = e^{-\frac{1}{2}(Bx,\, x)}$, где δ(ε)→0. Из приведенных рассуждений сразу же следует результат, независимо полученный в главе 2: необходимым и достаточным условием σ-аддитивности гауссовой меры является ядерность ее корреляционного оператора.

Заметим теперь, что функция *(Bx,x)* является слабо непрерывной в *X* лишь при конечномерном операторе B. Таким образом, из σ-аддитивности меры не следует непрерывность ее характеристического функционала в слабой топологии. Это показывает существенность требования бочечности в теореме 1.3: гильбертово пространство со слабой топологией этим свойством не обладает.

Заметим далее, что в теореме 1.1 требование непрерывности χ_μ в ядерной топологии нельзя заменить требованием слабой секвенциальной непрерывности. Действительно, для любого вполне непрерывного оператора В функционал $\chi_B(x)$ этим свойством обладает, но если В не ядерен, мера μ_B не σ-аддитивна.

Пример 1.2. Рассмотрим пару плотно вложенных гильбертовых пространств $X \subset X_-$, и пусть оператор вложения $J: X \to X_-$ таков, что $\sigma_2^2(J) = \sum \| J(e_k) \|_-^2 < \infty$ ($\{e_k\}$ ортобазис в X).

Пусть μ — неотрицательная цилиндрическая мера в *X* с непрерывным в *X* характеристическим функционалом $\chi_\mu(x)$. Оператор J преобразует ее в цилиндрическую меру $\tilde{\mu}$ на алгебре $\mathfrak{A}_X$ цилиндрических подмножеств пространства *X*-, прообразы которых принадлежат $\mathfrak{A}_v$. При этом $\chi_{\tilde{\mu}}(x) = \chi_\mu(J^* x)$ $(x \in X_-)$. Поскольку $\sigma_2(J^*) < \infty$, а χ_μ непрерывен на *X*, то $\chi_{\tilde{\mu}}$ непрерывен на *X*- в ядерной топологии и потому цилиндрическая мера $\tilde{\mu}$, являющаяся продолжением μ на пространство X_-, σ-аддитивна.

Пример 1.3. Пусть в условиях теоремы 1.1 характеристический функционал χ_μ непрерывен в нуле относительно фиксированной преднормы $p(x) = q(SQ_q x)$, где $\sigma_2(S) < \infty$ в $\bar{X}_q$. При помощи формулы

$$\chi(x + N_p) = \chi_\mu(x)$$

и последующего замыкания характеристический функционал определяется как непрерывная функция на $\bar{X}_p$. Гильбертовы пространства $\bar{X}_q \subset \bar{X}_p$ плотно вложены, а значит, этим свойством обладают и их сопряженные $\bar{X}'_p \subset \bar{X}'_q \subset X'$, являющиеся подпространствами *X'*. Отождествляя $\bar{X}'_p$ с $\bar{X}_p$, мы приходим к ситуации, описанной в предыдущем примере, откуда следует, что цилиндрическая мера μ сосредоточена в $\bar{X}'_q$ и σ-аддитивна в этом пространстве.

В частности, для счетно-гильбертова пространства

$$X = \lim_{n \to \infty} X_n$$

с вложением Гильберта — Шмидта цилиндрическая мера, характеристический функционал которой непрерывен в X_n, имеет σ-аддитивное продолжение в $X_{-(n+1)}$.

4°. Интегральное представление группы унитарных операторов. Применим полученные результаты к некоторым вопросам спектральной теории операторов. Пусть *X* — л. в. п., $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Рассмотрим представление $x \mapsto T_x \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ пространства *X* унитарными операторами в *K:*

$$T_{x+y} = T_x \cdot T_y; \quad T_0 = I; \quad T_x^* = T_x^{-1} = T_{-x} \qquad (x,\ y \in X).$$

Для каждого $h \in \mathscr{H}$ функция
$\varphi_h(x) = (\mathrm{T}_x h,\ h)$

положительно определена:

$$\sum_{j,k} \varphi_h(x_j - x_k) c_j \bar{c}_k = \sum_{j,k} c_j \bar{c}_k (\mathrm{T}_{x_j} \mathrm{T}_{-x_k} h,\ h) = \left\| \sum_j c_j \mathrm{T}_{x_j} h \right\|^2 \geqslant 0.$$

Если при этом $(\mathrm{T}_x h,\ h)$ непрерывна по x на каждом конечномерном пространстве $\mathscr{L} \subset X$, то в силу (1.3.2) справедливо представление

$$\varphi_h(x) = \int_{X'} e^{i\langle x,\ y\rangle} \mu_h(dy), \quad (1.9)$$

где μ_h — X-цилиндрическая неотрицательная мера на X', : однозначно определяемая элементом h.
Из (1.9) следует соотношение

$$(\mathrm{T}_x h_1,\ h_2) = \int_{X'} e^{i\langle x,\ \theta\rangle} \mu_{h_1 h_2}(d\theta),$$

где

$$\mu_{h_1,\ h_2} = \frac{1}{4}\left(\mu_{h_1+h_2} - \mu_{h_1-h_2} + i\mu_{h_1+ih_2} - i\mu_{h_1-ih_2}\right)$$

— комплексная цилиндрическая мера, билинейно зависящая от h_1, h_2. В этих условиях для каждого X-цилиндрического множества A:

$$\mu_{h_1,\ h_2}(A) = (\mathrm{E}(A) h_1,\ h_2),$$

где $\mathrm{E}(A) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$—цилиндрическая мера с операторными значениями. Формула (1.9) эквивалентна представлению

$$\mathrm{T}_x = \int_{X'} e^{i\langle x,\ \theta\rangle} \mathrm{E}(d\theta),$$

причем из унитарности T_x следует, что

$$\mathrm{E}^*(A) = \mathrm{E}(A) \qquad (A \in \mathfrak{A}_X),$$

а групповое соотношение приводит к равенству:

$$\int_{X'} e^{i\langle x_1,\ y\rangle} \mathrm{E}(dy) \int_{X'} e^{i\langle x_2,\ y\rangle} \mathrm{E}(dy) = \int_{X'} e^{i\langle x_1 + x_2,\ y\rangle} \mathrm{E}(dy),$$

которое, как известно (и нетрудно проверить), означает, что

$$\mathrm{E}(A_1 \cap A_2) = \mathrm{E}(A_1)\,\mathrm{E}(A_2); \quad \mathrm{E}(\varnothing) = 0.$$

Таким образом, операторы E (A) представляют собою ортопроекторы в $\mathscr{H}$, дизъюнктные на непересекающихся цилиндрических множествах.
Заметим теперь, что σ-аддитивность меры

$$\mu_h(A) = (\mathrm{E}(A) h,\ h) = \| \mathrm{E}(A) h \|^2$$

для каждого $h \in \mathscr{H}$ означает слабую (или, что то же самое, сильную) σ -аддитивность проекторозначной меры Е (A). Условия σ -аддитивности цилиндрических мер μ_h мы можем получать из теоремы 1.1, если учесть, что соответствующие характеристические функционалы даются формулой

$$\chi_h(x) = \chi_{\mu_h}(x) = \int_{X'} e^{i(x,\, y)} \mu_h(dy) = (\mathrm{T}_x h,\ h).$$

Таким образом, имеет место следующий результат.
Теорема 1.4. *Пусть* (X, β) — л. в. *п. с топологией, согласованной с двойственностью X и X'. Пусть* T_x — *унитарное представление X в гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}$, *для которого при каждом* $h \in \mathscr{H}$ *функция* $x \to (\mathrm{T}_x h,\ h)$ *непрерывна в нуле в топологии* $\tau_S(X,\ \beta)$. *Тогда существует сосредоточенная на* σ-*алгебре* $\mathfrak{A}_X$ *пространства X'* σ *-аддитивная (в сильном смысле) ортогональная проекторозначная в* $\mathscr{H}$ *мера* Е(A), *такая что*

$$\mathrm{T}_x h = \int_{X'} e^{i(x,\, y)} \mathrm{E}(dy)\, h. \quad (1.10)$$

Замечание 1.4. Пусть $\mathscr{H}_+ \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_-$ —оснащенное гильбертово пространство с гильберто-шмидтовскими вложениями:
$\mathrm{J} \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H}_+,\ \mathscr{H})$, $\mathrm{J}^* \in \mathscr{L}_2(\mathscr{H},\ \mathscr{H}_-)$; $S: \mathscr{H}_+ \to \mathscr{H}_-$ — изометричный оператор, такой что $(x, y)_+ = (x, Sy)_0$.
Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортобазис в $\mathscr{H}_+$. Определим неотрицательную меру на X';

$$\nu(\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}e_k,\ \mathrm{J}e_k)_0 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}e_k\|_0^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathrm{J}e_k\|_0^2 = \sigma_2^2(\mathrm{J}).$$

Для любого $f \in \mathscr{H}_+$ справедливо разложение

$$\mathrm{J}^*\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}f = \sum_k (\mathrm{J}^*\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}f,\ e_k)_0\, Se_k = \sum_k (\mathrm{J}f,\ \mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}e_k)_0\, Se_k,$$

которое влечет оценку

$$\|\mathrm{J}^*\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}f\|_-^2 = \sum_k |(\mathrm{J}f,\ \mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J}e_k)_0|^2 \leqslant \|\mathrm{J}f\|_0^2\, \nu(\Delta) \leqslant \|f\|_+^2\, \nu(\Delta).$$

Из этой оценки следует, что операторная мера $\mathrm{J}^*\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_+,\ \mathscr{H}_-)$ абсолютно непрерывна относительно ν. Поэтому существует производная Радона — Никодима $\mathrm{P}(\theta) \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_+,\ \mathscr{H}_-)$ (п. в. для $\theta \in X'$), для которой

$$\mathrm{J}^*\mathrm{E}(\Delta)\,\mathrm{J} = \int_{\Delta} \mathrm{P}(y)\, \nu(dy). \quad (1.11)$$

Представление (1.10) может быть теперь записано в виде:

$$(\mathrm{T}_x \mathrm{J} f,\ \mathrm{J} g)_0 = \int\limits_{X'} e^{i\langle x,\ y\rangle} (\mathrm{J}^* \mathrm{E}(dy)\, \mathrm{J} f,\ g)_0 =$$

$$= \int\limits_{X'} e^{i\langle x,\ y\rangle} (\mathrm{P}(y) f,\ g)_0\, \nu(dy) \quad (f,\ g \in \mathscr{H}_+). \quad (1.12)$$

В частности, при $x = 0$:

$$(\mathrm{J} f,\ \mathrm{J} g)_0 = \int\limits_{X'} (\mathrm{P}(y) f,\ g)_0\, \nu(dy). \quad (1.13)$$

Если группа T_x оставляет $\mathscr{H}_+$ инвариантным, т. е. $\mathrm{J}\mathrm{T}_x^+ f = \mathrm{T}_x \mathrm{J} f$, где $\mathrm{T}_x^+ = \mathrm{T}_x \restriction_{\mathscr{H}_+}$, то из (1.13) следует:

$$(\mathrm{J}\mathrm{T}_x^+ f,\ \mathrm{J} g)_0 = \int\limits_{X'} (\mathrm{P}(y)\, \mathrm{T}_x^+ f,\ g)_0\, \nu(dy),$$

что после сравнения с (1.12) приводит к равенству;

$$(\mathrm{P}(y)\, \mathrm{T}_x^+ f,\ g)_0 = e^{i\langle x,\ y\rangle} (\mathrm{P}(y) f,\ g)_0 \quad (\nu\text{-п. в.}). \quad (1.14)$$

Таким же образом показывается групповая инвариантность билинейного функционала $(\mathrm{P}(y) f,\ g)$:

$$(\mathrm{P}(y)\, \mathrm{T}_x^+ f,\ \mathrm{T}_x^+ g)_0 = (\mathrm{P}(y) f,\ g)_0 \quad (\nu\text{-п. в.}). \quad (1.15)$$

5°. Непрерывные цилиндрнческие меры. Рассмотрим некоторые другие признаки σ-аддитивности неотрицательных цилиндрических мер в пространстве *X'*, сопряженном к л. в. п. *X*, основанные уже не на свойствах преобразования Фурье.

Пусть μ— нормированная цилиндрическая мера: μ (X)=1. Рассмотрим совокупность ее одномерных проекций:

$$\mu^{(x)}(\Delta) = \mu\{y \in X' \colon \langle x,\ y\rangle \in \Delta\} \quad (\Delta \in \mathbb{R}^1,\ x \in X).$$

Назовем эту совокупность *непрерывной,* если она непрерывна в каждой точке $x \in X$ в смысле слабой сходимости мер в $\mathbb{R}^1$, т. е. функция

$$\mu\{f;\ x\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mu^{(x)}(dt) \quad (1.16)$$

непрерывна на X при каждом $f(t)$, непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}^1$.

Предложение 1.4. *Для непрерывности совокупности одномерных проекций неотрицательной цилиндрической меры* μ *достаточно, чтобы* $\mu\{f;\ x\}$ *была непрерывной на X лишь при каждой f из класса* C_0 *непрерывных финитных на* $\mathbb{R}^1$ *функций.*

Доказательство. Установим сначала важный вспомогательный факт. Для любых $x_0 \in X,\ \varepsilon > 0$ существуют $r>0$ и окрестность нуля $U_{\varepsilon,\ x_0}$ в *X,* такие что

$$\mu^{(x)}\{t \colon |t| > r\} < \varepsilon \quad (x - x_0 \in U_{\varepsilon,\ x_0}). \quad (1.17)$$

Выберем сначала $r_1>0$ из условия $\mu^{(x_0)}\{t \colon |t| > r_1\} < \varepsilon/2$ и для некоторого $r > r_1$ непрерывную функцию $\psi(t)$:

$$\psi(t)=1 \quad (|t|\leqslant r_1); \qquad \psi(t)\in[0,\ 1] \quad (r_1<|t|<r);$$
$$\psi(t)=0 \quad (|t|\geqslant r).$$

По условию существует окрестность нуля $U \subset X$ такая, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (x-x_0\in U).$$

При этом

$$\mu^{(x)}\{t:\ |t|>r\}=1-\mu^{(x)}\{t:\ |t|\leqslant r\}\leqslant 1-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\mu^{(x)}(dt)\leqslant$$
$$\leqslant 1-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)+\left|\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)-\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,\mu^{(x)}(dt)\right|\leqslant[1-\mu^{(x_0)}\{t:\ |t|\leqslant r_1\}]+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$
$$(x-x_0\in U).$$

Пусть теперь $f\in C(\mathbb{R}^1)$, а $\varphi\in C_0(\mathbb{R}^1)$ совпадает с f на отрезке $[-r,\ r]$ и не превосходит ее по норме. Тогда при $x-x_0\in U$ справедлива оценка:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|+$$
$$+\int_{|t|>r}\{|f(t)|+|\varphi(t)|\}\,[\mu^{(x)}(dt)+\mu^{(x_0)}(dt)]\leqslant$$
$$\leqslant 4\varepsilon\,\|f\|+\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|.$$

Выберем теперь для некоторого $\delta>0$ такую окрестность нуля V, чтобы

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|<\frac{\delta}{2} \qquad (x-x_0\in V).$$

Тогда при $\varepsilon=\dfrac{\delta}{8\|f\|}$ выполняется требуемая оценка:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mu^{(x)}(dt)-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right|<\delta \qquad (x-x_0\in U\cap V).$$

Замечание 1.5. Так как при $x=0$ мера μ_0 сосредоточена в нуле, то, как следует из доказательства, формула (1.17) при $x_o=0$ справедлива для любого $r>0$. Таким образом, имеет место следующий факт.

Если совокупность одномерных проекций неотрицательной цилиндрической меры μ непрерывна, то для любых ε>0, r >0 существует окрестность нуля

$U_{\varepsilon, r} \subset X,$

такая что

$$\mu\{y \in X' \colon |\langle x, y\rangle| > r\} < \varepsilon \qquad (x \in U_{\varepsilon, r}). \quad (1.18)$$

Определение 1.2. Назовем цилиндрическую меру μ *непрерывной,* если при каждом ε >0 и некотором r>0 (а следовательно, и при каждом r>0, достаточно положить r=1) существует окрестность нуля $U_{\varepsilon, r} \subset X,$ для которой выполняется свойство (1.18).

Предложение 1.5. *Непрерывность неотрицательной цилиндрической меры* μ *эквивалентна непрерывности совокупности ее одномерных проекций.*

Доказательство. В силу приведенного замечания, достаточно из непрерывности μ вывести непрерывность совокупности $\{\mu^{(x)}\}.$

Пусть $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^1).$ Тогда

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mu^{(x)}(dt) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mu^{(x_0)}(dt)\right| = \\
&\qquad = \left|\int_{X'} \{\varphi(\langle x, y\rangle) - \varphi(\langle x_0, y_0\rangle)\}\,\mu(dy)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left|\int_{|\langle x - x_0, y\rangle| \geqslant \delta} \{\varphi(\langle x_0, y\rangle + \langle x - x_0, y\rangle) - \varphi(\langle x_0, y\rangle)\}\,\mu(dy)\right| + \\
&+ \left|\int_{|\langle x - x_0, y\rangle| < \delta} \{\varphi(\langle x_0, y\rangle + \langle x - x_0, y\rangle) - \varphi(\langle x_0, y\rangle)\}\,\mu(dy)\right|.
\end{aligned} \quad (1.19)$$

Пользуясь равномерной непрерывностью φ, выберем δ>0, такое что

$$\max_t |\varphi(t + \tau) - \varphi(t)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(X')} \qquad (|\tau| < \delta).$$

При этом второй интеграл в (1.19) окажется меньше ε/2. Первое же слагаемое не превосходит $2\|\varphi\|\mu\{x\colon |\langle x - x_0, y\rangle| > \delta\}$ и может быть сделано меньше ε/2 в силу условия непрерывности меры за счет выбора $x - x_0 \in V$ при достаточно малой окрестности нуля V.

Установим теперь связь между непрерывностью цилиндрической меры и свойствами ее преобразования Фурье.

Теорема 1.5. *Непрерывность неотрицательной цилиндрической меры эквивалентна непрерывности ее характеристического функционала.*

Доказательство. Из формулы

$$\chi_\mu(\tau x) = \int_{X'} e^{i\tau\langle x,\, y\rangle}\mu(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t}\mu^{(x)}(dt)$$

при τ=1 в силу того, что $e^{it} \in C(\mathbb{R}^1)$, сразу же следует, что непрерывность $\mu^{(x)}$ влечет непрерывность χ_μ.

Из той же формулы следует связь между характеристическими функционалами меры μ и ее одномерных проекций $\chi_{\mu^{(x)}}(\tau) = \chi_\mu(\tau x)$.

Пусть *U* — абсолютно выпуклая окрестность нуля *X*, для которой при некотором ε > 0

$$|1 - \operatorname{Re}\chi_\mu(x)| < \varepsilon \qquad (x \in U)$$

(существование такой окрестности следует из непрерывности χ_μ). Так как *tx* ∈ *U* при $x \in U,\ |t| \leqslant 1$, то

$$|1 - \operatorname{Re}\chi_{\mu^{(x)}}(t)| < \varepsilon \qquad (|t| \leqslant 1,\ x \in U).$$

Применяя одномерный вариант предложения 1.1, получаем при *x* ∈ *U* оценку:

$$\mu\{y \in X' :\ |\langle x,\, y\rangle| > C\} = \mu^{(x)}\{t:\ |t| > C\} \leqslant \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}\left(\varepsilon + \frac{2}{C}\right),$$

которая приводит к нужному результату при достаточно большом C (поскольку оценку (1.18) достаточно проверить при каком-нибудь *r*>0).

Следующая теорема получается как синтез теорем 1.3 и 1.5.

Теорема 1.6. *Пусть X—л. в. п.,* μ *— неотрицательная цилиндрическая мера на X'. Для (регулярной) σ-аддитивности μ достаточна ее непрерывность в ядерной (а если пространство X ядерно, то и в исходной) топологии пространства X. Если это пространство бочечно, то это условие непрерывности и необходимо.*

Условие непрерывности (1.18) можно переформулировать таким образом, чтобы оно было достаточным для σ-аддитивности вещественной цилиндрической меры.

Теорема 1.7. *Пусть* μ *— вещественная цилиндрическая мера X', удовлетворяющая условию:*

для каждого ε>0 *при некотором (а значит, и при каждом)* r > 0 *в* $(X,\ \tau_S(X))$ *существует такая окрестность нуля U, что для любых* $A \in \mathfrak{A}_X$ *и* $x \in U$ *выполняется оценка:*

$$|\mu(A \cap \{y \in X' :\ |\langle x,\, y\rangle| > r\})| < \varepsilon. \qquad (1.20)$$

Тогда μ *регулярно* σ *-аддитивна.*

Если пространство X бочечно, то это условие и необходимо.

Доказательство. Из (1.20) непосредственно следует оценка

$$|\mu|\{y \in X' :\ |\langle x,\, y\rangle| > r\} < 2\varepsilon,$$

означающая непрерывность в соответствующей топологии неотрицательной цилиндрической меры $|\mu|$, и остается применить теорему 1.6. Таким же образом доказывается и необходимость.

Замечание 1.6. Условие теоремы нетрудно переформулировать так, чтобы она обобщалась на меры со значениями в л. в. п. *T*. Для этого нужно в определении регулярности и условии (1.20) заменить число ε>0 окрестностью нуля $V \subset T$.

Доказательство соответствующего результата проводится при помощи перехода от меры μ к вещественным мерам $\langle \mu, \varphi \rangle \; (\varphi \in T')$, поскольку слабая и сильная σ -аддитивность векторной меры равносильны.

Полезный достаточный признак σ -аддитивности цилиндрической меры связан с понятием ее корреляционной формы.

Определение 1.3. *Корреляционной формой неотрицательной цилиндрической меры* μ, имеющей конечные вторые моменты

$$\int_{X'} |\langle y, x \rangle|^2 \mu(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \mu^{(x)}(dz) < \infty \qquad (x \in X), \qquad (1.21)$$

называется билинейный функционал на X, определяемый соотношением

$$B_\mu(x_1, x_2) = \int_{X'} \langle x_1, y \rangle \langle x_2, y \rangle \mu(dy) = \int_{R^2} z_1 z_2 \mu^{(x_1, x_2)}(dz_1 \times dz_2).$$

Корреляционная форма легко вычисляется по характеристическому функционалу путем двукратного дифференцирования:

$$B_\mu(x, x) = \int_{X'} |\langle x, y \rangle|^2 \mu(dy) = -\chi''(0)(x, x);$$

при этом используются лишь значения χ на одномерном пространстве $\{tx\}$, т. е. характеристический функционал соответствующего одномерного распределения.

С другой стороны, если корреляционная форма существует, легко получается оценка для характеристического функционала

$$1 - \operatorname{Re} \chi_\mu(x) = \int_{X'} \{1 - \cos\langle x, y \rangle\} \mu(dy) \leqslant \frac{1}{2} B_\mu(x, x).$$

Эта оценка в силу теоремы 1.1 и рассуждений примера 1.3 приводит к следующему результату.

Теорема 1.8. *Если корреляционная форма $B_\mu(x, y)$ цилиндрической меры* μ *в пространстве X' существует и непрерывна в ядерной топологии $\tau_S(X)$, то* μ *σ-аддитивна в X'.*

Если при этом B $_\mu$ *(x, y) непрерывна относительно фиксированной гильбертовой полунормы q и $B(x, x) = q(Sx)$, где $S \in \mathcal{L}_2(X_q)$, то* μ *сосредоточена в гильбертовом пространстве X'_q.*

Замечание 1.7. Пусть μ — неотрицательная мера на X', удовлетворяющая условию (1.21). Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(X', \mu)$. Отображение $S: x \to \langle x, y\rangle$ вкладывает *X* в $\mathcal{L}_2(X', \mu)$. Замыкание образа SX есть гильбертово пространство $\mathcal{H}$ измеримых линейных функционалов на *X'*, интегрируемых в квадрате по мере μ. Оно изометрично пополнению X по норме *B (x, x).* Вложение $S: \bar{X} \to \mathcal{H}$ приводит к вложению двойственных пространств $\mathcal{H}' \to X'$. Отождествляя $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ каноническим образом, мы получаем оснащенное гильбертово пространство

$$X \subset \mathcal{H} \subset X'.$$

Мера μ порождает цилиндрическую меру в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, у которой корреляционная форма совпадает со скалярным произведением. В этом случае существует гильбертово расширение $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}$, в котором рассматриваемая цилиндрическая мера σ-аддитивна. Заметим, однако, что $\mathcal{H}_1$ не обязательно содержится в *X'*. Все сказанное применимо к гауссовой цилиндрической мере, которая, таким образом, всегда может быть сосредоточена в гильбертовом пространстве.

3.2. Последовательности мер Радона

1°. Слабая компактность в пространстве мер. В этом параграфе рассматриваются уже не отдельные цилиндрические меры, продолжаемые до мер Радона, а совокупности таких мер.
Выясним прежде всего некоторые факты, относящиеся к мерам на произвольном (не обязательно линейном) вполне регулярном топологическом пространстве *X*.
Пусть *C(X)* — банахово пространство всех ограниченных вещественных непрерывных функций на *X* с нормой

$$\|f\|_C = \sup_X |f(x)|; \quad \mathfrak{M}(X)$$

— банахово пространство вещественных мер Радона на *X* с нормой $\|\mu\| = |\mu|(X)$. Эти пространства образуют двойственную пару с соотношением двойственности;

$$\langle f, \mu\rangle = \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

При этом каждой мере $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ сопоставляется линейный непрерывный функционал F_μ на *C(X)* так, что норма $\|F_\mu\| = \|\mu\|$ и тем самым $\mathfrak{M}(X)$ линейно и изометрично вкладывается в сопряженное пространство *C' (X).*

Предложение 2.1. Пусть *X—вполне регулярное топологическое пространство,* $\Phi \in C'(X)$ *и для каждого* ε>0 *существует компактное множество* $K_\varepsilon \subset X$ *такое, что неравенство*

$$|\Phi(f)| \leqslant \varepsilon \|f\| \quad \textbf{(2.1)}$$

выполняется для всех $f \in C(X)$, *удовлетворяющих условию* $f(x) = 0 \ (x \in K_\varepsilon)$.

Тогда существует точно одна мера Радона μ, *для которой*

$$\Phi(f) = \int_X f(x)\,\mu(dx) \quad (f \in C(X)). \quad (2.2)$$

Доказательство. Для каждого элемента Ф $\in C'(X)$ существует ограниченная аддитивная функция множеств μ на алгебре ∑, порожденной замкнутыми множествами, для которой справедлива формула (2.2). Эта мера *регулярна* в следующем смысле: для каждого $E \in \Sigma$ и $\delta > 0$ существуют $F,\ G \in \Sigma$, такие что $F \subset E \subset \subset \operatorname{int} G$ и $|\mu|(G \setminus F) < \delta$. Множество *F* при этом можно считать компактным.

Доказательство аналогичного факта для нормальных пространств имеется в книге Данфорда и Шварца. Мы не будем воспроизводить здесь это доказательство, а отметим лишь, что оно сохраняется, если заменить свойство нормальности более слабым, выполняющимся и во вполне регулярных пространствах: если F_1 и F_2 — замкнутые непересекающиеся множества, причем хотя бы одно из них компактно, то существует непрерывная функция *f* такая, что

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1;\ f(x) = 0\ (x \in F_1);\ f(x) = 1\ (x \in F_2).$$

При этом в приведенном выше определении регулярности меры μ нужно выбирать множество *F* компактным.

Докажем, что рассматриваемая мера μ является мерой Радона.

Пусть $F \subset G \subset X \setminus K_\varepsilon$, где *F* — компактно, G — открыто и $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$. Рассмотрим функцию $f \in C(X)$, обладающую свойствами:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1; \quad f(x) = 1 \quad (x \in F); \quad f(x) = 0 \quad (x \overline{\in} G).$$

Тогда

$$|\mu(F)| = \left|\int_F \mu(dx)\right| = \left|\int_X f(x)\,\mu(dx) - \int_{G \setminus F} f(x)\,\mu(dx)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \Phi(f) + \|f\| \cdot |\mu|(G \setminus F) \leqslant 2\varepsilon.$$

В силу регулярности подобная оценка распространяется на другие множества алгебры ∑, лежащие вне K_ε. Это влечет радоновость μ.

Остается доказать единственность. Пусть μ —мера Радона, для которой $\int\limits_X f(x)\,\mu(dx)=0\ \ (f\in C(X))$, но $\mu(B)=\delta\neq 0$ для некоторого борелевского B. Существуют $K\subset B\subset U$, где K — компактно, U — открыто и $|\mu|(U\setminus K)<\delta/3$. Рассмотрим функцию $f\in C(X)$: $f(x)\in[0,\ 1]$; $f(x)=1\ \ (x\in K)$; $f(x)=0\ \ (x\notin U)$. Для нее

$$\left|\int\limits_X f(x)\,\mu(dx)\right|=\left|\int\limits_U f(x)\,\mu(dx)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|\int\limits_K f(x)\,\mu(dx)\right|-|\mu|(U\setminus K)\geqslant\frac{2}{3}\delta-\frac{1}{3}\delta>0,$$

и полученное противоречие показывает, что $\mu = 0$.

Определение 2.1. Множество $\mathscr{M}\subset\mathfrak{M}(X)$ назовем *разномерно регулярным,* если для каждого $\varepsilon>0$ существует компактное множество $K_\varepsilon\subset X$, такое что $|\mu|(X\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon$ для каждой $\mu\in\mathscr{M}$.

Теорема 2.1. (Теорема Прохорова.) *Ограниченное и равномерно регулярное множество $\mathscr{M}\subset\mathfrak{M}(X)$ относительно компактно в* $(\mathfrak{M}(X),\ \sigma(\mathfrak{M},\ C))$.

Доказательство. Множество $\mathscr{M}$ равномерно ограничено в $\mathfrak{M}(X)$, а значит, и в *C' (X).* На основании известной теоремы Алаоглу оно относительно компактно в $(C'(X),\ \sigma(C',\ C))$. Остается показать, что замыкание $\bar{\mathscr{M}}$ в *C' (X)* принадлежит $\mathfrak{M}(X)$. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем соответствующее K_ε. Пусть $\Phi\in\bar{\mathscr{M}}$ и $f\in C(X)$ удовлетворяет условию $f(x)=0\ \ (x\in K_\varepsilon)$. Так как в любой δ-окрестности функционала Φ, определяемой функцией *f*, содержатся элементы μ из $\mathscr{M}$, то

$$|\Phi(f)|\leqslant|\langle f,\ \Phi-\mu\rangle|+|\langle f,\ \mu\rangle|<\delta+\varepsilon\|f\|$$

и, следовательно, выполняется (2.1). Из предложения 2.1 следует окончательный результат.

Следствие 2.1. *Пусть пространство X обладает тем свойством, что всякая слабо фундаментальная последовательность элементов равномерно регулярна. Тогда пространство $\mathfrak{M}(X)$ слабо секвенциально полно.*

Действительно, слабо фундаментальная последовательность ограничена в $\mathfrak{M}(X)$ и потому относительно компактна в $(\mathfrak{M},\ \sigma(\mathfrak{M},C))$. Кроме того, она не может иметь более одной предельной точки и потому является сходящейся.

Замечание 2.1. Пусть каждое компактное подмножество пространства *X* метризуемо. Можно показать, что при этом пространство *(C(X),* а) сепарабельно. Для этого достаточно выбрать для последовательности компактных (и следовательно, метрических) множеств $K_{1/n}$ в сепарабельных пространствах *C* $(K_{1/n})$ счетные плотные множества и продолжить их элементы на все X с сохранением нормы. При этом получится счетное плотное в (С $(X), \sigma)$ множество.

Из сепарабельности двойственного пространства и относительной компактности последовательности мер следует ее относительная секвенциальная компактность. Это приводит к следующему усилению теоремы 2.1.

Теорема 2.1[1]. (Ле Кам) *Если в пространстве X компактные множества метризуемы, то каждое ограниченное, равномерно регулярное множество мер Радона на X слабо секвенциально компактно.*

2°. Слабая полнота пространства мер. Мы приведем теперь один достаточно широкий класс пространств *X*, для которых пространство $\mathfrak{M}(X)$ мер Радона обладает слабой секвенциальной полнотой.

Определение 2.2. Совокупность мер $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(X)$ назовем *равномерно малой на открытых множествах,* если для любой последовательности U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ попарно непересекающихся открытых множеств из *X* выполняется соотношение

$$|\mu|(U_n) \to 0 \quad (\text{равномерно по } \mu \in \mathcal{M}).$$

Будем говорить, что пространство *X* обладает $\mathfrak{R}$-*свойством* (является $\mathfrak{R}$-*пространством),* если каждая равномерно малая на открытых множествах совокупность мер из $\mathfrak{M}(X)$ равномерно регулярна.

Теорема 2.2. *Каждая слабо фундаментальная последовательность мер Радона на вполне регулярном пространстве X равномерно мала на открытых множествах. Поэтому, если X есть* $\mathfrak{R}$-*пространство, то пространство* $\mathfrak{M}(X)$ *слабо секвенциально полно.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы следует из первого в силу следствия 2.1. Докажем первое утверждение.

Пусть $\{\mu_n\}$ — слабо фундаментальная последовательность мер Радона на *X*. Допустим, что существует последовательность открытых множеств $\{U_n\}$ $(U_k \cap U_l = \varnothing)$, для которой нарушается условие разномерной малости $\{\mu_n\}$, т. е. существует подпоследовательыюсть μ_{n_s} такая, что для некоторого $\delta>0$

$$|\mu_{n_s}|(U_s) > \delta \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots).$$

При этом в силу радоновости μ_{n_s} найдется компактное множество K_s такое, что и $|\mu_{n_s}|(K_s) > \delta$. После этого доказательство требуемого утверждения сводится к следующей лемме.

Лемма 2.1. *Пусть X —вполне регулярное пространство;* U_n *и* $K_n \subset U_n \subset X$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ *— последовательности*

соответственно открытых и компактных множеств и
$U_k \cap U_j = \varnothing \ (k \neq j)$
Если $\mathcal{M} = \{\mu_n\}$ *— слабо фундаментальная последователь-ность из* $\mathfrak{M}(X)$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu|(K_n) = 0$ *равномерно по* $\mu \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Допуская противное, выберем для некоторого ε>0 последовательность мер $\mu_{n_j} \in \mathcal{M}$ и компактных множеств $\tilde{K}_{n_j} \subset K_{n_j}$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$, так чтобы выполнялось неравенство $|\mu_{n_j}(\tilde{K}_{n_j})| > \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Для каждого j построим открытое множество V_j такое, что

$$\tilde{K}_{n_j} \subset V_j \subset U_{n_j}, \quad |\mu_{n_j}(V_j \setminus \tilde{K}_{n_j})| < \varepsilon/4,$$

и непрерывную функцию ψ_j:

$$\psi_j(x) \in [0, 1] \quad (x \in X), \qquad \psi_j(x) = 1 \quad (x \in \tilde{K}_{n_j}),$$
$$\psi_j(x) = 0 \quad (x \in X \setminus V_j).$$

При этом

$$\left| \int\limits_X \psi_j(x)\, \mu_{n_j}(dx) \right| > \frac{3}{4}\varepsilon. \quad (2.3)$$

Пусть теперь $c = \{c_j\} \in l_\infty$ — ограниченная последовательность вещественных чисел, $\|c\| = \sup |c_j|$. Функция

$$\psi^c(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j(x) \quad \mathbf{(2.4)}$$

непрерывна и ограничена: $|\psi^c(x)| \leqslant \|c\|$. Поэтому из фундаментальности $\mathcal{M}$ следует сходимость последовательность чисел

$$\int\limits_X \psi^c(x)\, \mu_{n_j}(dx) = \sum_k c_k a_j^k \qquad (j \to \infty), \quad (2.5)$$

где

$$a_j^k = \int\limits_X \psi_k(x)\, \mu_{n_j}(dx).$$

Абсолютная сходимость ряда (2.5) следует из очевидной абсолютной и равномерной сходимости (2.4). В частности, при c_k=1 (k=1, 2, ...) получаем оценку

$$\sum_k |a_j^k| < \infty.$$

Таким образом, последовательность элементов

$$a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^k, \ldots) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

пространства l_1 в силу (2.5) фундаментальна в слабой топологии $\sigma(l_1, l_\infty)$. Известно, что сходимость последовательности в этой топологии совпадает со сходимостью по норме пространства l_1, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|a_j^k|=0 \quad (\text{равномерно по } j=1,\ 2,\ \ldots).$$

Однако это противоречит оценке

$$|a_j^j|>\frac{3}{4}\varepsilon>0,$$

следующей из (2.3).

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathscr{M}$ *— равномерно малая на открытых множествах вполне регулярного пространства X совокупность мер* $\mathscr{M}\subset\mathfrak{M}(X)$.

Тогда свойством равномерной малости на открытых подмножествах пространства Y обладают:

а) *совокупность* $\mathscr{M}_f=\{|\mu|_f,\ \mu\in\mathscr{M}\}$ *образов вариаций мер из* $\mathscr{M}$ *при непрерывном отображении* f: $X\to Y$ *во вполне регулярное пространство Y;*

б) *совокупность* $\mathscr{M}_Y$ *сужений мер из* $\mathscr{M}$ *на замкнутое подпространство* $Y\subset X$*, в котором введена индуцированная из X топология.*

Доказательство. а) Пусть $\{U_k\}$ —последовательность непересекающихся открытых множеств в *Y*. Тогда $\{f^{(-1)}(U_k)\}$ — аналогичная последовательность в *X* и потому

$$|\mu|_f(U_k)=|\mu|(f^{(-1)}(U_k))\to 0 \quad (\text{равномерно по } \mu\in\mathscr{M}).$$

Пусть $\{U_k\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непересекающихся открытых в *Y* множеств и пусть существует последовательность $\{\mu_n\}\subset\mathscr{M}$, такая что $|\mu_n(U_n)|>\varepsilon$ при некотором ε>0. Пусть для каждого *n* K_n — компактное подмножество U_n, такое что $|\mu|(K_n)>\frac{3}{4}\varepsilon$. Так как замыкания подмножеств *Y* в *X* и *Y* совпадают, то

$$K_n\bigcap\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty}K_j\right)=\varnothing$$

В этом случае (см. ниже лемму 2.2) существуют попарно непересекающиеся открытые в *X* подмножества $V_n\supset K_n$ и, в силу свойств мер Радона, открытые V'_n: $K_n\subset V'_n\subset V_n$, такие, что $|\mu_n(V'_n)|>\varepsilon/2$. Это, однако, противоречит условию равномерной малости $\mathscr{M}$ на открытых подмножествах пространства *X*.

3°. Свойства $\mathfrak{R}$-пространств. Рассмотрим теперь различные операции над $\mathfrak{R}$-пространствами.

Теорема 2.3. *Произведение*

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

$\mathfrak{R}$-пространств X_n ($n = 1, 2, \ldots$) *является $\mathfrak{R}$-пространством.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — равномерно малая на открытых множествах совокупность мер из X. В силу предложения 2.2 свойством равномерной малости обладает для каждого n совокупность $\tilde{\mathscr{M}}_n = \{|\mu|_n, \ \mu \in \mathscr{M}\}$ проекций на X_n вариаций мер из $\mathscr{M}$. Поэтому множество $\tilde{\mathscr{M}}_n$ равномерно регулярно при каждом n.

Остается показать, что множество $\tilde{\mathscr{M}} = \{|\mu|, \ \mu \in \mathscr{M}\}$ неотрицательных мер в X, каждая проекция $\mathscr{M}_n$ которого равномерно регулярна, само обладает свойством равномерной регулярности.

Действительно, для каждого ε>0 и n=1, 2, ... существует компактное множество $K_n \subset X_n$ такое, что $|\mu|_n(X_n \diagdown K_n) < \varepsilon/2^n$. Рассмотрим компактное в X множество $K = \prod\limits_n K_n$. Для него

$$|\mu|(X \diagdown K) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|\{\mathrm{Pr}_n^{-1}(X_n \diagdown K_n)\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|_n (X_n \diagdown K_n) < \varepsilon.$$

Теорема 2.4. *Замкнутое подпространство Y $\mathfrak{R}$-пространства X является $\mathfrak{R}$-пространством.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — равномерно малая на открытых множествах совокупность мер из $\mathfrak{M}(Y)$. В силу предложения 2.2 образы этих мер при вложении Y в X также образуют равномерно малую (на открытых множествах X) совокупность $\tilde{\mathscr{M}}$. Поэтому для каждого ε>0 существует компактное в X множество $\tilde{K}_\varepsilon$, для которого $|\tilde{\mu}|(X \diagdown K_\varepsilon) < \varepsilon \quad (\tilde{\mu} \in \tilde{\mathscr{M}})$. При этом $K_\varepsilon =$ $= Y \cap \tilde{K}_\varepsilon$ компактно в Y и

$|\mu|(Y \diagdown K_\varepsilon) < \varepsilon \quad (\mu \in \mathscr{M})$.

Следствие 2.2. *Проективный предел счетной последовательности $\mathfrak{R}$-пространств также является $\mathfrak{R}$-пространством.*

Действительно, проективный предел счетной последовательности пространств гомеоморфен замкнутому подпространству их произведения.

Нам понадобится далее следующее вспомогательное утверждение.
Лемма 2.2. *Пусть X —вполне регулярное пространство и C_n (n = 1, 2, ...) — последовательность попарно непересекающихся компактных подмножеств X, для которой множества*

$$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$$

замкнуты.
Тогда существует последовательность $U_n \supset C_n$ (n =1, 2, ...) попарно непересекающихся открытых множеств в X.
Доказательство. В силу полной регулярности X и компактности C_1 существуют открытые множества $U_1 \supset C_1$, $V_1 \supset B_1$ с непересекающимися замыканиями. Пусть уже выбраны открытые множества $U_j \supset C_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), $V_n \supset B_n$ с попарно непересекающимися замыканиями. Построим тогда открытые множества $U_{n+1} \supset C_{n+1}$, $V_{n+1} \supset B_{n+1}$ с непересекающимися замыканиями так, чтобы $\bar{U}_{n+1} \subset V_n$, $\bar{V}_{n+1} \subset V_n$.

Теорема 2.5. *Пусть X есть топологическая сумма* $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *монотонно возрастающей последовательности* $E_n \subset E_{n+1}$ *своих замкнутых подпространств, причем для каждого n топология E_n совпадает с индуцированной из E_{n+1} и E_n замкнуто в E_{n+1}.*
Тогда, если каждое E_n есть $\mathfrak{R}$-пространство, то и X — $\mathfrak{R}$- -пространство.
Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ —равномерно малая на открытых множествах пространства X совокупность из $\mathfrak{M}(X)$. При условиях теоремы для каждого ε>0 существует номер n, для которого

$$|\mu|(X \setminus E_n) < \varepsilon/2 \qquad (\forall \mu \in \mathscr{M}). \quad (2.6)$$

Действительно, в противном случае в силу радоновости мер из $\mathscr{M}$ для некоторого δ>0 существовала бы последовательность мер $\mu_n \in \mathscr{M}$ и последовательность компактных множеств $K_n \subset X$, таких что

$$K_n \cap E_n = \varnothing; \quad \mu_n(K_n) > \delta \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если мы покажем, что множества

$$F_i = \bigcup_{n=i}^{\infty} K_n$$

замкнуты, то в силу леммы 2.2 множеста K_n можно будет погрузить в открытые попарно непересекающиеся множества U_n, и мы получим противоречие с равномерной малостью $\mathscr{M}$. Пусть $x \in \bar{F}_i$ и j — минимальный номер, для которого $x \in E_j$. Так как E_j пересекается лишь с конечным набором K_n, то в E_j существует окрестность W_j точки x, для которой $\overline{W}_j \cap F_i = \emptyset$. Далее, в E_{j+1} существует окрестность W_{j+1}, для которой $W_{j+1} \cap E_j = W_j$; $\overline{W}_{j+1} \cap F_i = \emptyset$ и т. д. При этом

$W = \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} W_k$ — не пересекающаяся с F_i окрестность точки x в X.

Итак, выполнено (2.6). Рассмотрим множество $\mathscr{M}_n = \{\mu_n\}$ сужений на E_n мер из $\mathscr{M}$. В силу предложения 2.2 оно равномерно мало на открытых множествах в E_n. Поэтому существует компактное в E_n (а значит, и в X) множество $K_{n,\varepsilon}$, для которого $|\mu_n|(E_n \setminus K_n) < \varepsilon/2$ и, следовательно, $|\mu|(X \setminus K_{n,\varepsilon}) < \varepsilon \quad (\mu \in \mathscr{M})$. ■

Теорема 2.5'. *Строгий индуктивный предел* $X = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ *возрастающей последовательности локально выпуклых $\mathfrak{R}$-пространств, каждое из которых замкнуто в последующих, есть $\mathfrak{R}$-пространство.*

Доказательство этого утверждения аналогично предыдущему.

Следствие 2.3. *Так как каждое компактное пространство автоматически является $\mathfrak{R}$-пространством, то и каждое σ-компактное пространство (свободное объединение возрастающей последовательности компактных подпространств) является $\mathfrak{R}$-пространством.*

4°. Примеры $\mathfrak{R}$-пространств.

Пример 2.1. Каждое полное метрическое пространстве является $\mathfrak{R}$-пространством.

Пусть $\mathscr{M} \subset \mathfrak{M}(X)$ равномерно мало на открытых множествах пространства X. Достаточно показать, что для каждого ε>0 существует такое компактное множество K_ε, что

$$|\mu|(X \setminus K_\varepsilon^\varepsilon) < \varepsilon \qquad (\mu \in \mathscr{M}), \quad (2.7)$$

где $A^\varepsilon = \{x: \ \rho(x, A) \leqslant \varepsilon\}$. Действительно, в этом случае множество

$$C_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} K_{1/2^n}^{1/2^n}$$

компактно, так как оно замкнуто и вполне ограничено. При этом для каждой меры из $\mathscr{M}$ справедлива оценка:

$$|\mu|(X \setminus C_m) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} |\mu|\left(X \setminus K_{1/2^n}^{1/2^n}\right) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

которая и показывает равномерную регулярность $\mathscr{M}$.

Допуская, что (2.7) не выполняется, построим компактное множество $K_1 \subset X$ и меру μ_1 для которых $|\mu_1(K_1)| > \varepsilon$; затем компактное множество $K_2 \subset X \setminus K_1^{\varepsilon}$ и меру μ_2. для которых $|\mu_2(K_2)| > \varepsilon$. Вообще, если K_n и μ_n уже построены, построим компактное множество $K_{n+1} \subset X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_j^{\varepsilon}$ и меру μ_{n+1} такие, что $|\mu_{n+1}(K_{n+1})| > \varepsilon$.

Последовательность открытых множеств $V_n = \operatorname{int} K_n^{\varepsilon/2}$ попарно не пересекается и обладает свойством $|\mu_n|(V_n) > \varepsilon$, противоречащим равномерной малости $\mathscr{M}$.

Пример 2.2. Пусть $X = \bigcap_n E_n$ — полное счетно-нормированное пространство с вполне непрерывными вложениями. Тогда его сопряженное пространство X' σ-компактно и, следовательно, является $\mathfrak{R}$-пространством. Действительно, из полной непрерывности вложений $E_{n+1} \subset E_n$ следует, что пространство $X = \bigcap_n E_n$ — монтелевское (бочечное пространство, в котором все ограниченные множества относительно компактны). Поэтому оно рефлексивно и его сильное сопряженное также является монтелевским пространством. Из рефлексивности X' следует, что всякое его ограниченное подмножество содержится в поляре некоторой окрестности нуля из X, а из монтелевости X'— что поляра U^0 всякой окрестности нуля $U \subset X$ компактна в X'. Таким образом, если $\{U_n\}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в X, то $\{U_n^0\}$ — фундаментальная система компактных множеств в X'.

Пример 2.3. Как следует из теорем 2.3 — 2.5' и следствий 2.2 — 2.3, применяя к рассмотренным примерам $\mathfrak{R}$-пространств операции топологического произведения и суммы, а также перехода к подпространству, в частности, операции индуктивного и проективного предела, мы снова получаем $\mathfrak{R}$-пространства.

В частности, $\mathfrak{R}$-пространствами являются рассматриваемые в анализе пространства основных и обобщенных функций $\mathscr{D}$; $\mathscr{D}'$; $\mathscr{D}_K$; $\mathscr{D}'_K$; $\mathscr{S}$; $\mathscr{S}'$ (K —компактное подмножество евклидова пространства).

5°. Слабая компактность множества мер в пространстве *X'*.

Рассмотрим условия слабой компактности совокупностей положительных мер Радона в пространстве X', сопряженном к л.в.п. X.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathscr{M}$ *—множество положительных нормированных X-цилиндричгских мер на X'. Если множество* $\tilde{\mathscr{M}}$ *характеристических* *функционалов этих мер равностепенно непрерывно в нуле пространства (X,* $\tau_S(X, \tau(X, X')))$, *то множество* $\mathcal{M}$ *равномерно регулярно.*

Доказательство. По определению равностепенной непрерывности для каждого δ >0 существует окрестность *V* в топологии $\tau_S(X, \tau(X, X'))$, такая.что

$$|\mathrm{Re}\,\chi_\mu(x) - 1| < \delta \qquad (\mu \in \mathcal{M}).$$

Эта окрестность задается некоторой преднормой $p \in \mathcal{P}(X)$: $V = \{x: p(x) < 1\}$. Но тогда, как указано в замечании 1.1, существуют преднорма *q*, *r*>0 и отвечающее им компактное множество $K = S^0(q, r)$, обладающее нужными свойствами: $\mu(B) < \varepsilon$ $(B \in \mathfrak{A}_X;\ B \cap K = \varnothing;\ \mu \in \mathcal{M})$, если δ = δ(ε) достаточно мало.

Следствие 2.4. *Если* $\mathcal{M}$ *— множество положительных нормированных мер Радона на (X', σ), у которого множество* $\tilde{\mathcal{M}}$ *характеристических функционалов равностепенно непрерывно в нуле в топологии* $\tau_S(X, \tau(X, X'))$, *то это множество* $\mathcal{M}$ *равномерно регулярно.*

Лемма 2.3 в сочетании с теоремой 2.1 приводит к следующему утверждению.

Теорема 2.6. *Пусть X — л.в. п.;* $\mathcal{M}$ *—множество положительных нормированных мер Радона на* X'_σ. *Если множество* $\tilde{\mathcal{M}}$ *характеристических функционалов этих мер равностепенно непрерывно в нуле в топологии* $\tau_S(X, \tau(X, X'))$, *то* $\mathcal{M}$ *относительно слабо компактно в* $\mathfrak{M}(X'_\sigma)$.

Замечание 2.2. При дополнительном предположении метризуемости компактных подмножеств пространства X'_σ множество $\mathcal{M}$ относительно секвенциально слабо компактно.

Рассмотрим теперь вопрос об обращении теоремы 2.6. Следующее утверждение представляет собою переформулировку замечаний 1.2 и 1.3.

Теорема 2.7. *Пусть X — локально выпуклое пространство,* $\mathcal{M}$ *— ограниченное и равномерно сильно регулярное подмножество пространства* $\mathfrak{M}(X'_\sigma)$. *Тогда множество* $\tilde{\mathcal{M}}$, *характеристических функционалов этих мер равностепенно непрерывно в топологии Макки* $\tau(X, X')$. *Если X бочечно и* $\mathcal{M}$ *лишь равномерно регулярно, то* $\tilde{\mathcal{M}}$ *равностепенно непрерывно в исходной топологии.*

Следствие 2.5 *Пусть X —бочечное л.в.п., а его сопряженное X' в некоторой топологии τ', согласующейся с двойственностью X и X', обладает свойством* $\mathfrak{R}$. *Тогда из слабой секвенциальной предкомпактности множества мер Радона* $\mathcal{M} \subset \mathfrak{M}(X', \tau')$

следует равностепенная непрерывность в нуле множества $\mathscr{M}$ их характеристических функционалов.

Действительно, множество $\mathscr{M}$ равномерно мало на открытых множествах пространства *X'*. Иначе для некоторого ε>0 и некоторой последовательности открытых множеств U_n существовала бы последовательность μ_n такая, что $|\mu_n|(U_n) > \varepsilon$. При этом из { μ_n } нельзя было бы в силу теоремы 2.2 выбрать фундаментальную подпоследовательность. Так как *(X', τ')* есть $\mathfrak{R}$-пространство, то $\mathscr{M}$ — равномерно регулярно.

Если к тому же компактные подмножества *(X', μ')* метризуемы, то в силу замечания 2.1 уже из слабой компактности $\mathscr{M}$ следует равностепенная непрерывность $\tilde{\mathscr{M}}$.

Применим полученные результаты к выяснению условий слабой сходимости последовательности вероятностных (т. е. неотрицательных нормированных) мер Радона.

Теорема 2.8. *Пусть X — л.в.п., { μ_n } — последовательность вероятностных мер Радона на X'_σ. Для слабой сходимости этой последовательности:*

а) *достаточно, чтобы последовательность характеристических функционалов $\chi_n(x)$ этих мер сходилась в каждой точке $x \in X$ и была равностепенно непрерывна в нуле в топологии* $\tau_S(X,\ \tau(X,\ X'))$;

б) *при дополнительном условии, что X бочечно, а X' — $\mathfrak{R}$-пространство, необходимо, чтобы последовательность $\chi_n(x)$ сходилась при каждом x и была равностепенно непрерывна в нуле в исходной топологии X.*

Доказательство. Сходимость $\chi_n(x)$ непосредственно следует из слабой сходимости последовательности мер. Поэтому утверждение б) вытекает из следствия 2.6.

Пусть, наоборот, последовательность $\chi_n(x)$сходится к некоторой функции *χ(x)*. Так как мера однозначно определяется своим характеристическим функционалом, последовательность μ_n не может иметь более одной предельной точки. Условия а) обеспечивают, в силу теоремы 2.6, относительную слабую компактность рассматриваемой последовательности и, в силу слабой полноты M *(X')*, ее сходимость.

Следствие 2.6. (Теорема Леви.) *Если X —ядерное, бочечное л.в.п., а X' — $\mathfrak{R}$-пространство, то для слабой сходимости вероятностных мер Радона { μ_n } необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность характеристических функционалов была равностепенно непрерывна в нуле пространства X и сходилась в каждой точке этого пространства.*

Следствие 2.7. *Пусть* (X, (3) — *л.в.п.,* $T_x^{(n)}$ — *последовательность унитарных представлений X в гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}$. *Пусть последовательность функций* $(T_x^{(n)}h,\ h)$ *при каждом* $h \in \mathscr{H}$ *равностепенно непрерывна в нуле в топологии* $\tau_S(X,\ \beta)$.

В силу теоремы 1.4 *справедливо представление*

$$(T_x^{(n)}h,\ h) = \int_{X'} e^{i\langle x,\ y\rangle}(E^{(n)}(dy)h,\ h) \qquad (h \in \mathscr{H}),$$

где $E^{(n)}$ — *сосредоточенные в X' ортогональные проекторозначные меры.*

Пусть в каждой точке $x \in X$ *справедливо соотношение:*

$$(T_x^{(n)}h,\ h) \to (T_x h,\ h) \quad (h \in \mathscr{H}).$$

Тогда для любой непрерывной, ограниченной на X' функции f сходится соответствующая последовательность функций от совокупности производящих операторов представлений $T^{(n)}$:

$$\int_{X'} f(y)(E^{(n)}(dy)h,\ h) \to \int_{X'} f(y)(E(dy)h,\ h).$$

Вопрос о σ-аддитивности цилиндрической меры естественно возникает в теории случайных функций при построении вероятностного пространства по системе конечномерных распределений. Из общей теоремы Колмогорова следует σ -аддитивность этой меры в пространстве всех функций на рассматриваемом множестве значений аргумента. Однако в ряде случаев важно уметь выделять более узкое пространство, имеющее полную меру. В гл. II мы уже обсуждали этот вопрос в специальном случае гауссовой меры. Достаточный признак того, что почти все реализации некоторого случайного процесса непрерывны (и, следовательно, соответствующая вероятностная мера сосредоточена в пространстве непрерывных функций), был впервые указан А. Н. Колмогоровым. Аналогичный вопрос естественно возникает и для цилиндрических мер в абстрактном линейном пространстве. Он был решен почти одновременно и независимо Р. А. Минлосом для счетно-гильбертова и В. В. Сазоновым для гильбертова пространства.

Р. А. Минлос исходил из понятия случайного распределения Гель-фанда — Ито (обобщенного случайного процесса), эквивалентного понятию неотрицательной цилиндрической меры. Он показал, что критерием продолжимости случайного распределения в счетно-гильбертовом ядерном пространстве *X* до меры в сопряженном пространстве является непрерывность этого распределения (или, что то же самое, его характеристического функционала в топологии *X),* а также показал необходимость ядерности *X*.

С другой стороны, В. В. Сазонов ввел в гильбертовом пространстве топологию τ_S и показал, что непрерывность характеристического функционала неотрицательной цилиндрической меры в топологии τ_S эквивалентна σ-аддитивности этой меры. А. Н. Колмогоров заметил, что вводя топологию τ_S в счетно-гильбертовом пространстве, можно получить результат, обобщающий и теорему Минлоса и теорему Сазонова, а также указал на содержащееся в работе Ю. В. Прохорова простое доказательство основного неравенства типа (1.1).
Ряд результатов о характеристических функционалах в гильбертовом пространстве, связанных с теоремой Бохнера и проблемой продолжения меры, был впоследствии другими методами получен Л. Гроссом. Переход к мерам в более общих пространствах был сделан в работах Н. Бурбаки, А. Бадрикяна и Л. Шварца.

Раздел II. Нечеткие меры

4. Меры возможности и нечеткие множества

Содержание этого материала основывается на нетрадиционном подходе к моделированию неточности и неопределенности, изложенном в книге Д.Дюбуа, А.Прад «Теория возможностей». Базовым понятием этого подхода является мера возможности. Цель этого паздела— обоснование, определение и обсуждение меры возможности, а также представление других базовых понятий, необходимых для усвоения последующих разделов.

4.1. Неопределенность и неточность

Неопределенность и неточность могут рассматриваться как две противоположные точки зрения на одну и ту же реальность - неполноту информации. Далее будет предполагаться, что информация выразима в форме логического высказывания, содержащего предикаты и в случае необходимости — квантификаторы. Под базой знаний будет пониматься множество сведений, имеющихся у субъекта или группы субъектов или содержащихся в информационной системе и относящихся к одной и той же проблемной области. Тогда предикаты, появляющиеся при выражении информации, могут интерпретироваться как подмножества одного и того же универсального множества. Любое высказывание может также рассматриваться как утверждение, относящееся к появлению некоторого события. В свою очередь, события представимы в виде подмножеств этого универсального множества, называемого "достоверным событием". Таким образом, имеются три эквивалентных способа анализа множества данных в зависимости от того, делается ли акцент на структуре (логическая точка зрения), содержании (теоретико-множественная точка зрения) этой информации или на ее отношении к действительным фактам (событийная точка зрения).

Мы **определим информационную единицу четверкой (объект, признак, значение, уверенность).** *Признаку* соответствует функция, задающая значение (множество значений) объекта или *предмета,* название которого фигурирует в информационной единице. Это значение соответствует некоторому предикату, т. е. подмножеству универсального множества, связанного с данным признаком. *Уверенность* есть показатель надежности информационной единицы. Очевидно, что четыре компонента, образующие информационную единицу, могут быть составными (множество объектов, множество признаков, n-местный предикат, разные степени уверенности). Кроме того, могут вводится переменные, особенно на уровне объектов, если информация содержит квантификаторы. В данном контексте можно четко различать понятия неточности и неопределенности: **неточность относится к содержанию информации (составляющая "значение" в четверке), а неопределенность — к ее истинности, понимаемой в смысле соответствия действительности (составляющая "уверенность").**

Степень неопределенности информации отражают с помощью квалификаторов (модальностей) типа "вероятно", "возможно", "необходимо", "правдоподобно" и др., которым здесь мы попытаемся придать точный смысл. Модальность "вероятно" исследовалась на протяжении уже двух веков. Вероятность имеет две различные интерпретации. Одна из них — физическая (статистическая) , связанная с проведением статистических испытаний и определением частоты появления события. Другая — эпистемологическая, относящаяся к субъективному суждению. **Модальности "возможно" и "необходимо" изучались еще Аристотелем, который подчеркнул факт их двойственности (если некоторое событие является необходимым, то противоположное ему событие невозможно).** Любопытно, что в противоположность понятию "вероятно" понятия "возможно" и "необходимо" часто рассматривались в рамках двузначной логики как категории типа "все" или "ничего". Но понятие "возможно", как и понятие "вероятно", допускает две интерпретации:

физическую (мера трудоемкости выполнения некоторого действия) и эпистемологическую (суждение, которое мало связывает его автора). Наоборот, "необходимо" — гораздо более утвердительное понятие в физическом или эпистемологическом смысле (субъективная необходимость есть определенность, уверенность). Естественно допустить наличие степеней возможности и необходимости, как и степеней вероятности (оттенки возможности находятся уже в естественном языке, поскольку можно сказать, например, "очень возможно"). Правдоподобность и доверие имеют чисто эпистемологическую интерпретацию и связаны с возможностью и необходимостью соответственно. Каждое из этих понятий соответствует некоторому способу вывода из заданной базы знаний: **заслуживает доверия все то, что непосредственно дедуктивно выводится из базы знаний, а правдоподобно все то, что не противоречит ей (индуктивная точка зрения).**

Примерами неопределенных высказываний являются высказывания:

"Вероятно, что рост Жана не менее 1,70 м" $\triangleq$ (рост, Жан, $\geq$1,70 м, вероятно) .

"Вероятность того, что завтра выпадет 10 мм осадков, равна 0,5" $\triangleq$ (количество, осадки завтра, 10 мм, вероятность = 0,5).

Будем называть информационную единицу точной, если подмножество, соответствующее "значение" в наборе, является одноточечным, т. е. его нельзя разбить на части. В зависимости от способа анализа множества данных будем говорить об элементарном высказывании (т. е. не имплицированном никаким другим высказыванием, за исключением всегда ложного высказывания), синглетоне (теоретико-множественная точка зрения) или элементарном событии. Точность, конечно, зависит от способа определения базового множества (от его "зернистости", например от выбора единицы измерения). В других случаях будем говорить о неточной (imprecise) информации. Во французском языке есть и другие квалификаторы для описания неточности, такие как vague (расплывчатый, неясный, смутный), flou (нечеткий, размытый), general (обобщенный), ambigu (двусмысленный). Двусмысленность представляет собой форму неточности, связанную с языком: иногда она является следствием омонимии языка. Информация двусмысленна в той мере, в которой она относится к различным контекстам или различным возможным базам (универсальным множествам). Этот тип неточности не рассматривается в данной книге: универсальное множество, связанное с информационной единицей, считается известным. Обобщенность есть "доброкачественная" форма неточности, связанная с процессом абстрагирования: информация является обобщенной, если указывается множество объектов с общим свойством. Нечеткий, размытый, расплывчатый характер информации заключается в отсутствии четких границ у множества значений соответствующих объектов. Многие квалификаторы естественного языка расплывчаты, и для них характерна обобщенность. В качестве примера можно привести неточное четкое высказывание: "x =y" с точностью $\epsilon \triangleq$ (равенство, (x, y), с точностью ϵ, 1); неточное нечеткое высказывание: "x *приблизительно* равен y" = (равенство, (x, y), приблизительно, 1). Расплывчатый термин "приблизительно" характеризует совокупность значений, более или менее адекватных ϵ.

Отсюда следует, что информация может быть одновременно нечеткой и неопределенной, о чем свидетельствует предложение: "Вероятно, что завтра выпадет много осадков" = (количество, осадки завтра, много, вероятно).

Для заданного множества сведений противоречие между неточностью и неопределенностью выражается в том, что с повышением точности содержания высказывания возрастает его неопределенность. И наоборот, неопределенный характер точной информации приводит в общем случае к некоторой неточности окончательных заключений, выводимых из этой информации.

4.2. Традиционные модели неточности и неопределенности

Традиционно используются два средства представления неполноты данных: теория вероятностей и теория ошибок. Кратко рассмотрим их области применения.

Теория вероятностей — вполне разработанная математическая теория с ясными и общепринятыми аксиомами. Основная из них — аксиома аддитивности вероятностей совместных событий. Споры вокруг теории вероятностей касаются ее интерпретации: какого рода действительность хотят выразить с помощью этой математической модели? Исторически ею пользовались в основном для "подсчета шансов" в азартных играх, причем вероятность события определялась отношением числа благоприятных исходов к числу возможных исходов. Недостаточная строгость этого определения породила школу частотной интерпретации вероятности, в которой вероятность рассматривается как предел частот наблюдаемых событий. Третья, так называемая субъективистская школа, попыталась избежать трудностей приложений теории, с которыми сталкиваются "частотники" (требований достаточного числа наблюдений, повторяемости экспериментов и т. д.), предложив интерпретацию вероятности как меры неуверенности. Значение вероятности при этом понимается как число, пропорциональное сумме, которую субъект согласится заплатить в том случае, если высказывание, являющееся по его утверждению истинным, в действительности окажется ложным. Было, показано, что подобным образом определенная мера неуверенности подчиняется аксиомам теории вероятностей, если только поведение субъекта удовлетворяет условиям "рациональности" (Сэвидж). Исходя из этого "субъективисты" стали утверждать, что аксиомы Колмогорова — единственные рациональные условия для оценки чувства неуверенности. .

Такую крайнюю позицию можно оспаривать и с философской, и с практической точек зрения. Прежде всего трудно согласиться с тем, что всякое неопределенное суждение подчиняется законам пари. Денежный залог, присутствующий в субъективистской модели, может помешать субъекту раскрыть истинный уровень своих знаний из-за страха потерять деньги. Так, профессиональный игрок распределит ставки поровну, если ему известно, что все соперники, на которых он ставит, равны по силе. При отсутствии всякой информации новичок сделает то же самое, потому что такая стратегия — наиболее осторожная. Субъективные вероятности не позволяют проводить различия между этими двумя уровнями информированности и представляются малопригодными в ситуациях, когда информации мало. В вероятностной модели особенно плохо учитывается предельный случай полного незнания, поскольку в ней всегда предполагается заданным множество взаимно независимых событий, которым в силу принципа максимума энтропии приписываются равные вероятности (в конечном случае). Тогда идентификация всех этих событий исключена и кажется спорным, что значения неопределенности, связанные с этими событиями, зависят от числа рассматриваемых альтернатив, как в случае вероятностей.

С практической точки зрения очевидно, что числа, назначаемые субъектами для вероятностного описания уровня их информированности, должны рассматриваться как приближенные оценки. Теория субъективных вероятностей не затрагивает этот тип неточности и полагает, что "рациональный индивидуум" должен в результате процедур оценивания задавать точные числа.

В заключение отметим, что теория вероятностей представляется слишком нормативной для выражения всех аспектов субъективного суждения. Теория же ошибок, часто используемая в физике, отражает лишь неточность средств измерения, выраженную в интервальной форме, в величинах, оцениваемых с помощью этих средств. В математическом плане определяется образ отображения, аргументы которого суть подмножества. **Теория ошибок <u>не приемлет</u> <u>оттенков</u>: если неизвестно точное значение параметра, то точно известны пределы его изменения.** Заметим, что когда задана мера неточности М величины X, то предложения типа: "X принадлежит интервалу I будут естественным образом характеризоваться с помощью модальностей "возможно" и "необходимо", так как:

1) если пересечение $\mathbf{M \cap I}$ непусто, то $\mathbf{"X \in I"}$, возможно, истинно;

2) если $\mathbf{M \subseteq I}$, то $\mathbf{"X \in I"}$ с необходимостью истинно.

Здесь выявляются связи между этими модальностями и теорией множеств: возможность оценивается с помощью теоретико-множественного пересечения содержаний М и I двух высказываний: $\mathbf{"X \in M"}$ и $\mathbf{"X \in I"}$, а необходимость вычисляется, исходя из отношения вложенности.

Принцип "все или ничего" — характерная черта теории ошибок, тогда как в теории вероятностей учитываются оттенки, градации неопределенности. Это вводит определенные различия между ними, которые хотелось бы по возможности стереть. Очевидно, что теория вероятностей не обобщает теорию ошибок, поскольку распределение вероятностей для функции равномерно распределенных случайных переменных (вероятностный аналог интервала ошибки) в общем случае не является равномерным. В данной книге предлагается **вариант канонического обобщения теории ошибок, позволяющий <u>учитывать оттенки неопределенности</u>.**

Часто оказывается, что неточность типа ошибки измерения присутствует в самой серии испытаний, проводимых для определения случайного явления. Можно констатировать, что в этом случае без введения дополнительных гипотез вряд ли удастся представить полученную информацию в чисто вероятностной форме. В самом деле, **<u>основная гипотеза</u>, обеспечивающая применимость теории вероятностей в математической статистике, состоит в том, что пространство испытаний можно поставить во взаимно однозначное соответствие с пространством событий.** С каждым событием связывается множество его реализаций (непустое, если только данное событие не является невозможным) , и для любой пары различных событий существует по крайней мере одно испытание, в котором одно событие исключает другое. Эта гипотеза позволяет разбить достоверное событие на элементарные события, каждое из которых соответствует какой-то реализации. При обработке статистических данных это приводит к предположению о существовании такого разбиения множества реализаций, что результат всякого эксперимента можно будет сопоставить с одним, и только одним элементом этого разбиения, т. е. **результат есть элементарное событие.**

Можно отыскать такие ситуации, в которых гипотеза о разбиении испытаний не справедлива. Например, если измерения дают интервалы ошибок, то вообще мало шансов соотнести их с непересекающимися классами реализаций. Физик часто оказывается в противоположной ситуации: ему требуется получить пересекающиеся интервалы, порожденные независимыми измерениями, чтобы иметь возможность с помощью проверки уменьшить ошибку измерения. Отсюда видно, что даже в случае "объективных" повторяющихся явлений не всегда можно напрямую применять теорию вероятностей. **Вероятностная модель приспособлена к обработке точной, но распределенной по реализациям информации.** Как только возникает неточность в отдельной реализации, модель становится неприменимой.

Это краткое обсуждение ограничений традиционных моделей неточности и неопределенности проведено с целью обосновать необходимость в описании более широкого плана, общего для теории вероятности и теории ошибок, в котором оба этих понятия заняли бы надлежащее место и были бы вскрыты их связи и различия. В данной книге очерчиваются лишь контуры этого общего подхода, который будет включать новое семейство мер неопределенности, тесно связанное с теорией ошибок, — **меры возможности**. **Эти функции множества полностью отличны от вероятностных мер**. В то время как вероятности были приспособлены к обработке точных, но противоречивых результатов испытаний, меры возможности станут естественным средством для построения баз знаний, хотя и неточных, но согласованных.

4.3. Меры неопределенности

Рассмотрим множество событий, связанных с базой неточных и неопределенных знаний, понимаемых как подмножества универсального множества Ω, называемого достоверным событием. Пустое множество *Ø* отождествляется с невозможным событием. Предполагается, что каждому событию $A \subset \Omega$ можно поставить в соответствие действительное число g(A), задаваемое субъектом — "хранителем" базы знаний (или получаемое с помощью процедуры переработки информации, хранящейся в памяти информационной системы). Значение g(A) оценивает степень уверенности, имеющейся у субъекта по отношению к событию A с учетом текущего уровня информированности. По определению величина g(A) растет с увеличением уверенности. Более того, если A — достоверное событие, то полагают g(A) = 1, а если A — невозможное событие, то полагают g(A) = 0. Имеем

$$g(\emptyset) = 0 \text{ и } g(\Omega) = 1. \tag{1}$$

Однако g (A) = 1 (соответственно 0) вообще говоря, не означает, что A непременно является достоверным (соответственно, невозможным) событием. Наиболее слабая аксиома для обеспечения некоторого минимума согласованности при определении функции множества g, которую можно себе представить, — это монотонность по включению

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leqslant g(B). \tag{2}$$

Эта аксиома выражает следующее: если событие A влечет за собой другое событие B, то всегда имеется по меньшей мере столько же уверенности появлении B, сколько в появлении A.

Такие функции множества были предложены Сугено для оценки неопределенности под названием *нечеткие меры.* А. Кофман предложил термин "оценка". Мы принимаем здесь название *мера неопределенности*[1]. (В оригинале авторы называют произвольную неаддитивную функцию множества, удовлетворяющую аксиомам ограниченности, монотонности и непрерывности, термином "мера доверия". Такое название представляется не совсем удачным, так как термин "мера доверия" или "функция уверенности" используется в зарубежной и отечественной литературе для характеристики более узкого класса супераддитивных мер, удовлетворяющих помимо указанных аксиом требованию $\forall A \subseteq \Omega,\ Cr(A) =$

$= \sum_{B \subset A} m(B)$ (см. также формулу (26)). Мы решили использовать термин "мера неопределенности", заранее оговаривая, что поскольку эти меры являются расширением математических объектов, изучаемых в классической теории меры, то с большей строгостью их следовало бы называть "квазимеры" или "полумеры".)

Следует напомнить, что эти функции множества не являются обычными мерами, поскольку они могут не быть аддитивными, за исключением специально оговоренных случаев.

Если Ω — бесконечное множество, то можно ввести условие непрерывности в виде

$$\lim_{n \to +\infty} g(A_n) = g(\lim_{n \to +\infty} A_n) \qquad (3)$$

для любой последовательности $\{A_n\}_n$ вложенных множеств вида $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ или $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq \ldots$
Будем предполагать, что мера неопределенности удовлетворяет условию (3) по крайней мере для одной из двух указанных последовательностей вложенных множеств.

4.3.1. Меры возможности и необходимости

Следующие неравенства непосредственно вытекают из аксиомы монотонности (1.2) и характеризуют объединение $A \cup B$ или пересечение $A \cap B$ событий:

$$\forall A, B \subseteq \Omega,\ g(A \cup B) \geqslant \max(g(A), g(B)), \qquad (4)$$

$$g(A \cap B) \leqslant \min(g(A), g(B)). \qquad (5)$$

Предельным случаем мер неопределенности оказываются функции множества П такие, что

$$\forall A, B, \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)). \qquad (6)$$

Они называются *мерами возможности* по Заде. В формуле (6) читателей может удивить отсутствие предположения о том, что А и В — непересекающиеся множества. Легко проверить, что если условие (6) справедливо для любой пары непересекающихся множеств $A \cap B = \emptyset$, то оно справедливо и для любой пары множеств (событий) (Дюбуа и Прад). Использование термина "возможность" для обозначения этих мер неопределенности может быть оправдано с нескольких точек зрения.
Пусть $E \subseteq \Omega$— достоверное событие. Легко определить функцию П со значениями из {0,1}, удовлетворяющую условию (6):

$$\Pi_E(A) = \begin{cases} 1, \text{ если } A \cap E \neq \emptyset, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (7)$$

Ясно, что в данном контексте $\Pi_E(A) = 1$ означает, что событие А возможно.

Это наводит на мысль о связи мер возможности с теорией ошибок (см. выше) . В частности, если $\mathbf{A}$ и $\bar{\mathbf{A}}$ — два противоположных события ($\bar{\mathbf{A}}$ есть дополнение А в 12), то имеем

$$\max\ (\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1. \tag{8}$$

Это интерпретируется как факт, что из двух противоположных событий по крайней мере одно безусловно возможно. Более того, когда некоторое событие считается возможным, то не исключается возможность противоположного события. Это согласуется с семантикой суждений о возможности, которые мало к чему обязывают их авторов. Утверждение, что события $\mathbf{A}$ и $\bar{\mathbf{A}}$ одинаково возможны, соответствует случаю полного незнания, когда событие А столь же ожидаемо, что и противоположное событие.

Наконец, условие (6) согласуется с представлением о возможности на уровне здравого смысла: для того чтобы реализовать $A \bigcup B$, достаточно реализовать самый "легкий" вариант из этих двух (наименее дорогостоящий).

Когда множество Ω конечно, то всякую меру возможности П можно определить по ее значениям на одноточечных подмножествах Ω:

$$\Pi(A) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}, \tag{9}$$

где $\pi(\omega) = \Pi(\{\omega\})$; π есть отображение из Ω в [0,1], называемое *функцией распределения возможностей.* Оно является *нормальным* в смысле

$$\exists\omega, \quad \pi(\omega) = 1, \tag{10}$$

поскольку П(Ω) = 1

Замечание. Формула (9) справедлива даже в случае, когда (как и у Заде) не накладывается условие П(Ω) = 1. Тогда условие (8) и (10) выполняются, если заменить 1 на П (Ω).

Когда множество Ω бесконечно, то не гарантировано существование функции распределения возможностей. Соответствующее распределение становится распределением возможности лишь тогда, когда аксиома (6) расширяется на случай бесконечных объединений событий. В прикладных задачах можно всегда исходить из функций распределения возможностей и строить меру возможности П с помощью формулы (9). В наиболее общем случае меры возможности не удовлетворяют аксиоме непрерывности (3) для убывающих последовательностей вложенных множеств. Другой граничный случай мер неопределенности получается при достижении равенства в форму-ле (5). При этом определяется класс функций множества, называемых *мерами необходимости* и обозначаемых N, которые удовлетворяют аксиоме, двойственной аксиоме (6):

$$\forall A, B, \quad N(A \cap B) = \min\left(N(A), N(B)\right). \tag{11}$$

Легко построить функцию N со значениями в {0,1} исходя из информации о достоверном событии и полагая

$$N(A) = \begin{cases} 1, \text{если } E \subseteq A, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \tag{12}$$

Здесь N(A)=1 означает, что A — достоверное событие (с необходимостью истинное). Более того, легко видеть, что функция множества N удовлетворяет аксиоме (11) тогда, и только тогда, когда функция П, определяемая в виде

$$\forall A, \Pi(A) = 1 - N(\bar{A}), \tag{13}$$

является мерой возможности. Формулы (12) и (13) поясняют название "меры необходимости" для функции N. Формула (13) есть численное выражение отношения двойственности между модальностями "возможно" и "необходимо" (в модальной логике), постулирующее, что некоторое событие необходимо, когда противоположное событие невозможно. Это отношение двойственности означает, что всегда можно построить функцию распределения необходимости исходя из функции распределения возможности с помощью формулы

$$N(A) = \inf\left\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \notin A\right\}. \tag{14}$$

Меры необходимости удовлетворяют соотношению

$$\min\left(N(A), N(\bar{A})\right) = 0, \tag{15}$$

которое исключает одновременную необходимость двух противоположных событий. С помощью (13) и (15) (или (8)) нетрудно проверить, что

$$\forall A \subseteq \Omega, \Pi(A) \geqslant N(A). \tag{16}$$

Данное условие отвечает интуитивному представлению о том, что, прежде чем быть необходимым, событие должно быть возможным. К тому же имеются более сильные утверждения, чем аксиома (16):

$$N(A) > 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1; \tag{17}$$

$$\Pi(A) < 1 \Rightarrow N(A) = 0. \tag{18}$$

4.3.2. Возможность и вероятность

Когда имеется информация о появлении событий в форме измеренных частот элементарных событий, полученная мера неопределенности естественным образом удовлетворяет аксиоме аддитивности

$$\forall A, \forall B, A \cap B = \varnothing, P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{19}$$

т.е. становится *вероятностной мерой,* которая, конечно, является монотонной в смысле условия (2). Формула (19) - вероятностный эквивалент аксиом (6) и (11).

Условие, эквивалентное условиям (9) и (14), для конечного случая записывается в виде

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \tag{20}$$

где $p(\omega) = P(\{\omega\})$. Условие нормировки $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

является аналогом условия (10). Общая черта вероятностных мер, мер возможности и необходимости заключается в том, что все они могут характеризоваться некоторыми распределениями на элементах универсального множества.

Здесь аналогом соотношений (8) и (15) является хорошо известное соотношение

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1, \tag{21}$$

в то время как из (8) и (15) следуют лишь неравенства

$$N(A) + N(\bar{A}) \leqslant 1, \tag{22}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geqslant 1. \tag{23}$$

Из этих соотношений видно одно из главных различии между возможностью и вероятностью. Вероятность некоторого события полностью определяет вероятность противоположного события. Возможность (или необходимость) некоторого события и возможность (необходимость) противоположного ему события связаны слабее; в частности, для того, чтобы охарактеризовать неопределенность по отношению к событию А, требуются два числа П(А) и N(A), удовлетворяющие условию (17) или (18).

Когда моделируется субъективное суждение, кажется естественным стремление не устанавливать жесткой связи между показателями, свидетельствующими в пользу некоторого события (степень необходимости), и показателями, свидетельствующими против него (степень возможности). В этой ситуации понятие вероятности оказывается менее гибким, чем понятие меры возможности.

Даже когда сохраняется требование аддитивности, можно построить меры возможности и необходимости, если не требовать дополнительно, чтобы значения вероятностей (распределение р) относились к элементарным событиям. Точнее, пусть $E_1, E_2, \ldots, E_p$ непустые, попарно различные подмножества множества Ω (предполагаемого конечным) с соответствующими значениями вероятности $m(E_1), \ldots, m(E_p)$, такими, что

$$\sum_{i=1,\ldots,p} m(E_i) = 1, \qquad (24)$$

и

$$\forall i, m(E_i) > 0. \qquad (25)$$

Величина $m(E_i)$ понимается как значение вероятности совокупности элементарных событий, составляющих E_i, причем здесь не оговаривается распределение величины $m(E_i)$ по элементарным событиям. Подмножества E_i называются "фокальными элементами" и могут отражать неточность наблюдений. В этой ситуации вероятность события А можно охарактеризовать лишь неточно как величину, содержащуюся в интервале

$$[P_*(A),\ P^*(A)]$$

с границами

$$P_*(A) = \sum_{E_i \subseteq A} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot N_{E_i}(A), \qquad (26)$$

$$P^*(A) = \sum_{E_i \cap A \neq \emptyset} m(E_i) = \sum_i m(E_i) \cdot \Pi_{E_i}(A). \qquad (27)$$

Значение $P_*(A)$ вычисляется по всем фокальным элементам, которые делают необходимым появление события А (или влекут за собой событие А). Значение $P^*(A)$ получается при рассмотрении всех фокальных элементов, которые делают возможным появление события А. Отметим, что имеется отношение двойственности между P^* и P_*:

$$\forall A, P^*(A) = 1 - P_*(\bar{A}). \qquad (28)$$

Доказано (Шейфер), что функция P^* (соответственно P_*) удовлетворяет аксиоме (6) (соответственно (11)), т. е. является мерой возможности (соответственно необходимости) тогда, и только тогда, когда фокальные элементы образуют последовательность вложенных множеств. А именно если $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_p$, то функция распределения возможностей π, связанная с P^* и P_*, определяется в виде

$$\forall\omega, \pi(\omega) = P^*(\{\omega\}) = \begin{cases} \sum_{j \geq i} m(E_j), \text{если } \omega \in E_i, \omega \notin E_{i-1}, \\ 0, \text{если } \omega \in \Omega - E_p. \end{cases} \quad (29)$$

Ясно, что если, наоборот, фокальные элементы являются элементарными (а значит, несовместными) событиями, то $\forall A, P_*(A) = P^*(A) = P(A)$, т. е. снова возвращаемся к вероятностной мере.

Если схематично представить базу знаний с помощью множества фокальных элементов (которые являются составляющими "значение" в наборе, описывающем информационную единицу), то легко понять, что вероятностные меры естественным образом синтезируют базу точных и дифференцированных знаний, тогда как меры возможности суть отражение неточных, но связных (т. е. подтверждающих друг друга) знаний. Отметим, что функции возможности в этом смысле более естественны для представления чувства неуверенности: от субъекта не ждут слишком точной информации, но желают услышать по возможности наиболее связную речь. Зато точные, но флуктуирующие данные чаще всего получают из наблюдений физического явления.

Несомненно, в базе знаний будет содержаться информация, которая в общем случае не сведется ни к точной, ни к полностью согласованной информации. Вероятность, с одной стороны, и пара "возможность — необходимость" — с другой соответствуют двум крайним, а значит, идеальным ситуациям.

Формулы (26) и (27) позволяют считать, что функция распределения возможностей определяет класс вероятностных мер $\mathcal{P}$, такой, что

$$\mathcal{P} = \{ P | \forall A, N(A) \leqslant P(A) \leqslant \Pi(A) \}. \quad (30)$$

Это позволяет строго определить понятие математического ожидания в рамках мер возможности. Если f — функция, определенная на Ω и принимающая значения из множества действительных чисел $\mathcal{R}$, то верхние и нижние математические ожидания f, обозначаемые $E^*(f)$ и $E_*(f)$ соответственно, определяются с помощью интегралов Лебега — Стилтьеса (Демпстер)

$$E_*(f) = \int r d\Pi(\{\omega | f(\omega) \leqslant r\}), \quad (31)$$

$$E^*(f) = \int r dN(\{\omega | f(\omega) \leqslant r\}). \quad (32)$$

Названия верхних и нижних математических ожиданий оправдываются тождествами

$$E^*(f) = \sup\{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\};\ E_*(f) = \inf\{E(f) \mid P \in \mathcal{P}\}. \quad (33)$$

Эти соотношения были получены Демпстером для случая, когда множество Ω конечно.

4.4. Нечеткие множества

Понятие нечеткого множества можно определить без ссылки на какую-либо меру неопределенности, видоизменяя традиционную характеристическую функцию множества, а именно вводя градации в обычное отношение принадлежности. Это — точка зрения логики. При всем том задание меры неопределенности сводится к стремлению локализовать значение переменной x, выражая для каждого подмножества A универсального множества X имеющуюся информацию об отношении $x \in A$. Семейство подмножеств, подходящих для представления переменной x, будет индуцировать обобщенную характеристическую функцию нечеткого множества, причем эти два представления строго эквивалентны в случае мер возможности.

Согласно первой точке зрения определение нечеткого множества F эквивалентно заданию универсального множества Ω и отображения из Ω в единичный интервал, т. е. $\mu_F: \Omega \to [0, 1]$ (Заде). Значение $\mu_F(\omega)$ для $\omega \in \Omega$ понимается как степень принадлежности элемента ω нечеткому множеству F. Это — прямое определение, которое позволяет строить простые модели расплывчатых категорий естественного языка (например, понятие "высокий"), определенных на объективном носителе, например в числовой шкале (Ω — множество чисел, характеризующих рост человека), или на множестве объектов, качественно описываемых с помощью таких категорий (Ω - множество людей). Величина $\mu_F(\omega)$ выражает тогда степень совместимости значения (или объекта) ω с понятием F. Если $\Omega = \mathcal{R}$ (множество действительных чисел), то F есть *нечеткая величина.*

Вполне естественна постановка задачи нахождения обычных теоретико-множественных представлений для нечеткого множества F. Когда $\mu_F(\omega) \in \{0, 1\}, \forall\omega,$ то F — обычное подмножество универсального множества Ω. В этом случае F называется "областью определенности" в Ω. В противном случае можно выбрать порог $\alpha \in (0, 1]$ и определить обычное множество

$$F_\alpha = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) \geqslant \alpha\}, \quad (34)$$

которое называется *множеством уровня* α или *α-срезом* нечеткого множества F. Множество F_α содержит все элементы универсального множества Ω, для которых уровень совместимости с F не меньше α. Семейство $C(F) = \{F_\alpha | \alpha \in (0, 1]\}$ всех α-срезов есть монотонная последовательность, удовлетворяющая условию

$$0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant 1 \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta. \tag{35}$$

Она позволяет следующим образом представить нечеткое множество F с помощью обычных множеств (Заде):

$$\forall \omega, \mu_F(\omega) = \sup \{\alpha | \omega \in F_\alpha\}. \tag{36}$$

Обратно, если задано конечное семейство множеств в виде монотонной последовательности $\{F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_m}\}$, удовлетворяющей условию (35), то оно образует множество α-срезов нечеткого множества, определяемого условием (36). В случае бесконечного семейства множеств условия (35) недостаточно и необходимо, чтобы для любой возрастающей последовательности $(\alpha_n)_n$ элементов из (0, 1] выполнялось требование (Ралеску)

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow F_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}. \tag{37}$$

С другой стороны, для представления нечеткого множества F можно взять его *строгие* *α-срезы* (множества строгого уровня α), определяемые в виде

$$F_{\bar{\alpha}} = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > \alpha\}, \alpha \in [0, 1). \tag{38}$$

Строгие α-срезы удовлетворяют условиям (35), (36) так же, как и α-срезы. Среди обычных множеств, описывающих нечеткое множество F в виде последовательности $\{F_\alpha\}$, часто упоминаются следующие два множества:

множество уровня 1, называемое *ядром* нечеткого множества F и обозначаемое $\mathring{F}$:

$$\mathring{F} = \{\omega \in \Omega | \mu_F(\omega) = 1\};$$

множество строгого уровня 0, называемое *носителем* нечеткого множества F и обозначаемое S(F) :

$$S(F) = \{\omega \in \Omega \mid \mu_F(\omega) > 0\}.$$

Примечание. В ряде случаев для представления множества F желательно вводить не α-срезы, а другие последовательности множеств.

Вторая точка зрения на нечеткое множество состоит в рассмотрении его как "следа" меры возможности на одноточечных множествах в Ω. В самом деле, всякому множеству $E \subseteq \Omega$ можно поставить в соответствие меру возможности Π_E, такую, что Π_E (A) = 1 тогда, и только тогда, когда $E \cap A \neq 0$, и $\Pi_E(A) = 0$ в противном случае. Когда мера возможности П принимает значения в единичном интервале, функцию распределения возможностей можно интерпретировать как функцию принадлежности нечеткого множества F, рассматриваемого как достоверное событие, на котором сосредоточена мера П. Действительно, обозначая через $[0, 1]^{\Omega}$ множество нечетких подмножеств универсума Ω, имеем

$$\forall \Pi, \exists F \in [0, 1]^{\Omega}, \forall \omega \in \Omega, \Pi(\{\omega\}) = \pi(\omega) = \mu_F(\omega). \quad (39)$$

Обратно, задание нечеткого множества достаточно для описания функции распределения возможностей при условии, что это нечеткое множество нормально, т. е.

$$\exists \omega, \mu_F(\omega) = 1. \quad (40)$$

Но если не накладывать более ограничения $\Pi(\Omega) = 1$, то, основываясь на формуле (9), получаем

$$\forall F \in [0, 1]^{\Omega}, \exists \Pi, \forall \omega \in \Omega, \Pi(\{\omega\}) = \Pi(\omega) = \mu_F(\omega). \quad (41)$$

Величина $\Pi(\Omega) = \sup \mu_F$. иногда называется *высотой* нечеткого множества F.

Легко видеть, что если функция распределения возможностей определяется по весам m фокальных элементов, то фокальные элементы образуют семейство α-срезов некоторого нечеткого множества F. Пусть $\{A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_p\}$ суть фокальные элементы. Тогда

$$A_i = F_{\alpha_i}, \text{ где } \alpha_i = \sum_{j = i, \ldots, p} m(A_j),$$

т. е. в отличие от условия (36) имеем

$$\forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) = \sum_{i, \omega \in F_{\alpha_i}} m(F_{\alpha_i}). \quad (42)$$

Это — вероятностный способ представления нечеткого множества.

Когда выражение (39) применяется к вероятностной мере на конечном универсальном множестве, это приводит к рассмотрению вероятностей как значений принадлежности. Если заметить, что плотность распределения вероятностей описывает наши представления о *точке* с неизвестным расположением, *а отнюдь не о множестве* (поскольку при $P(A) \in \{0, 1\}$ функция множества Р(А) есть мера Дирака, сосредоточенная на одноточечном множестве), то станет понятно, что это смешение вероятностей и значений принадлежности не вполне правомерно. В то время как распределение возможностей легко интерпретировать как нечеткое множество, распределение вероятностей нельзя рассматривать как "нечеткую точку"! Более того, в отличие от случая мер возможности знание $\{P(\{\omega\}) \mid \omega \in \Omega\}$ не определяет с необходимостью вероятностную меру, поскольку (при бесконечном множестве Ω) мы можем иметь $P(\{\omega\}) = 0, \forall\omega.$

В заключение обсудим вопрос нормировки нечеткого множества. Здесь все зависит от природы универсального множества. Если, например, мы хотим описать множество целых чисел, очень близких к 3,5, то естественно отказаться от нормировки функции принадлежности, поскольку наиболее близкие к 3,5 числа лежат вне множества натуральных чисел $\mathcal{N}$. Зато нечеткая величина, определенная на $\mathcal{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, будет в общем случае нормированной, причем ее универсум обладает полнотой. Отказ от нормировки меры возможности может также интерпретироваться как отсутствие полного доверия к данной информации (например, при анализе информации, поступившей от двух противоречивых источников) или как факт наличия неопределенности, когда переменная, связанная с данной мерой возможности, не принимает никакого значения (если, например, *п* - множество реализаций действия, которое, может быть, останется невыполненным).

4.5. Основы теории нечетких множеств

Как уже говорилось, нечеткие множества используются для описания плохо определенных, неоднозначно понимаемых ситуаций, объектов, понятий. Де Лука предложил ввести в рассмотрение показатель этой неопределенности, который можно было бы использовать для оценки, классификации объектов, описываемых нечеткими множествами. Он же сформулировал основные свойства, которым должен удовлетворять такой показатель, называемый показателем размытости (или мерой энтропии) нечетких множеств, и в качестве этого показателя был предложен функционал, аналогичный шенноновской энтропии в теории информации. В настоящее время рассматриваются различные альтернативные подходы к определению показателя размытости нечеткого множества, обсуждаются его свойства и возможные приложения.

Можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием показателя размытости нечеткого множества. Прежде всего, это — интерпретация показателя размытости как показателя внутренней неопределенности, двусмысленности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству. Второй аспект связан с интерпретацией показателя размытости как меры отличия нечеткого множества от обычного множества. И наконец, само существование нетривиального показателя размытости, удовлетворяющего определенным свойствам, напрямую зависит от свойств алгебры нечетких множеств и характеризует ее как алгебраическую структуру. В соответствии с этими тремя аспектами и будут рассмотрены основные результаты, связанные с понятием показателя размытости.

Аксиоматический подход к определению показателя размытости нечеткого множества

Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества X по отношению к некоторому свойству A, характеризующему эти объекты и определяющему в X нечеткое множество объектов A. Если некоторый объект $x \in X$ обладает свойством A, но лишь в частичной мере: $0 < \mu_A(x) < 1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта x по отношению к свойству A проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, "обладающих свойством A", и классу объектов, "не обладающих свойством A". Эта двусмысленность объекта x по отношению к свойству A максимальна, когда степени принадлежности объекта x к обоим классам равны, т.е. $\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x) = 0,5$. И наоборот, двусмысленность объекта минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. либо $\mu_A(x) = 1, \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 0$, либо

$\mu_A(x) = 0$, $\mu_{\bar{A}}(x) = 1$. Таким образом, **глобальный показатель размытости** нечеткого множества A можно определить в виде функционала d, удовлетворяющего следующим условиям:

Р1. $d(A) < d(B)$, если A является заострением B, т.е. $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) < 0,5,\ \mu_A(x) \geqslant \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) > 0,5$ и $\mu_A(x)$ — любое при $\mu_B(x) = 0,5;$

Р2. $d(A) = d(\bar{A});$

Р3. Если $A \cap B = \varnothing$, то $d(A \cup B) = d(A) + d(B).$

Итак, показатель размытости **можно рассматривать как аддитивный, симметричный и строго возрастающий с увеличением размытости нечеткого множества функционал, определенный на множестве $\Im(X)$ всех нечетких подмножеств множества X**.

Можно доказать, что вещественный, определенный на $\Im(X)$ функционал является показателем размытости тогда и только тогда, если он допускает представление

$$d(A) = \sum_{j=1}^{N} T_j(\mu_A(x_j)),$$

где $T_j(y)$ — вещественнозначные функции от $y \in [0,1]$ такие, что

$T_j(0) = 0, \quad T_j(y) = T_j(1-y), T_j(y)$ — строго возрастает на интервале $[0, 0, 5]$ и N — число элементов множества $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$.

Примером коэффициента размытости может служить логарифмическая энтропия нечетких множеств:

$$d(A) = \sum_{j=1}^{N} S_j(\mu_A(x_j)),$$

где S — функция Шеннона

$$S(y) = -y \ \ln y - (1-y) \ \ln(1-y).$$

Выбор конкретного показателя зависит от условий задачи. Далее мы покажем, что показатель размытости нечетких множеств может быть задан с помощью метрики. Необходимо обратить внимание на связь между показателем размытости нечетких множеств и неопределенностью, возникающей при принятии решения, к какому из двух классов, " A " или "не A " , отнести объекты множества X. На практике человеку часто приходится принимать подобные решения, когда необходимо отнести объект к одному из двух классов, характеризующихся противоположными свойствами типа: "белый—черный", "пригоден—не пригоден", "нравится—не нравится", "хороший—плохой" и т.п. Такая альтернатива вызывает у лица, принимающего решения, неопределенность, обусловленную тем, что объекты часто обладают сразу обоими противоположными свойствами, хотя и в разной мере. Можно предположить, что показатель этой неопределенности зависит от размытости ситуации, в которой принимается решение. Допускается, что показатель неопределенности решений может удовлетворять тем же свойствам, что и показатель размытости нечетких множеств.

Метрический подход к определению показателя размытости нечетких множеств

Показатель размытости **нечетких множеств можно определить с помощью метрики как меру отличия нечеткого множества от ближайшего к нему обычного множества. Другой способ задания показателя размытости с помощью метрики — это определение его с помощью расстояния до максимального размытого множества** $A_{0,5}\colon\ \forall x \in X\ \mu_{A_{0,5}}(x) = 0,5$ **и расстояния между нечетким множеством и его дополнением**. Оказывается, эти подходы имеют много общего между собой, и определяемый с помощью метрики показатель размытости обладает многими свойствами, сформулированными выше.

Множеством, ближайшим к нечеткому множеству A, называется неразмытое множество $\underline{A}$ такое, что

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5 \\ 0, & \text{если } \mu_A(x) \leqslant 0,5. \end{cases}$$

Показателем размытости называется функционал

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} |\mu_A(x_j) - \mu_{\underline{A}}(x_j)|,$$

который может быть представлен также в виде

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_{A \cap \overline{A}}(x_j).$$

Если вместо расстояния Хэмминга использовать евклидово расстояние, то получим

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (\mu_A(x_j) - \mu_{\underline{A}}(x_j))^2}.$$

Показатель размытости можно задать с помощью расстояния между нечетким множеством и его дополнением:

$$d(A) = k\left[\rho(\varnothing, U) - \rho(A, \bar{A})\right].$$

В случае метрики Хэмминга $\rho(A, \bar{A})$ имеет вид

$$\rho(A, \bar{A}) = \sum_{j=1}^{N} |\mu_A(x_j) - \mu_{\bar{A}}(x_j)| = \sum_{j=1}^{N} |2\mu_A(x_j) - 1|.$$

Такой показатель размытости удовлетворяет свойствам Р1 и Р2.

Далее выясним, что между показателями размытости, удовлетворяющими условиям Р1, Р2, Р3, и метриками определенного класса может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Связь показателя размытости с алгебраическими свойствами решетки нечетких множеств

Существование показателя размытости нечетких множеств оказывается тесно связанным со свойствами алгебры нечетких множеств Заде. Для алгебры обычных множеств показатель размытости со свойствами Р1, Р2, Р3 вырождается в тривиальный показатель, всюду равный нулю. Для более общих алгебр такого показателя просто не существует. Укажем соотношения, существующие между произвольными положительными оценками и показателями размытости.

Положительной оценкой на решетке нечетких множеств $\Im(X)$ называется функция $\nu : \Im(X) \to R^+$, удовлетворяющая свойству

$$\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$$

и условию

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \nu(A) < \nu(B).$$

Положительная оценка ν определяет на $\Im(X)$ метрику

$$\rho_\nu(A, B) = \nu(A \cup B) - \nu(A \cap B).$$

Решетка $\Im(X)$ с положительной оценкой ν и метрикой ρ_ν называется **метрической решеткой нечетких множеств**. Метрика называется симметричной, если она удовлетворяет условию

$$\rho_\nu(A, B) = \rho_\nu(\bar{A}, \bar{B}).$$

Так как в алгебре нечетких множеств выполняются законы де Моргана, то метрика является симметричной тогда и только тогда, если она определяется симметричной оценкой, т.е. такой оценкой, которая удовлетворяет условию

$$\nu(A) + \nu(\bar{A}) = \nu(\varnothing) + \nu(U).$$

Теорема. В метрической решетке нечетких множеств функционалы

$$d(A) = 2k\left[\nu(U) - \nu(A \cup \bar{A})\right],$$

$$d(A) = 2k\left[\nu(A \cap \bar{A}) - \nu(\varnothing)\right],$$

$$d(A) = k\left[\rho_\nu(\varnothing, U) - \rho_\nu(A, \bar{A})\right]$$

удовлетворяют свойствам 1, 2, 3. Они попарно тождественны тогда и только тогда, если положительная оценка ν симметрична.

Примером симметричной оценки на решетке нечетких множеств может служить **энергия нечеткого множества**:

$$E(A) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \mu_A(x_j),$$

которая определяет симметричную метрику

$$\rho_\nu(A, B) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j |\mu_A(x_j) - \mu_B(x_j)|.$$

5. Нечеткие меры и интегралы (начала)

5.1. Методические замечания

При решении многих задач: анализа сложных систем в условиях неопределенности широко используются методы теории вероятности и математической статистики. Эти методы предполагают вероятностную интерпретацию обрабатываемых данных и полученных статистических выводов. В настоящее время возрасла потребность в новых подходах к математическому описанию информации, характеризующейся высоким уровнем неопределенности. Один из возможных подходов здесь может основываться на обобщении понятия меры и построении нечетких мер, свободных от ряда ограничений вероятностной меры.

Существуют различные интерпретации понятия вероятности. Это — классическая частотная интерпретация Лапласа, субъективная вероятность по Байесу, субъективная вероятность по Де Финетти, Севиджу и т. д. Наиболее содержательной с математической точки зрения является аксиоматическая трактовка вероятности А. Н. Колмогорова с позиций теории меры.

Как известно, *мерой* называется функция множества $m\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{R}$, удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1) $A \subseteq X \Leftrightarrow m(A) \geqslant 0$;
2) $m(\varnothing) = 0$;
3) если $A, B \in \mathscr{P}(X)$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Здесь $\mathscr{P}(X)$ — множество всех подмножеств *X,* а $\mathscr{R}$ — множество действительных чисел. При $\mathscr{R} = [0,\ 1]$ эти аксиомы определяют вероятностную меру.

Под субъективной вероятностью понимается степень уверенности в данном событии, возникающая у человека на основе известных ему данных. Эта степень уверенности всегда зависит от индивидуального опыта и поэтому различна для разных людей. Неясность суждений, основанных на субъективном анализе, обусловливает многие трудности, которые возникают при использовании субъективной вероятности.

Субъективную вероятность можно рассматривать как индивидуальный способ обработки тех аспектов субъективных данных, которые доступны индивидуальному суждению. Однако чаще всего такие суждения неаддитивны. В ряде работ показано, что реальное поведение человека, как правило, противоречит предположению об аддитивности мер, которые он использует при оценке событий. В отличие от субъективной вероятности, нечеткая мера свободна от ограничительного требования аддитивности, что делает ее особенно привлекательной для решения ряда задач при наличии неопределенности типа нечеткости.

Существует тенденция вероятностной трактовки НМ. Следует отметить, что, с точки зрения теории меры, такой подход является неоправданным, поскольку понятие вероятностной меры является сужением понятия нечеткой меры. Для сравнения рассмотрим обе теоретико-мерные трактовки вероятности и нечеткости.

Пусть $(X,\ \mathscr{B},\ P)$— вероятностное пространство. Здесь $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ — поле борелевских подмножеств множества *X* (минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества множества *X),* а *P*— вероятностная мера, т. е. функция множества $P\colon \mathscr{B} \to [0,\ 1]$, удовлетворяющая условиям 1) —3). С другой стороны, нечеткое множество Л. Заде описывается функцией принадлежности μ, принимающей свои значения в интервале [0, 1]. С точки зрения теории отображений $P\colon \mathscr{B} \to [0,\ 1]$ и $\mu\colon X \to [0,\ 1]$ — совершенно разные объекты. Вероятность *P* определяется в σ -алгебре $\mathscr{B}$ и является функцией множества, а μ*(x)* есть обычная функция, областью определения которой является множество *X.* Поэтому понятия вероятности и нечеткого множества не имеет смысла сравнивать на одном уровне абстрагирования.

Когда X — является конечным множеством можно сравнивать $P(\{x\})$ с $\mu_A(x)$: $\sum_{x \in X} P(\{x\}) = 1$ и $\sum_{x \in X} \mu_A(x) \neq 1$. В этом случае, когда $X \subset \mathscr{R}$, приходится сталкиваться со следующими трудностями. Если

$$(a, b] \subset \mathscr{R}, \text{ то } P((a, b]) = \int_a^b p(x)\, dx,$$

где $p(x)$ — плотность вероятности. При этом очевидно, что $\forall x \in \mathscr{R}$: $P(\{x\}) \neq 0$, когда $p(x) \neq 0$. Нетрудно увидеть, что понятия плотности вероятности и функции принадлежности сравнимы. В то время как вероятностная мера является шкалой для измерения неопределенности типа случайности, нечеткие меры являются субъективными шкалами для нечеткости.

5.2. Нечеткие меры

Рассмотрим основные свойства нечетких мер и интегралов, а также их содержательную связь с мерами возможности, используемыми для построения алгоритмов нечеткого вывода.

Пусть X — произвольное множество, а $\mathscr{B}$ — поле борелевских множеств (σ-алгебра) для X.

Определение 5.1. Функция $g(\cdot)$, определяемая в виде g: $\mathscr{B} \to [0, 1]$, называется *нечеткой мерой* (в зарубежной литературе используется термин «нечеткая мера» (fuzzy measure), хотя по сути дела четкая функция множества $g(\cdot)$ определяет неаддитивпую меру (квазимеру) на обычном множестве X), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1)\ g(\varnothing) = 0, \\ 2)\ g(X) = 1, \end{array}\right\} \text{(ограниченность);} \\ 3) \text{ если } A, B \in \mathscr{B} \text{ и } A \subset B, \text{ то } g(A) \leqslant g(B) \text{ (монотонность);} \\ 4) \text{ если } F_n \in \mathscr{B} \text{ и } \{F_n\} \text{ является монотонной последовательностью, то } \lim\limits_{n\to\infty} g(F_n) = g\left(\lim\limits_{n\to\infty} F_n\right) \text{ (непрерывность).} \end{array}\right\} \quad (5.1)$$

Тройка $(X, \mathscr{B}, g)$ называется *пространством с нечеткой мерой.* Для нечеткой меры в общем случае не должно выполняться условие аддитивности: $g(A \cup B) \neq g(A) + g(B)$. Таким образом, нечеткая мера является однопараметрическим расширением вероятностной меры.

Выражение $g(A)$ представляет собой меру, характеризующую степень нечеткости A, т. е. оценку нечеткости суждения «$X \in A$» или степень субъективной совместимости *X* с *A*. Нетрудно увидеть, что монотонность меры g влечет за собой

$$\forall A,\ B \in \mathscr{B}:\ g(A \cup B) \geqslant \max(g(A),\ g(B));$$
$$\forall A,\ B \in \mathscr{B}:\ g(A \cap B) \leqslant \min(g(A),\ g(B)).$$

Для построения нечетких мер используется следующее λ-*правило*. Пусть $A,\ B \in \mathscr{B},\ \bar{A} \cap B = \varnothing$. Тогда

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B), \quad -1 < \lambda < \infty. \quad (5.2)$$

В случае $A \cup B = X$ будем называть выражение (5.2) условием нормировки для g_λ-мер. Очевидно, что $g_\lambda(X) = 1;\ g_\lambda(\varnothing) = 0.$

Параметр $\lambda \in (-1,\ +\infty)$ называется параметром нормировки g_λ-меры. При $\lambda > 0,\ g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ имеем класс супераддитивпых мер, а при

$-1 < \lambda < 0,\ g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$ получаем класс субаддитивных мер.

Легко убедиться, что если $\bar{A} = X \setminus A,\ \ A \in \mathscr{B},$ то из (5.2) следует

$$g_\lambda(\bar{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A)}. \quad (5.3)$$

Формула (5.3) определяет класс так называемых λ-дополнений Сугено.

В общем случае, когда *A* и *B* — произвольные непересекающиеся подмножества множества *X*, т. е. $A,\ B \in \mathscr{B},\ \ A \cap B \neq \varnothing,$ выражение (5.2) приобретает вид

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A \cap B)}. \quad (5.4)$$

Если $X = \mathscr{R},$ то g_λ-меру можно получить с помощью непрерывной функции h, удовлетворяющей следующим свойствам:

1) если $x \leqslant y$, то $h(x) \leqslant h(y);\ x,\ y \in \mathscr{R};$
2) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0;\ \ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1.$

Функция h аналогична функции распределения вероятности и называется нечеткой функцией распределения.

Таким образом, нечеткую меру g_λ на $(\mathscr{R},\ \mathscr{B})$ можно построить в виде

$$g_\lambda([a,\ b]) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda \cdot h(a)} \quad \forall\ [a,\ b] \subset \mathscr{R}. \quad (5.5)$$

Мера g_λ в (5.5) удовлетворяет g_λ-правилу. В частности,

$$g_\lambda((-\infty,\ x]) = h(x)\ \ \forall\ \lambda \in (-1,\ +\infty) \quad (5.6)$$

Далее предположим, что $K = \{s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n\}$. Мера g_λ на $(K,\ 2^K)$ строится следующим образом $(0 \leqslant g_h^i \leqslant 1,\ i \in I)$:

$$\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(1+\lambda g^{i}\right)-1\right]=1,$$
$$\lambda\in(-1,+\infty). \qquad (5.7)$$

Если $K'\subset K$, то

$$g_{\lambda}(K')=\frac{1}{\lambda}\left[\prod_{s_i\in K'}\left(1+\lambda g^{i}\right)-1\right]. \qquad (5.8)$$

Выражение (5.8) также удовлетворяет λ-правилу и из (5.7) следует, что

$$g_{\lambda}(\{s_i\})=g^{i},$$
$$g_{\lambda}(\{s_i,\ s_j\})=g^{i}+g^{j}+\lambda g^{i}g^{j},\quad i\neq j. \qquad (5.9)$$

Рассмотрим несколько примеров нечетких мер (см. рис. 5.1).

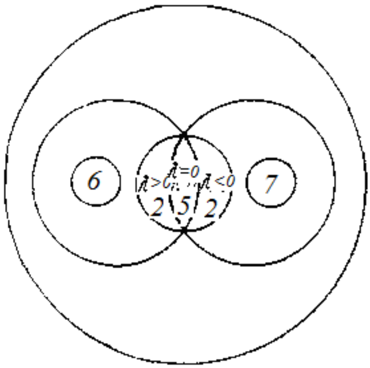


Рис. 5.1. Соотношения между нечеткими мерами: *1* — нечеткие меры (исключая меру Дирака); *2* — g_λ-меры, —1 < λ < ∞; *3* — функции доверия; *4* — меры доподобия; 5 = 3 ∩ 4 — вероятностная мера (λ = 0); 6 — согласованные функции доверия (мера необходимости); *7* — мера возможности

Меры Дирака. Примитивный класс мер Дирака определяется соотношением

$$\forall A\in\mathscr{B},\quad \mu(A)=\begin{cases}1 & \text{при } x_0\in A,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases} \qquad (5.10)$$

где x_0 — заданный элемент в X. Меры Дирака — частный случай вероятностной меры, соответствующий детерминпрованной ситуации (меры полной уверенности). Все рассматриваемые далее нечеткие меры можно разделить на два класса: *супераддитивные меры* (X > 0) *и субаддитивпые меры* (—1<λ<0).

5.2.1. Супераддитивные меры

Функция доверия. В определении *функции доверия* (belief function) предполагается, что степень доверия высказыванию $A (A \neq \varnothing)$, которое является истинным, не обязательно равна 1. Это означает, что сумма степеней доверия высказыванию A и его отрицанию $\bar{A}$ также не обязательно равна 1, а может быть либо равной, либо меньшей 1. Другими словами, когда высказывание A $(A \neq \varnothing)$ является истинным с определенной степенью $s \in [0, 1]$, его мера неопределенности выражается с помощью функции

$$\forall B \in \mathscr{B}: \quad b(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } B = X, \\ s, & \text{если } B \supset A, \quad B \neq X, \\ 0, & \text{если } B \not\supset A, \end{cases} \tag{5.11}$$

которая называется *простой функцией носителя, сосредоточенной на A*.

Если $s=1$, то получаем меру, которая называется мерой определенности, сосредоточенной на A. Если $|A| = 1$, то получаем меру Дирака, сосредоточенную на A.

Если $s = 0$ или $A = X$, то тогда $b(B)$ называется пустой функцией доверия (полное незнание). В результате обобщения этих рассуждений введена *функция доверия* — мера, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ b(\varnothing) = 0; \quad b(X) = 1; \quad \forall A \in \mathscr{B}: 0 \leqslant b(A) \leqslant 1; \\ &2)\ \forall A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}: b(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} b(A_i) - \\ &- \sum_{i<j} b(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} b(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

В случае, когда $|\mathscr{B}| = 2$, получаем:

$$\forall A, B \in \mathscr{B}: b(A \cup B) \geqslant b(A) + b(B) - b(A \cap B)$$

(свойство супераддитивпости) и

$$\forall A \in \mathscr{B}: b(A) + b(\bar{A}) \in [0, 1].$$

Возможно также другое определение этой меры. Пусть m — мера, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\begin{aligned} &1) && m(\varnothing) = 0; \\ &2) && \sum_{A \in \mathscr{B}} m(A) = 1 \quad \text{(полное доверие).} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Тогда

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ b(A) = \sum_{B \subset A} m(B) \tag{5.14}$$

является *функцией доверия.* Поэтому функции доверия называются также нижними вероятностями. Из (5.14) вытекает:

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ b(A) + b(\overline{A}) = 1 - \sum_{\substack{B \not\subset A \\ B \not\subset \overline{A}}} m(B) \in [0,\ 1]. \tag{5.15}$$

Любая g_λ-нечеткая мера (кроме меры Дирака) является функцией доверия тогда и только тогда, когда $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что мера вероятности есть частный случай функции доверия.

Согласованная функция доверия. Понятие согласованной функции доверия (consonant belief function) базируется на определении ядра $C = \{B \subset X \mid m(B) > 0\}$, полностью упорядоченного по вложенности. Легко показать, что любая простая функция носителя является согласованной функцией доверия. Если $A \neq X$, то мера неопределенности

$$\forall B \subset \mathscr{B}:\ b(B) = \begin{cases} s, & \text{если } B = A, \\ 1 - s, & \text{если } B = X, \\ 0, & \text{если } B \neq A,\ B \neq X. \end{cases} \tag{5.16}$$

Согласованная функция доверия определяется с помощью следующих аксиом:

$$\begin{aligned} &1)\ b(\varnothing) = 0; \quad b(X) = 1, \\ &2)\ b(A \cap B) = \min\ (b(A),\ b(B));\ \forall A \in \mathscr{B}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

При этом

$$\min\left(b(A),\ b(\overline{A})\right) = 0;\ \forall b\ \exists A,\ B:\ b(A \cup B) > \max(b(A),\ b(B)).$$

5.2.2. Субаддитивные меры

Меры правдоподобия. *Мера правдоподобия* множества *A из X* определена как

$$\mathrm{Pl}\ (A) = 1 - b(\bar{A}), \tag{5.18}$$

где b — функция уверенности.

Мера правдоподобия удовлетворяет следующим аксиомам

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \mathrm{Pl}(\varnothing) = 0;\ \mathrm{Pl}(X) = 1, \\ &2)\ \forall A_1, \ldots, A_n \subseteq X:\ \mathrm{Pl}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Pl}(A_i) - \sum_{i<j} \mathrm{Pl}(A_i \cup A_j) + \ldots + \\ &\qquad\qquad + (-1)^{n+1}\ \mathrm{Pl}(A_1 \cup \ldots \cup A_n). \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

Существует другой способ определения функции правдоподобия. Пусть m — мера, удовлетворяющая свойствам (5.13), тогда

$$\forall A \in \mathscr{B}:\ \mathrm{Pl}(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B) \tag{5.20}$$

является *мерой правдоподобия.* Меры правдоподобия называются также верхними вероятностями.

Пусть μ и ν — две меры такие, что $\forall A \in \mathscr{B}:\quad \mu(A) + \nu(\bar{A}) = 1.$ В этом случае μ является функцией доверия тогда и только тогда, когда ν — мера правдоподобия.

Мера возможности. Мерой возможности называется функция $\Pi\colon \mathscr{B} \to [0,\ 1],$ удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \Pi(\varnothing) = 0;\ \ \Pi(X) = 1, \\ 2) & \forall i \in \mathbf{N},\ \ A_i \subset X,\ \ \Pi\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i\right) = \sup\limits_{i \in \mathbf{N}} \Pi(A_i). \end{array}\right\} \tag{5.21}$$

Здесь $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел.

Мера возможности может быть построена с помощью распределения возможности $\pi(x)$, являющегося функцией $\pi\colon\ X \to [0,\ 1],$ такой, что $\sup\limits_{x \in X} \pi(x) = 1$ (условие нормировки). Нетрудно увидеть, что $\forall A \in \mathscr{B}\colon\ \Pi(A) = \sup\limits_{x \in A} \pi(x).$ Очевидно, что для счетного множества $\pi(x) = \Pi(\{x\}).$

Любая мера возможности является нечеткой мерой тогда и только тогда, когда существует функция распределения f такая, что $\sup\limits_{x \in X} f(x) = 1.$

Любая мера возможности П является g_λ-мерой $(\lambda \in (-1,\ \infty))$ тогда и только тогда, когда П — мера Дирака.

Пусть μ и ν две меры такие, что $\forall A \in \mathscr{B}\colon\quad \mu(A) + \nu(\bar{A}) = 1.$ Нечеткая мера μ является согласованной функцией доверия тогда и только тогда, когда ν является мерой возможности.

Мера вероятности. Вероятностная мера (λ = 0) является частным случаем функции доверия или меры правдоподобия (см. рис. 5.1). Нечеткая мера $g \triangleq P$ является вероятностной мерой тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\forall A \in \mathscr{B}\colon\ P(A) \in [0,\ 1];\ P(\varnothing) = 0;\ P(X) = 1;$

2) если $\forall i \in \mathbf{N}\colon\ A_i \in \mathscr{B}$ и $\forall i \neq j\colon A_i \cap A_j = \varnothing$, то $P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i\right) = \sum P(A_i).$

g_λ-мера. Нечеткая мера $g \triangleq g_\nu$ называется g_ν-мерой, если

она удовлетворяет следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ g_\nu(X)=1;\ g_\nu(\varnothing)=0; \\ 2)\ \text{если}\ \forall i\in \mathbf{N}:\ A_i\in\mathcal{B}\ \text{и}\ \forall i\neq j:\ A_i\cap A_j=\varnothing, \\ \text{то} \\ g_\nu\left(\bigcup_{i\in N}A_i\right)=(1-\nu)\bigvee_{i\in\mathbf{N}}g_\nu(A_i)+\nu\sum_{i\in\mathbf{N}}g_\nu(A_i), \\ \text{где}\ \nu\geqslant 0; \\ 3)\ \forall A,\ B\in\mathcal{B}:\ A\subseteq B,\ g_\nu(A)\leqslant g_\nu(B). \end{array}\right\} \quad (5.22)$$

Нетрудно увидеть, что g_ν-мера является расширением меры Цукамото, для которой $\nu\in[0,\ 1]$. Очевидно, что при $\nu = 0$, g_ν-мера является мерой возможности, а при $\nu = 1$ — вероятностной мерой. Если $\nu > 1$, то g_ν-мера описывает неопределенность, отличающуюся по своим свойствам от вероятности или возможности.

Условие нормировки для g_ν-меры в случае счетного множества X имеет вид

$$g_\nu(X)=(1-\nu)\bigvee_{i\in\mathbf{N}}g_i+\nu\sum_{i\in\mathbf{N}}g_i=1, \quad (5.23)$$

где $g_i=g_\nu(\{x_i\}),\ \forall i\in\mathbf{N},\ x_i\in X.$

Если $X=\mathcal{R}$, то нетрудно увидеть, что для нечеткой плотности $f_\nu(x):\ X\to[0,\ 1]$ можно получить

$$g_\nu(X)=(1-\nu)\sup_{x\in X}f_\nu(x)+\nu\int_X f_\nu(x)\,dx.$$

Утверждение 5.1. Пусть X — произвольное множество, $A\subset X$, а $g_\nu:\ \mathcal{B}\to[0,\ 1]$ является g_ν-мерой. Тогда для $\bar{A}=X\setminus A$ мера нечеткости примет вид

$$g_\nu(\bar{A})=\begin{cases}\max((1-g_\nu(A))/\nu,\ 1-\nu g_\nu(A)), & \text{если}\ \nu>1;\\ \min((1-g_\nu(A))/\nu,\ 1-\nu g_\nu(A)), & \text{если}\ \nu\in[0,\ 1].\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $\forall a,\ b\in\mathcal{R}:\ a\vee b=(a+b)/2+(a-b)/2$, то условие нормировки для $A\subset X$ и $\bar{A}=X\setminus A$ примет вид:

$$(1-\nu)\left((g_\nu(A)-g_\nu(\bar{A}))/2+(g_\nu(A)+g_\nu(\bar{A}))/2\right)+ \\ +\nu(g_\nu(A)+g_\nu(\bar{A})).$$

Если $g_\nu(A)\geqslant g_\nu(\bar{A})$, тогда $g_\nu(\bar{A})=(1-g_\nu(A))/\nu$, а при $g_\nu(A)<g_\nu(\bar{A})$, $g_\nu(\bar{A})=1-\nu g_\nu(A)$. Для случая $\nu > 1$ условие нормировки имеет силу, если $g_\nu(\bar{A})=\max((1-g_\nu(A))/\nu,$ $1-\nu g_\nu(A))$, а для $\nu\in[0,\ 1]$ $g_\nu(\bar{A})=\min((1-g_\nu(A))/\nu,$ $1-\nu g_\nu(A))$.

Утверждение 5.2. Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра, $g_\nu:\ \mathcal{B}\to[0,\ 1]$ — нечеткая g_ν-мера.

Тогда

$$g_\nu(A\cup B)=(1-\nu)\,(g_\nu(B)\vee g_\nu(C))+\nu(g_\nu(B)+g_\nu(C)),$$

$\forall A,\ B\in\mathscr{B}:\ A\cap B\neq\varnothing,$ где $C=A\setminus(A\cap B);$

$g_\nu(C)=$

$$=\begin{cases}\min\left((g_\nu(A)-g_\nu(A\cap B))/\nu,\ g_\nu(A)-\nu g_\nu(A\cap B)\right), \text{ если } \nu\in[0,1];\\ \max\left((g_\nu(A)-g_\nu(A\cap B))/\nu,\ g_\nu(A)-\nu g_\nu(A\cap B)\right), \text{ если } \nu>1.\end{cases}$$

Доказательство. Условие нормировки для $A,\ B\in\mathscr{B}$ относительно $g_\nu(A)$ имеет вид

$$g_\nu(A)=(1-\nu)\,(g_\nu(A\setminus(A\cap B))\vee g_\nu(A\cap B))+$$
$$+\nu(g_\nu(A\setminus(A\cap B))+g_\nu(A\cap B)),$$

если $g_\nu(A\setminus(A\cap B))\geqslant g_\nu(A\cap B)$, тогда $g_\nu(A\setminus(A\cap B))=(g_\nu(A)-g_\nu(A\cap B))/\nu$, а если $g_\nu(A\setminus(A\cap B))<g_\nu(A\cap B)$, то $g_\nu(A\setminus(A\cap B))=g_\nu(A)-\nu g_\nu(A\cap B)$.

Нетрудно увидеть, что если $\nu>1$, то

$$g_\nu(A\setminus(A\cap B))=$$
$$=\max\left((g_\nu(A)-g_\nu(A\cap B))/\nu,\ g_\nu(A)-\nu g_\nu(A\cap B)\right),$$

а при $\nu\in[0,\ 1]$

$$g_\nu(A\setminus(A\cap B))=\min\left((g_\nu(A)-g_\nu(A\cap B))/\nu,\ g_\nu(A)-\nu g_\nu(A\cap B)\right),$$

что доказывает утверждение.

Утверждения 5.1 и 5.2 справедливы только для конкретного разбиения множества на подмножества.

5.3. Особенности аппроксимации нечетких мер

При решении практических задач моделирования нечетких систем с использованием аппарата теории нечетких мер возникает необходимость оперирования большими объемами нечетких данных. Поэтому для упрощения вычислительных алгоритмов на ЭВМ удобно аппроксимировать нечеткие меры. Для этой цели можно использовать *(L — R)*-функции.

Определение 5.2. Функция, обозначаемая *L* (или *R*), является *функцией (L — R)-типа* тогда и только тогда, когда

$$\forall x\in\mathscr{R}^+\triangleq[0,\ +\infty):\ L(-x)=L(x);\ L(0)=1,$$

$L(\cdot)$ монотонно убывает на $\mathscr{R}^+$.

Пример: $L_1(x)=\max(0,\ 1-|x|^p);\quad L_2(x)=\exp(-|x|^p);\ p\geq 1.$

Особенно удобно использовать *(L — R)*-функции в случав g_v-меры Сугено.

При этом функция *h(x)* может быть представлена как

$$h(x) = L((a - x)/\beta \vee 0); \quad x \in X \subset \mathscr{R}, \qquad (5.24)$$

где *a* — параметр, при котором *h(x)=1,* β — коэффициент нечеткости. Пример функции (*L — R)* -типа, аппроксимирующей функцию распределения нечеткости, приведен на рис. 5.2.

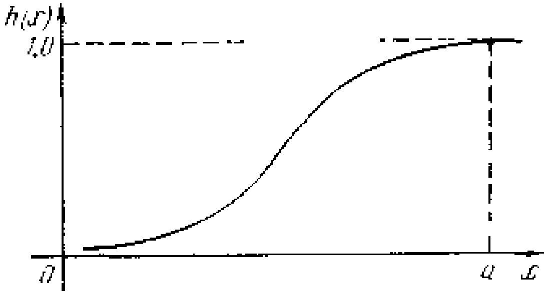


Рис. 5.2. Функция (L- *R*)-типа, аппроксимирующая функцию распределения нечеткости

Рассмотрим особенности процедуры приближения экспериментальных функций распределения нечеткости функциями (L — *R*)-типа. Пусть в результате формализации некоторой выборки нечетких данных получен ряд экспериментальных значений плотности распределения нечеткости $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$, которым соответствуют

$$x_1, x_2, \ldots, x_n; \; x_i \in X \subset \mathscr{R}, \; i \in I = \{\overline{1, n}\}.$$

Все множество *X* можно разбить на подынтервалы таким образом, что $X = \bigcup_{i \in I} \Delta_i$; $x_i \in \Delta_i$; $\Delta_i = [x_i - \Delta/2, \; x_i + \Delta/2]$, где $\Delta \in \mathscr{R}$,

Δ — длина подынтервала; $\Delta = (b - a)/(n - 1)$; $a = \inf X$, $b = \sup X$.

Значение плотности распределения нечеткости в *i*-й точке интервала [*a*, *b*], определенное экспериментально, можно приближенно определять как $g_\lambda(\Delta_i) \approx g_\lambda(\{x_i\})$. Нечеткие меры для подынтервалов Δ_i можно вычислять, используя *(L — R)*-аппроксимацию функции распределения нечеткости. При этом

$$g_\lambda(\Delta_i) = L\left(\frac{2(a - x_i) + \Delta}{2\beta}\right) - L\left(\frac{2(a - x_i) - \Delta}{2\beta}\right)\left(1 + \lambda L\left(\frac{2(a - x_i) - \Delta}{2\beta}\right)\right).$$

Пусть $S \subset \{\Delta_i | \Delta_i \subset [a, \ b]\}$ — множество подынтервалов множества X, $\mathscr{P}(S)$ — множество всех подмножеств множества подынтервалов. Нетрудно увидеть, что $\forall A \in \mathscr{P}(S)$: $\Delta_i \in A \subset S$;

$$g_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i\in\theta}(\lambda g_\lambda(\Delta_i)+1)-1\right],$$

где $\theta = \{i | x_i \in \Delta_i \in A\}$; $\Delta_i = [x_i - \Delta/2, \ x_i + \Delta/2]$. Нечеткой мере $g_\lambda(A)$ будет соответствовать нечеткая мера $g_\lambda(A)$, полученная из эксперимента при формализации нечеткой плотности:

$$g'_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i\in\theta}(\lambda g'_i+1)-1\right]; \quad A \in \mathscr{B}.$$

Параметр λ определяется из условия нормировки:

$$g'_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i\in\theta}(\lambda g'_i+1)-1\right] = 1.$$

Таким образом, задача *(L — R)*-аппроксимации функции распределения нечеткости сводится к оценке параметров *а* и β *(L — R)*-функции по минимуму функционала качества

$$\mathscr{H} = \left\{\sum_{A\in\mathscr{P}(S)}\left(g_\lambda(A) - g'_\lambda(A)\right)^2\right)^{1/2} \to \min. \qquad (5.25)$$

При большем количестве экспериментальных точек минимизация функционала (5.25) становится затруднительной. В этом случае можно воспользоваться приближенной процедурой, смысл которой заключается в использовании только части множества подмножеств подынтервалов $\mathscr{P}(S)$ для оценки *а* и β. При этом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(\frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{i}(\lambda g_\lambda(\Delta_i)+1)-1\right) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{k=1}^{i}(\lambda g'_i+1)-1\right)\right)^2\right)\right)^{1/2} \to \min. \qquad (5.26)$$

Задачу можно упростить, если параметр *а* определять непосредственно по результатам эксперимента. Можно показать, что если λ→ —1, то функция множества $g_\lambda((-\infty, \ x]) = 1$ при $x = x^*$, где

$$x^* = \arg\sup_{i\in N} g(\{x_i\}).$$

Таким образом, для определения *а,* при λ = —1, достаточно найти минимальное значение $x \in [a, \ b]$, при котором нечеткая плотность равна 1. Если λ > —1, тогда *а* = sup*X*. В этом случае параметр β может быть легко найден при помощи любой процедуры численной минимизации.

Решение многих задач нахождения значения g_ν-меры для случаев множества действительных чисел может выглядеть сравнительно просто, если применять аналитическую аппроксимацию нечетких плотностей, с помощью которых задаются g_v-меры. Такая аппроксимация может быть сделана с помощью аналога *(L — R)*-функций — функций (*S — L*) -типа.

Определение 5.3. Функция, обозначаемая *SL(·),* является функцией *(S — L)* -типа тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in \mathscr{R}^+ : SL(-x) = SL(x); \quad SL(0) = S,$$

причем *SL(·)* — монотоппо убывает на $\mathscr{R}^+ : S \in [0, 1]$.

Пример: $SL(x) = S\max(0,\ 1 - |x|^p)$; $SL(x) = S\exp(-|x|^p)$; *p≥1*.

Определение 5.4. Нечеткой плотностью *SL*-типа называется нечеткая плотность $g': X \to [0, 1]$ такая, что

$$g'(x) = \begin{cases} SL'\left(\dfrac{a' - x}{\underline{a}}\right) & \text{при } x \leqslant a',\ \underline{a} \geqslant 0; \\ SL''\left(\dfrac{x - a''}{\bar{a}}\right) & \text{при } x > a'',\ \bar{a} \geqslant 0; \\ S, & \text{если } x \in [a', a''] \subset \mathscr{R}; \end{cases}$$

где $\bar{a}$, $\underline{a}$— правый и левый коэффициенты нечеткости, $L'(\cdot)$, $L''(\cdot)$ — функции *(L — R)* -типа. Очевидно, что если $L' \triangleq L'' = L$, то

$$g'(x) = SL\left(\frac{a' - x}{\underline{a}} \vee \frac{x - a''}{\bar{a}} \vee 0\right) \triangleq L(a(x)).$$

Можно показать, что $\forall\ [a, b] \subset X \subset \mathscr{R}$

$$g_v([a, b]) = \sup_{x \in [a,b]} g'(x)\cdot(1 - v) + v\int_a^b g'(x)\,dx =$$
$$= S\left((1 - v)L\left(\inf_{x \in [a,b]}\left(\frac{a' - x}{\underline{a}} \vee \frac{x - a''}{\bar{a}} \vee 0\right)\right) + v\bar{L}_a^b\right),$$

где $\bar{L}_a^b \triangleq \int_a^b L((a' - x)/\underline{a} \vee (x - a'')/\bar{a} \vee 0)dx$. Нетрудно увидеть, что

$$\inf\left(\frac{a' - x}{\underline{a}} \vee \frac{x - a''}{\bar{a}} \vee 0\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } [a', a''] \cap [a, b] \neq \varnothing; \\ \dfrac{a' - b}{\underline{a}}, & \text{если } b \leqslant a'; \\ \dfrac{a - a''}{\bar{a}}, & \text{если } a \geqslant a''. \end{cases}$$

Рассмотрим особенности приближения экспериментальных g_v-мер аналитическими выражениями с помощью функций *(S — L*)-типа.

Аналогично вышеизложенному будем предполагать, что имеется экспериментальная последовательность значений нечеткой плотности

$g'_1, g'_2, \dots, g'_n$. Используя аналогичные обозначения для подынтервалов, можпо предположить, что нечеткая мера на элементарном подынтервале равна значению нечеткой плотности в точке, принадлежащей этому подынтервалу, т. е. $g_v(\Delta_i) \approx$ $\approx g'_v(\{x_i\})$, где $g_v(\Delta_i)$— нечеткая мера, задаваемая аналитически для Δ_i, $g_v(\{x_i\}) = g'_i$. В случае *(S — L)* -аппроксимации получаем

$$g_v(\Delta_i) = S\left((1-v)\sup_{x\in\Delta_i} L(a(x)) + v\int_{\Delta_i} L(a(x))\,dx\right).$$

Параметр *S* определяется как

$$S = \arg\sup_{x\in X} g'_v(\{x_i\}).$$

Параметр нормировки g_v-меры *v* может быть найден из условия нормировки (5.23) по формуле

$$v = \left(1 - \bigvee_{i=1}^{n} g'_i\right)\Big/\left(\sum_{i=1}^{n} g'_i - \bigvee_{i=1}^{n} g'_i\right).$$

Оценка параметров *(L — R)*-функций может быть проредена аналогично (5.25).
При этом

$$\mathscr{H} = \left(\sum_{A\in\mathscr{P}(S)} \left(g_v(A) - g_v(A)\right)^2\right)^{1/2} \to \min, \qquad (5.27)$$

где

$$g_v(A) = S\left((1-v)\bigvee_{i\in\theta} g_v(\Delta_i) + v\sum_{i\in\theta} g_v(\Delta_i)\right),$$

$$g'_v(A) = S\left((1-v)\bigvee_{i\in\theta} g'_i + v\sum_{i\in\theta} g'_i\right),$$

$$\theta = \{i \mid x_i \in \Delta_i \in A\}.$$

Когда минимизация функционала (5.27) затруднительна, можно воспользоваться приближенной процедурой, аналогичной (5.26). При этом

$$\mathscr{H} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(S\left((1-v)\sup_{\Delta_h\in D_i} L(a(x)) + v\int_{D_i} L(a(x))\,dx\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -(1-v)\sup_{h\in\overline{\{1,i\}}} g'_h + v\sum_{h=1}^{i} g'_h\right)\right)^{2}\Bigg)^{1/2} \to \min,$$

где $D_i = \bigcup_{h\in\overline{\{1,i\}}} \Delta_h$.

В простейшем случае, оценивание параметров *(S — L)*-функции следует производить, используя функционал следующего нида:

$$\mathscr{H}=\Big(\sum_{x_i\in X}(SL(a(x_i))-g_i'(\{x_i\}))^2\Big)^{1/2}.$$

Рассмотренные методы аппроксимации позволяют значительно упростить процедуры вычисления нечетких мер при определении значений нечетких интегралов (здесь и далее под нечеткими интегралами понимаются некоторые монотонные и, вообще говоря, нелинейные функционалы, определяемые на базе нечетких мер.) в различных алгоритмах. Кроме того, при использовании *SL*- и *(L — R)*-аппроксимаций можно значительно сократить объем памяти ЭВМ, необходимый для хранения информации о функциях распределения нечеткости.

5.4. Нечеткие интегралы

Определение 5.5. *Нечеткий интеграл* от функции h: $X \to [0, 1]$ на множестве $A\subseteq X$ по нечеткой мере g определяется как

$$\oint_A h(x)\circ g=\sup_{\alpha\in[0,1]}(\alpha\wedge g(A\cap H_\alpha)), \qquad (5.28)$$

где $H_\alpha=\{x|h(x)\geqslant\alpha\}$. Нечеткий интеграл принято также называть нечетким ожиданием или FEV (fuzzy expected value).

Пусть $\mathscr{F}(X)$— множество нечетких подмножеств базового множества X. Поскольку понятие нечеткого подмножества включает в себя понятие обычного подмножества, то $\mathscr{F}(X)$ является нечетким расширением $\mathscr{B}$: $\mathscr{F}(X)\supset\mathscr{B}$.

Определение 5.6. Функция множества $\tilde{g}$, определяемая в виде

$$\tilde{g}(A)=\oint\mu_A\circ g \qquad (5.29)$$

для $A=\{(x,\ \mu_A(x))\}$, $\mu_A\in\mathscr{F}(X)$, называется расширением g на $\mathscr{F}(X)$.

Определение 5.7. Нечеткий интеграл от функции h: $X\to[0, 1]$ на нечетком множестве $\mu_A\in\mathscr{F}(X)$ по нечеткой мере g определяется как

$$\oint_{\mu_A} h(x)\circ g=\oint_X(\mu_A(x)\wedge h(x))\circ g. \qquad (5.30)$$

Для описания различных видов неопределенности в теории нечетких мер используется общее понятие «степень нечеткости». В общем случае это понятие включает в себя «степень важности», «степень уверенности» и как отдельный случай «степень принадлежности» в теории НМ. Нечеткая мера, таким образом, может интерпретироваться различными способами в зависимости от конкретного применения.

Пусть необходимо оценить степень принадлежности некоторого элемента $x \in X$ множеству $E \subset X$.

Очевидно, что для пустого множества эта степень принадлежности равна 0, а для $x \in F$ $(F \supset E)$ равна 1, т. е. степень принадлежности для $x \in F$ будет больше, чем для $x \in E$, если $E \subset F$. Если степень принадлежности $x_0 \in E$ равна *g(x₀, E),* а вместо *E* задано нечеткое подмножество $\mu_A \in \mathcal{F}(X)$, то

$$g(x_0, A) = \oint_X \mu_A(x) \circ g(x_0, \cdot) = \mu_A(x_0). \qquad (5.31)$$

Это говорит о том, что степень нечеткости суждения «$x_0 \in A$» равна степени принадлежности x_0 нечеткому подмножеству μ_A. Таким образом, понятие степени нечеткости в теории нечетких мер включает в себя понятие степени принадлежности теории НМ.

Отметим основные свойства нечетких интегралов (НИ). Пусть $a \in [0, 1]$, $(E, F) \subseteq X$. Тогда, если h: $X \to [0, 1]$, то:

$$\oint_E (a \vee h) \circ g = a \vee \oint_F h \circ g;$$

$$\oint_E (a \wedge h) \circ g = a \wedge \oint_E h \circ g;$$

$$\oint_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \leqslant \oint_E h_1 \circ g \wedge \oint_E h_2 \circ g;$$

$$\oint_E (h_1 \vee h_2) \circ g \geqslant \oint_E h_1 \circ g \vee \oint_E h_2 \circ g;$$

$$\oint_{E \cup F} h \circ g \geqslant \oint_E h \circ g \vee \oint_E h \circ g;$$

$$\oint_{E \cap F} h \circ g \leqslant \oint_E h \circ g \wedge \oint_F h \circ g.$$

Кроме того,

$$\oint_A h \circ g = M$$

тогда и только тогда, когда $g(A \cap F_M) \geqslant M \geqslant g(A \cap F_{M+0})$, где $F_M = \{x | h \geqslant M\}$ и $F_{M+0} = \{x | h > M\}$.

Можно показать, что понятие НИ сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества *X* на непересекающиеся подмножества E_i: $X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_{E_i}(x),$$

где $\alpha_i \in [0,\ 1]$, $E_i \in \mathscr{B}$, а f_{E_i} — характеристическая функция обычного множества E_i, т. е. $f_{E_i}(x) = 1$, если $x \in E_i$, и $f_{E_i}(x) = 0$, если $x \notin E_i$. Пусть l есть мера Лебега. Интеграл Лебега от функции h по множеству A определяеася как

$$\int_A h\, dl = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(A \cap E_i), \qquad (5.32)$$

где $i \in I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$; $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n$.

Предположим, что $F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup \ldots \cup E_n$. Тогда, определяя h в виде $h(x) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \min\left(\alpha_i, f_{F_i}(x)\right)$, получаем следующее выражение для НИ:

$$\oint_A h(x) \circ g(\cdot) = \max_{i=\overline{1,n}} \min(\alpha_i, g(A \cap F_i)). \qquad (5.33)$$

Оба интеграла — лебегов и нечеткий — можно сравнить, используя вероятностную меру. Если $(X,\ \mathscr{B},\ P)$ — вероятностное пространство, а $h\colon X \to [0,\ 1]$ есть $\mathscr{B}$-измеримая функция, то имеем, что

$$\left| \oint_X h(x) \circ P(\cdot) - \int_X h(x)\, dP \right| \leqslant \frac{1}{4}. \qquad (5.34)$$

В теории НИ имеет место следующая теорема.

Теорема 5.1. Пусть $(Y,\ \mathscr{B}_Y,\ g_Y)$ и $(X,\ \mathscr{B}_X,\ g_X)$ — пространства с нечеткими мерами g_Y и g_X соответственно; $h\colon X \times Y \to [0,\ 1]$, $x \in X$, $y \in Y$. Тогда если $g = g_X \times g_Y$, то для $Z = X \times Y$:

$$\oint_Z h(x,y) \circ g = \oint_Y \left(\oint_X h(x,\ y) \circ g_X \right) \circ g_Y. \qquad (5.35)$$

Данная теорема является аналогом теоремы Фубини из теории меры и начинается теоремой Сугено — Фубини.

Пусть $\{h_n\}$ — монотонная последовательность $\mathscr{B}$-измеримых функций, тогда

$$\oint \lim_{n\to\infty} h_n \circ g = \lim_{n\to\infty} \oint h_n \circ g.$$

Если k_n — монотонно возрастающая (убывающая) последовательность $\mathscr{B}$-измеримых функций и $\{a_n\}$ — монотонно убывающая (возрастающая) последовательность вещественных чисел, то

$$\oint\left[\bigvee_{n=1}^{\infty}(a_n \wedge h_n)\right]\circ g = \bigvee_{n=1}^{\infty}\left[a_n \wedge \oint h_n \circ g\right].$$

На рис. 5.3 дан пример графической интерпретации НИ для $X = \mathscr{R}$, где $S = \oint_A h(x)\circ g = \sup_{\alpha\in[0,1]}[\alpha \wedge g(H_\alpha \cap A)]$; $H_\alpha = \{x \mid h(x) \geqslant \alpha\}$; $f(x)$ — нечеткая плотность.

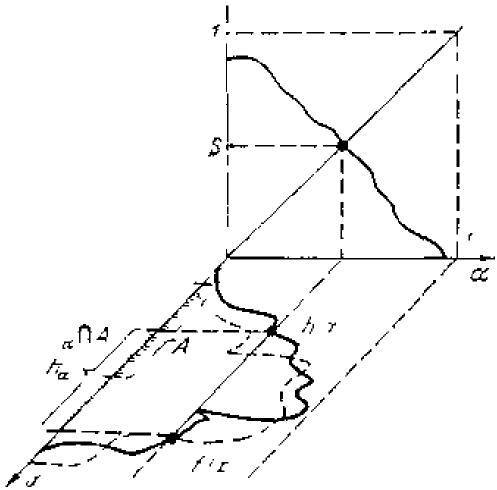


Рис. 5.3. Графическая интерпретация нечеткого интеграла

Пусть $\varphi: X \to Y$, тогда борелевская σ-алгебра $\mathscr{B}^{(\varphi)}$ и нечеткая мера $g^{(\varphi)}$ индуцируются из X в Y. То есть $F \in \mathscr{B}^{(\varphi)}$ тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(F) \in \mathscr{B}$, $g^{(\varphi)}(F) = g(\varphi^{-1}(F))$.

Пространство с нечеткой мерой $(Y, \mathscr{B}^{(\varphi)}, g^{(\varphi)})$ интерпретируется следующим образом. Если Y связано с X с помощью отображения φ, тогда нечеткая мера на Y, с помощью которой измеряется степень нечеткости в Y, также связана с мерой нечеткости в X.

Пусть $E \in \mathscr{B}$ и $F \in \mathscr{B}^{(\varphi)}$. Обозначим через $\rho(E \mid \varphi = y)$ семейство всех функций, эквивалентных $h(y)$ по отношению g:

$$g(E \cap \varphi^{-1}(F)) = \oint_F h(y)\circ g^{(\varphi)}.$$

Здесь $\rho(\cdot|\varphi=y)$ называется условной нечеткой мерой при условии φ=*y*.

Пусть *F* = *Y*, тогда

$$g(E)=\int_Y \rho(E\,|\,\varphi=y)\circ g^{(\varphi)}(\cdot).$$

Условная нечеткая мера обладает следующими свойствами :

1) Для фиксированных $E\in\mathcal{B}$, $\rho(E|\varphi=y)$ как функция от *y* является $\mathcal{B}^{(\varphi)}$-измеримой.

2) Для фиксированных *y*, $\rho(\cdot|\varphi=y)$ является нечеткой мерой для $(X,\ \mathcal{B})$ в смысле $g^{(\varphi)}$.

Если два пространства с нечеткими мерами $(X,\ \mathcal{B}_X,\ g_X)$ и $(Y,\ \mathcal{B}_Y,\ g_Y)$ связаны друг с другом, то отображение φ нельзя определить в общем случае. Далее условную нечеткую меру $\rho(\cdot|\varphi=y)$ будем обозначать как $\rho_X(\cdot|y)$.

В этом случае будет справедливо $g_X(\cdot)=\int_Y \rho_X(\cdot\,|\,y)\circ g_Y$.

Если заданы нечеткие меры g_X, $\rho_Y(\cdot|x)$, g_Y, то существует нечеткая условная мера $\rho(\cdot|y)$ такая, что

$$\rho_Y(F\,|\,x)\circ g_X=\int_Y \rho_X(E\,|\,y)\circ g_Y.$$

Данное уравнение соответствует байесовской формуле определения апостериорной вероятности в этом смысле $\rho_X(\cdot|y)$, которая называется апостериорной нечеткой мерой, а g_X— априорной нечеткой мерой.

В качестве примеров рассмотрим вычисления НИ для счетных множеств в случаях g_λ- и g_ν-мер.

П р и м е р. Пусть задано пятиэлементное счетное множества $X=\{x_i\}\quad i\in\overline{\{1,5\}}\triangleq I$. Каждому элементу $x_i\in X$ соответствуют значения нечетких плотностей g_i из табл. 5.1.

Таблица 5.1

i	1	2	3	4	5
g_i	0,170	0,257	0,216	0,212	0,061
$h(x_i)$	0,5	0,7	0,1	0,2	0,3

Согласно условию нормировки для g_λ-меры получаем λ= 0,25. Значение НИ $S = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g_\alpha]$, где

$$g_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i \in \theta_\alpha}(\lambda g_i + 1) - 1\right);\ \theta_\alpha = \{i \mid h(x_i) \geqslant \alpha\},$$

принимает величину S = 0,4379.

Для g_v-меры из условия нормировки можно получить

$$v = \left(1 - \bigvee_{i=1}^{5} g_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{5} g_i - \bigvee_{i=1}^{5} g_i\right) = 1{,}127.$$

При этом для g_v-меры S = 0,448.

5.5. Применение нечетких мер и интегралов для решения слабо структурированных задач

5.5.1. Процесс субъективного оценивания

Рассмотрим задачу субъективного оценивания некоторым индивидом нечетко описываемых объектов, например, дом, лицо и т. д.. Предположим, что объект характеризуется *n* показателями.

Пусть $K = \{s_1, \ldots, s_n\}$ — множество показателей. При оценивании дома такими показателями могут быть: $s_1 \triangleq$ площадь, $s_2 \triangleq$ удобства и т. д., а для лица $s_1 \triangleq$ глаза, $s_2 \triangleq$ нос и т. д.

В общем случае множество *К* необязательно должно быть множеством физических показателей, оно может быть множеством мнений, критериев и т. д. Пусть $h\colon K \to [0, 1]$— частная оценка объекта, т. е. $h(s)$ — оценка элемента s. Если речь идет о распознавании образов, то $h(s)$ может рассматриваться как характеристическая функция образа. На практике $h(s)$ может быть легко определена объективно или субъективно.

Например, когда объект — дом, объективно имеем оценку $h(s_1)=h$ (площадь) = 800 м^2, которая может быть нормализована числом из интервала [0, 1]. Для лица мы можем пользоваться лишь субъективной оценкой индивида; например, h (глаза) = 0,7.

Предположим, что нечеткая мера для $(K, 2^K)$ является субъективной мерой, выражающей степень важности подмножества из *К*. Например, $g(\{s_1\})$ выражает степень важности элемента s_1 при оценке объекта, $g(\{s_1, s_2\})$— аналогично обозначает степень важности показателей s_1 и s_2. Необходимо отметить, что степень важности всего множества *К* равна единице.

Вычисляя НИ от h до g получаем:

$$e \triangleq \oint_K h(s) \circ g, \qquad (5.36)$$

где e — обобщенная оценка объекта.

Уравнение (5.36) представляет собой свертку n частных оценок. Линейный обобщенный критерий используется обычно в том случае, когда отдельные показатели взаимно независимы. Свертка (5.36) может быть очень полезной, когда существует взаимозависимость показателей, что характерно для большинства задач выбора в нечеткой обстановке.

Процесс субъективного оценивания объектов предполагает идентификацию самой нечеткой меры.

5.5.2. Экспериментальное определение нечеткой меры.

Рассмотрим метод приближенного экспериментального определения нечеткой меры. Предположим, что существует m объектов. Пусть $h_j\colon K \to [0,\ 1]$ —частная оценка j-го объекта, а e_j — общая оценка, получаемая из (5.17). Предъявляя индивиду объекты и их частные оценки, можно получить его субъективные оценки d_j из интервала [0, 1] для всех объектов.

Обозначим $\bar{e} = \max\{e_j\};\ \underline{e} = \min\{e_j\}$ и аналогично $\bar{d}$ и $\underline{d}$.

Производя нормализацию $e_j \forall j \in \{\overline{1, m}\}$, мы имеем

$$w_j = \frac{\bar{d} - \underline{d}}{\bar{e} - \underline{e}} e_j + \frac{\underline{d}\bar{e} - \bar{d}\underline{e}}{\bar{e} - \underline{e}}.$$

Субъективная нечеткая мера может быть получена при условии минимума критерия

$$J = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (d_j - w_j)^2}. \qquad (5.37)$$

Для простоты предполагается, что g в (5.36) удовлетворяет λ-правилу.

Впервые нечеткие меры применялись для оценки сходства одномерных образов. Рассматривалось решение задачи оценки домов. При этом дома оценивались по следующим пяти показателям: площадь, удобства и обстановка, окружающая среда, стоимость, время, требуемое на дорогу до места работы. Известны применения нечетких мер для оценки привлекательности экскурсионных районов, которые оценивались по таким показателям как красота природы, архитектурные памятники и т. д. Результаты оцонок использовались для предсказания увеличения экскурсий в ближайшие десять лет.

Интересное решение задачи информационного поиска с применением нечетких мер рассмотрено в литературе применительно к библиотечной информационно-поисковой системе.

5.5.3. Принятие решения в нечеткой обстановке.

Рассмотрим пример использования условных нечетких мер для решения задачи принятия решения в нечеткой обстановке. Процесс принятия решения описывается шестеркой

$$\langle \theta,\ X,\ A,\ g_\theta(\cdot),\ \sigma_X(\cdot|\vartheta),\ l \rangle,$$

где θ — множество показателей, характеризующих оцениваемый объект x;

X — множество оцениваемых объектов $x \in X$;

g_θ — нечеткая мера степени важности показателей;

$\sigma_X(\cdot|\vartheta)$ — нечеткая мера привлекательности объектов из X при их оценке с точки зрепия показателя $\vartheta \in \theta$;

Y — множество действий покупателя;

l — функция принадлежности нечеткого отношения на декартовом произведении $\theta \times Y$, обозначающая нечеткие потери, когда действие $y \in Y$ выбирается для $\vartheta \in \theta$. Задача заключается в поиске стратегии, которая минимизирует нечеткое ожидание функции потерь. При этом нечеткое действие A имеет функцию принадлежности $\mu_A\colon Y \to [0,\ 1]$, а нечеткая стратегия B, являющаяся нечетким отношением на декартовом произведении $X \times A$, имеет функцию принадлежности $\mu_B\colon X \times Y \to [0,\ 1]$. Нечеткое действие A, основанное на нечеткой стратегии B, определяется с помощью функции принадлежности $\mu_{B(x)}(y) = \mu_B(x,\ y)$. Нечеткие потери для нечеткого действия определяются через функцию принадлежности

$$l(\vartheta,\ A) \triangleq 1 - \max_{y \in Y} (\mu_A(y) \wedge (1 - l(\vartheta,\ y))). \qquad (5.38)$$

Если ЛПР выбирает нечеткую стратегию B, то нечеткое ожидаемое значение потерь примет вид

$$\langle l \rangle_B = \oint_\theta \left[\oint_X l(\vartheta \mid B(x)) \circ \sigma_X(\cdot \mid \vartheta) \right] \circ g_\theta.$$

Решением задачи принятия решения будет

$$\mu_{B^{0}}(x, y) = \oint_{\theta} (1 - l(\theta, y)) \circ \sigma_{\theta}(\cdot \mid x),$$

где $\sigma_{\theta}(\cdot|x)$— апостериорная нечеткая мера.

Данный подход может быть использован для широкого класса задач принятия решения в нечеткой обстановке. Следует отметить, что при небольшом количестве элементов множества θ нечеткая мера g_θ может быть идентифицирована точным методом. Для идентификации нечеткой меры в этом случае эксперимент должен дать оценки степени важности всех подмножеств из θ, т. е. необходимо иметь субъективные оценки *d* такие, что $d:\ 2^{\theta} \to [0,\ 1]$. Идентификация нечеткой меры заключается в минимизации функционала

$$J = \sqrt{\frac{1}{|2^{\theta}|} \sum_{E \in 2^{\theta}} (d_{\theta}(E) - g_{\lambda,\theta}(E))^2}, \qquad (5.39)$$

где $|2^{\theta}| \triangleq \mathrm{card}\, 2^{\theta}$ — мощность мпожестна 2^{θ}, а $g_\theta(E)$ вычисляется так же, как и п. 5.3. Результатом решения задачи (5.39) является значение параметра *К* и нечетких плотностей $g_{\theta_1}, g_{\theta_2}, \ldots, g_{\theta_n};$ n = card 0. Опыт рассмотрения задач принятия решения показывает, что значение λ на практике бывает или положительным или отрицательным числом, но не близким или равным нулю.

Еще один из вариантов применения нечетких мер и интегралов в задаче принятия решений предложен в литературе. В этом случае предпочтения ЛПР описываются с помощью логико-лингвистической модели, т. е. схемы нечетких рассуждений вида $\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{U}$, где $\mathbf{C} = [\mu_{ij}]$— матрица нечетких множеств размером $n \times m$, соответствующая n значениям m лингвистических показателей, $\mathbf{U} = (\mu_{U_1}, \ldots, \mu_{U_n})^T$— вектор нечетких множеств, характеризующих полезность. Выбор группой ЛПР рациональной альтернатины осуществляется по критерию максимума значений НИ вида

$$D = \oint u_{kr} \circ \omega,$$

где ω — нечеткая мера, характеризующая идеальную полезность, а u_{kr}— полезность *к*-й альтернативы для группы ЛПР. Последняя вычисляется по формуле $u_{kr} = \mathbf{M}[u_{kt}]$. Здесь **М** — оператор вычисления обобщенной меры средних, а u_{kt} — НМ, характеризующее полезность *к*-й альтернативы для *t*-го ЛПР.

5.5.4. Процесс обучения в нечеткой обстановке.

Одной из замечательных способностей человека является его способность обучаться в нечеткой обстановке. При обучении он успешно использует нечеткую информацию, которая во многих случаях является единственно доступной. В психологии по традиции используются стохастические модели обучаемости, например, модель Буша и Мостеллера, хотя ряд авторов экспериментально показал, что способность обучаться в вероятностной обстановке, как правило, не свойственна человеку. Исходя из этой точки зрения, и предложена модель обучения, которая, являясь структурным аналогом байесовской модели обучения, позволяет учитывать нечеткую информацию. Данная модель построена с помощью нечетких мер и использовалась для нахождения экстремумов многоэкстремальных функций.

Пусть *X* — множество причин и Y — множество следствий; g_X и g_Y — нечеткие меры для *X* и Y соответственно. Пусть g_Y выражается НИ от $\sigma_Y(\cdot|x)$ по g_X как

$$g_Y(\cdot) = \oint \sigma_Y(\cdot \mid x) \circ g_X, \qquad (5.40)$$

где $\sigma_Y(\cdot|x)$— есть условная нечеткая мера от Y по отношению к *X*. Физический смысл этого уравнения легко установить по аналогии с теорией вероятности: $g_Y(\cdot)$ соответствует вероятности $p(y),\ y \in Y$, для случая, когда заданы вероятностная мера *p(x)* и условная вероятность $p(\cdot|x)$. Следует отметить, что определение $g_Y(\cdot)$ и математические свойства уравнения (5.40) совершенно отличаются от его вероятностного аналога.

Нечеткая мера g_X называется априорной нечеткой мерой, со-ответствующей степени нечеткости субъективной оценки суждения «один из элементов $E \subset X$ имеет место». Нечеткая мера $\sigma_Y(F|x)$, $F \subset Y$ является мерой нечеткости суждения «один из элементов $F \subset Y$ имеет место при заданном *x*».

Рассмотрим метод, позволяющий уточнять g_X в процессе получения новой информации, которая в общем случае выражается подмножеством $F \subset Y$. Эта информация может быть трех типов. Если *F* состоит лишь из одного элемента, то информация является детерминированной, а если несколько, то недетерминированной. Если *F* — нечеткое подмножество, то информация — нечеткая.

Пусть нечеткое множество $A \subset Y$ имеет функцию принадлежности $\mu_A\colon Y \to [0,\ 1]$. Нечеткая мера для нечеткого подмножества *A* определяется как

$$g_Y(A) = \oint_Y \mu_A(y) \circ g_Y.$$

Здесь $g_Y(A)$ выражает степень нечеткости информации, содержащейся в *A*. Нетрудно показать, что

$$g_Y(A) = \oint_Y \mu_A(y) \circ \left[\oint_X \sigma_Y(\cdot \mid x) \circ g_X \right] = \oint_X \sigma_Y(A \mid x) \circ g_X,$$

где

$$\sigma_Y(A \mid x) = \oint_Y \mu_A(y) \circ \sigma_Y(\cdot \mid x).$$

После получения информации *A,* нечеткая мера g_X может быть уточнена таким образом, чтобы значение $g_Y(A)$ увеличилось. Если $g_X(\cdot)$ и $\sigma_Y(\cdot|x)$ удовлетворяют λ-правилу и — $\sigma_Y(A|x_i)$ убывающая функция, то

$$g_Y(A) = \bigvee_{i=1}^{n} [\sigma_Y(A \mid x_i) \wedge g_X(F_i)],$$

где $F_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$. И далее следует, что

$$g_Y(A) = \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l), \tag{5.41}$$

где *l* является наибольшим индексом, для которого имеет место (5.41) и выполняется условие

$$\sigma_Y(A \mid x_{l-1}) \wedge g_X(F_{l-1}) \leqslant \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l),$$
$$\sigma_Y(A \mid x_{l+1}) \wedge g_X(F_{l+1}) > \sigma_Y(A \mid x_l) \wedge g_X(F_l).$$

Обучение характеризуется возрастанием нечетких плотностей g_X, что приводит к увеличению $g_Y(A)$.

Пусть g_i, $i = 1, ..., n$, являются нечеткими плотностями для g_X. Тогда легко показать, что только g_i, $1 \le i \le l$ влияют на значения $g_Y(A)$, поэтому алгоритм обучения имеет вид

$$(g_X^i)' = \alpha g_X^i + (1-\alpha)\sigma_Y(A \mid x_i) \quad \forall i = 1, \ldots, l,$$
$$(g_X^i)' = \alpha g_X^i \quad \forall i = l+1, \ldots, n,$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — параметр, определяющий скорость сходимости. Следует помнить, что после каждой итерации должна осуществляться проверка условия (5.40).

Рассмотренный алгоритм обучения использовался при решении задач минимизации многоэкстремальпых функций. При этом отмечалась высокая эффективность данного алгоритма по сравнению со стохастическими алгоритмами.

Наиболее интересное применение алгоритма рассмотрено при решении задачи классификации. Классификация в этом случае осуществлялась роботом-исследователем. Предварительно осуществилось обучение робота, а точнее, алгоритма классификации. Информация о параметрах предметов, которые классифицировал рооот, снималась в виде сигналов с рецепторов искусственной руки и представлялась в виде лингвистических переменных.

Полученные значения лингвистических переменных, соответствующие отдельным классам предметов, использовались для построения условной меры нечеткости, связывающей параметры предметов с отдельным классом.

Основными преимуществами алгоритма являются: возможность использования нечеткой информации; высокая скорость сходимости; малое время вычисления и большое число используемых классов. Обширной областью применения нечетких мер и НИ является нечеткая статистка. Подробно исследованы методы вычисления нечетких ожиданий (FEV) и их связь с мерами центрального расположения.

5.5.5. Применение нечеткого интеграла для оценки неопределенности НМ.

Для решения многих практических задач с применением теории НМ необходимо оценивать степень неопределенности, размытости нечетких подмножеств, характеризующих различные объекты. Эффективным средством оценки размытости НМ является нечеткая энтропия. Предложен метод вычисления нечеткой энтропии с помощью НИ.

Пусть $\Phi\colon [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ является *N*-функцией такой, что: а) $\Phi(0) = 0$; б) $\Phi(x) = \Phi(1-x),\ x \in [0,\ 1]$;

в) функция Ф является неубывающей в интервале [0, 0,5] и невозрастающей в [0,5, 1]. Пусть тройка $(X,\ \mathscr{B},\ g)$ определяет пространство с нечеткой мерой *g*. В этом случае нечеткая (Ф — *g)*-энтропия есть функционал

$$E_{\Phi,g}(\mu) = \oint_X \Phi(\mu) \circ g, \tag{5.42}$$

где Ф —$\mathscr{B}$-измеримая функция.

Если *X* — конечное множество; и его мощность есть card X = *n*, то энтропия (5.42) примет вид максиминной энтропии и будет вычисляться по формуле

$$E_{\Phi,g}(h) = \bigvee_{i=1}^{n} (a_i \wedge \Phi(\mu(x_i))),$$

где

$$x_i \in X, \quad a_i = g(\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}) \quad \forall i = 1, \ldots, n; \quad a_i > 0.$$

Рассмотренная энтропия является очень удобным инструментом анализа неопределенности НМ в задачах распознавания, принятия решения, диагностики и управления в нечеткой обстановке.

В теории систем развивается направление, предполагающее возможность использования нечетких мер и НИ для аналитического описания систем с нечеткими возмущениями на входах. При этом предполагается, что система является детерминированной. В ряде работ исследуется математический аппарат для описания переходов таких систем из одного состояния в другое на основе соотношений, аналогичных уравнениям Чепмена — Колмогорова.

При исследовании сложных систем нечеткие меры представляют особый интерес для анализа их устойчивости. В случае нечетких систем устойчивость понимается как сохранение уровня сходства нечеткого состояния системы с недопустимой областью меньше некоторого порога ε. В качестве меры сходства можно взять нечеткую меру. Тогда *m*-мерная нечеткая система $\Phi: \mathcal{F}(X^m) \to \mathcal{F}(Y^m)$ будет ε-устойчивой относительно некоторого семейства нечетких соответствий $F(X^m) \subset \mathcal{F}(X^m)$ тогда и только тогда, когда для $\forall \mu_A \in F(X^m)$ имеем $\Phi(\mu_A) = \mu_B$ и $g(\mu_B) \leq \varepsilon$, где $\mu_A \in \mathcal{F}(X^m)$, $\mu_B \in \mathcal{F}(Y^m)$.

Рассмотрены методы коррекции ε-устойчивости динамических многокритериальных систем нечеткого целевого управления, в том числе с *(L — R)*-аппроксимацией нечетких мер.

5.6. Мера возможности

5.6.1. Основные понятия и определения

Вначале рассмотрим свойство хорошего отображения. Затем выведем необходимые и достаточные условия того, что экстраполирующее нечеткое преобразование обладает свойством хорошего отображения, и теоремы существования, связанные с наделением свойством хорошего отображения экстраполирующего нечеткого преобразования.
Рассмотрим еще два эвристических принципа для нечеткого преобразования в терминах меры возможности и нечеткого доверия.

Понятие экстраполирующего нечеткого преобразования введено А.А.Каня. Им было доказано, что преобразования, производимые композиционным правилом выбора, представляют частный случай экстраполирующего нечеткого преобразования. Им было показано, как формализм экстраполирующего нечеткого преобразования обогащает структуру и облегчает выполнение нечеткого алгоритма. Рассматриваемое ниже изложение меры возможности принадлежит А.А.Кане и состоит из двух частей. В первой части выполняется обсуждение экстраполирующего нечеткого преобразования. Оно связано с так называемым свойством хорошего отображения нечеткого преобразования, которое впервые было введено А.А.Каня. Во второй части изучаются два эвристических принципа, связывающие любое нечеткое преобразование с данной мерой возможностей и заданной мерой доверия, которыми наделено пространство распределений возможностей. Рассматриваемые принципы имеют отношение к свойствам экстраполирующего нечеткого преобразования, которые приводят к двум интересным теоремам. Вначале кратко представим несколько основных понятий, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

Наиболее плодотворным из результатов в исследовании нечетких познавательных процессов стало определение нечеткого распределения и нечеткой меры. Пусть заданы некоторые универсальные пространства X и Y, $D_X=\{A$ — нечеткое подмножество ; $\bigvee_X \mu_A(x)=1\}$ будет называться семейством нечетких распределений на X. В этом контексте сформулируем следующие определения.

Определение 1. Под доверием, определенным на пространстве распределений D_x, понимается множество $f=\{f_A\}_{A\in D_X}$ такое, что $f_A:[0,1]\to[0,1]$, f_A — возрастающая функция и $1\in f_A([0,1])$.

Определение 2. Критерий максимума (КМ) меры возможностей γ^{fV} при заданном нечетком распределении V и заданной функции доверия f_V определяется как оператор

$$\gamma^{f_V}: F(X)\ni A\to\gamma^{f_V}(A)=\bigvee_X f_V(\mu_A(x)\wedge\mu_V(x))\in[0,1],$$

где $F\{X)$ обозначает некоторую решетку (расширение некоторого борелевского поля на 2^X) нечетких подмножеств пространства X. Если $f_V=1_e$ — тождественная функция, то будем писать $\gamma^{f_V}=\gamma$.

Логическую интерпретацию этих определений опускаем. Некоторые же аспекты будут освещены в тексте позднее.

Определение 3. Пусть дано множество пар нечетких подмножеств $(A_1, B_1), \ldots, (A_N, B_N)$, где $A_i \in D_X$, $B_i \in D_Y$. По определению это множество называется базовой последовательностью некоторого преобразования. При этом предполагается, что

1) B_i — образ A_i при заданном преобразовании;
2) пары (A_i, B_i) рассматриваются как основные причинно-следственные эффекты некоторого процесса, описываемого преобразованием.

Определение 4. Экстраполирующее нечеткое преобразование относительно некоторой меры возможностей, заданное базовой последовательностью $(\bar{A}_1, B_1), \ldots, (A_N, B_N)$ и множеством доверия $f = (f_1, \ldots, f_N)$ $(f_i \triangleq f_{A_i})$, описывается как оператор

$$T: F(X) \ni A \to T(A) \in F(Y),$$

задаваемый формулой

$$\mu_{T(A)} = \bigvee_{s=1}^{N} \mu_{B_s} \wedge \gamma^{f_s}\ (A).$$

В свете определений 3 и 4 экстраполирующее нечеткое преобразование строится на основных причинно-следственных эффектах, представленных с помощью базовой последовательности. В связи с этим разумно задать воцрос: отражает ли введенный формализм эти связи между A_i и B_i, т. е. $T(A_i) = B_i$? Для случая когда

$$f_1 = \ldots = f_N = 1_c,$$

доказано, что это не всегда, но имеет место. Поэтому данную проблему было бы интересно сформулировать в виде следующего определения.

Определение 5. Нечеткое преобразование T с базовой последовательностью $(A_1, B_1), \ldots, (A_N, B_N)$ обладает свойством хорошего отображения тогда и только тогда, когда для каждого $i=A,\ldots,N$ выполняется равенство $T(A_i) = B_i$.

Несмотря на то, что нечеткий алгоритм конкретизируется некоторыми структурными допущениями и выполняется при условии, что функции принадлежности базовых множеств, функции доверия и меры возможности выбраны подходящим образом, все же нужно еще гарантировать, что преобразование обладает свойством хорошего отображения.

Следующий раздел посвящен анализу свойства хорошего отображения экстраполирующего нечеткого преобразования. Главная проблема состоит в том, чтобы выяснить, обладает или нет данное экстраполирующее нечеткое преобразование свойством хорошего отображения. Если ответ отрицательный, то возникает следующая проблема: какие изменения нужно ввести в формальную систему, чтобы это свойство появилось. На первую проблему ответ дается в виде достаточного условия для экстраполирующего нечеткого преобразования обладать свойством хорошего отображения (теорема 1), а на вторую — в виде теорем (2 и 3) существования.

5.6.2. Свойство хорошего отображения экстраполирующего нечеткого преобразования

Исходя из определения 5, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. Экстраполирующее нечеткое преобразование (определение 4) обладает свойством хорошего отображения, если справедлива следующая импликация: если для некоторого $i \in \{1, \dots, N\}$ и некоторого $y \in Y$ выполняется неравенство $\mu_{B_i}(y_0) < \mu_{B_k}(y_0)$, то $\mu_{B_i}(y_0) \geqslant \gamma^{f_k}(A_i)$.

Доказательство. Пусть из базовой последовательности экстраполирующего нечеткого преобразования выбрано некоторое множество A_S. Докажем, что $T(A_S)=B_S$, т. е.

$$\mu_{T(A_s)}(y) = \bigvee_{k=1}^{N} \mu_{B_k}(y) \wedge \gamma^{f_k}(A_s), \; y \in Y.$$

Поскольку $\gamma^{f_s}(A_s) = 1$,

то

$$\mu_{T(A_s)}(y) = \mu_{B_s}(y) \wedge \bigvee_{\substack{k=1 \\ k\neq s}}^{N} \mu_{B_k}(y) \wedge \gamma^{f_k}(A_s).$$

Предположим, что для некоторого k и некоторого $y \in Y$ имеет место $\mu_{B_s}(y) < \mu_{B_k}(y)$. Тогда согласно допущению

$$\mu_{B_s}(y) \geqslant \gamma^{f_k}(A_s), \text{ т. е. } \mu_{B_s}(y) \geqslant \mu_{B_k}(y) \wedge \gamma^{f_k}(A_s).$$

Тем самым доказано, что $\mu_{T(A_s)}(y) = \mu_{B_s}(y)$, $y \in Y$, что и завершает доказательство.

Если в случае преобразования отношений, полученных по композиционному правилу вывода Заде, свойство хорошего отображения отсутствует, то для обеспечения этого свойства существует единственный путь улучшения формальной схемы преобразования — переопределение базовой последовательности функций принадлежности μ_{A_i}, μ_{B_i}. В этом случае можно столкнуться с одним несоответствием: ясной цели — наделить данное преобразование свойством хорошего отображения — могут препятствовать заранее определенные посылки определений базовых множеств, или, по крайней мере, такая операция может оказаться непонятной. В случае экстраполирующего нечеткого преобразования этой трудности можно избежать, поскольку в распоряжении имеются два дополнительных средства для вмешательства в процесс реализации алгоритма. Первое — подходящий выбор меры возможностей, второе — подходящий выбор функций доверия. Остается, конечно, еще и третий способ, на который уже было указано: изменение базовых множеств (A_i, B_i). Однако этот способ здесь не будет рассматриваться из-за уже отмеченных препятствий, и, в конце концов, это, скорее, область искусства и интуиции, чем формального исследования. Здесь также не будет рассматриваться выбор меры возможностей; выбор меры возможности строго зависит от природы реального процесса, который должен отображаться на формальную модель, и, в конце концов, в нашем распоряжении только КМ-мера возможностей, определенная Заде. Относительно простым, но еще достаточно эффективным оказывается подходящая замена доверия с целью обеспечения свойства хорошего отображения при данном нечетком преобразовании. Именно этот способ улучшения преобразования рассматривается в следующей теореме.

Теорема 2. Для данной базовой последовательности $(A_1,\ B_1)$, ..., $(A_N,\ B_N)$ и КМ-меры возможностей существует нечеткое доверие $f=\{f_A\}$, $i=1, \ldots, N$, такое, что соответствующее экстраполирующее нечеткое преобразование обладает свойством хорошего отображения.

Конструктивное доказательство. Подходящие ограничения на нечеткое доверие будут основаны на рассмотренном в теореме 1 достаточном условии.

Шаг первый. Заметим, что должно удовлетворяться следующее неравенство:

$$\mu_{B_1}(y) \geqslant \bigvee_{s=1}^{N} \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{f_s}(A_1) \text{ для любого } y \in Y. \quad (1)$$

Рассмотрим подмножества $Y_{1s} \subset Y$, $s=2, \ldots, N$, определенные следующим образом:

$$Y_{12}=\{y \in Y : \mu_{B_1}(y) < \mu_{B_2}(y)\},$$

$$\vdots$$

$$Y_{1N}=\{y \in Y : \mu_{B_1}(y) < \mu_{B_N}(y)\}.$$

Отсюда согласно неравенству (1) имеем

$$\gamma^{f_2}(A_1) \leqslant \mu_{B_1}(y) \text{ для } y \in Y_{12},$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{f_N}(A_1) \leqslant \mu_{B_1}(y) \text{ для } y \in Y_{1N}.$$

Учитывая определение КМ-меры возможностей и монотонность функций доверия, на первом шаге получаем следующие ограничения, накладываемыена функции доверия:

$$f_i(\bigvee_X \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A_1}(x)) \leqslant \mu_{B_1}(y),\ y \in Y_{1i}.$$

Это означает, что

$$f_2(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{Y_{12}} \mu_{B_1}(y) \text{ для } x \in [0, \bigvee\limits_X \mu_{A_2}(x) \wedge \mu_{A_1}(x)), \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_N(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{Y_{1N}} \mu_{B_1}(y) \text{ для } x \in [0, \bigvee\limits_X \mu_{A_N}(x) \wedge \mu_{A_1}(x)), \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

Чтобы уточнить алгоритм, рассмотрим его последний, N-й шаг.

Шаг *N*. Рассмотрим подмножества

$Y_{N_s} \subset Y,\ s = 1, \ldots, N-1,$

определенные следующим о'бразом:

$$Y_{N,1} = \{y \in Y : \mu_{B_N}(y) < \mu_{B_1}(y)\},$$

$$\vdots$$

$$Y_{N,N-1} = \{y \in Y : \mu_{B_N}(y) < \mu_{B_{N-1}}(y)\}.$$

Помня о том, что должно выполняться неравенство $\mu_{B_N}(y) \geqslant$ $\geqslant \bigvee\limits_{s \neq N} \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{f_s}(A_N)$, выводим следующие неравенства:

$$\gamma^{f_1}(A_N) \leqslant \mu_{B_N}(y) \text{ для } y \in Y_{N,1},$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{f_{N-1}}(A_N) \leqslant \mu_{B_N}(y) \text{ для } y \in Y_{N,N-1}.$$

Это приводит к подходящим ограничениям, накладываемым на f_i:

$$f_i(\bigvee_X \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A_N}(x)) \leqslant \mu_{B_N}(y) \text{ для } y \in Y_{N,i}, \text{ т. е.}$$

$$f_1(x)\begin{cases} \leqslant \bigvee_{Y_{N,1}} \mu_{B_N}(y) \text{ для } x \in [0, \bigvee_X \mu_{A_1}(x) \wedge \mu_{A_N}(x)), \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f_{N-1}(x)\begin{cases} \leqslant \bigvee_{Y_{N,N-1}} \mu_{B_N}(y) \text{ для } x \in [0, \bigvee_X \mu_{A_{N-1}}(x) \wedge \mu_{A_N}(x)], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

Во избежание затруднений с индексацией нужно обозначать через f_i только минимальное из значений f_i, определенных на $1, 2, \ldots, i-1,$ $i+1, \ldots, N$ последовательных шагах. Из описанного алгоритма следует, что:

а) эффективные ограничения на f_i достижимы (как результат конечного числа шагов процедуры),

б) экстраполирующее нечеткое преобразование, примененное с любым нечетким доверием, удовлетворяющим ограничениям, обладает свойством хорошего отображения.

Пример 1. Построим простое преобразование для заданных базовых пар $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3)$. К'М-меры возможностей и для простейших функций доверия, т. е.

$f_{A_1} = f_{A_2} = f_{A_3} = 1_c.$

Сначала, используя определение 5, убедимся в отсутствии свойства хорошего отображения; затем с помощью алгоритма, приведенного в доказательстве теоремы 2, сформулируем границы доверия, приводящие к свойству хорошего отображения .

Для ясности в примере выберем простое преобразование, определенное на дискретных пространствах X и Y.

Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \; Y = \{1, 2, 3, 4, 5\},$

$$A_1 = [1 \;\; 0{,}75 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}25 \;\; 0], \quad B_1 = [0{,}2 \;\; 0{,}4 \;\; 0{,}6 \;\; 0{,}8 \;\; 1],$$
$$A_2 = [0 \;\; 0{,}5 \;\; 1 \;\; 0{,}5 \;\; 0], \quad B_2 = [1 \;\; 0{,}75 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}25 \;\; 0],$$
$$A_3 = [0 \;\; 0{,}25 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}75 \;\; 1], \quad B_3 = [1 \;\; 0{,}3 \;\; 0{,}2 \;\; 0{,}1 \;\; 0].$$

А. Для проверки наличия свойства хорошего отображения нужно подсчитать $\gamma^i(A_j), \; i, j = 1, 2, 3.$ Согласно определению КМ-меры возможностей

$$\gamma^i(A_j) = \bigvee_X \mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A_j}(x)$$

получаем $\gamma^i(A_i) = 1$ для $i = 1, 2, 3, \; i \neq j, \; \gamma^i(A_j) = 0{,}5$ для $i, j = 1, 2, 3.$

Начнем с A_1 и проверим, выполняется ли равенство $T(A_1)=B_1$.

Оказывается, что оно не выполняется:

$$\mu_{T(A_1)}(y) = \bigvee_{s=1}^{3} \mu_{B_s}(y_1) \wedge \gamma^s(A_1) =$$

$$= (\mu_{B_1}(y_1) \wedge 1) \vee (\mu_{B_2}(y_1) \wedge 0{,}5) \vee (\mu_{B_3}(y_1) \wedge 0{,}5) =$$

$$= (0{,}2 \wedge 0{,}5) \vee (1 \wedge 0{,}5) \vee (1 \wedge 0{,}5) = 0{,}5 \neq \mu_{B_1}(y_1);$$

полученный результат противоречит определению. Этот же результат можно получить из антитезы теоремы 1, а именно:

$$y_1 : \mu_{B_1}(y_1) = 0{,}2 < 1 = \mu_{B_2}(y_1) \quad \text{и} \quad 0{,}2 = \mu_{B_1}(y_1) < \gamma^2(A_1) = 0{,}5,$$

что приводит к отрицанию свойства хорошего отображения.

Б. Для того чтобы свойство хорошего отображения имело место, применим алгоритм из теоремы 2, приводящий к границам функций доверия f_i.

Пусть i=l. Легко видеть, что

$$Y_{12} = \{y : \mu_{B_1}(y) < \mu_{B_2}(y)\} = \{y_1,\ y_2\},$$

$$Y_{13} = \{y ; \mu_{B_1}(y) < \mu_{B_3}(y)\} = \{y_1\},$$

Согласно алгоритму получаем

$$f_2(0{,}5) \leqslant \mu_{B_1}(y) \quad \text{для } y \in Y_{12},$$

$$f_3(0{,}5) \leqslant \mu_{B_1}(y) \quad \text{для } y \in Y_{13}.$$

Это означает, что на функции доверия должны накладываться ограничения $f_2(0{,}5) \leqslant 0{,}2$, $f_3(0{,}5) \leqslant 0{,}5$ и для согласования с монотонностью функций доверия требуется наложить еще и следующие ограничения:

$$f_2(x) \begin{cases} \leqslant 0{,}2 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_3(x) \begin{cases} \leqslant 0{,}5 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть i=2. Согласно исходным данным

$Y_{21} = \{y : \mu_{B_2}(y) < \mu_{B_1}(y)\} = \{y_3, y_4 y_5\}$ и $Y_{23} = \{y : \mu_{B_2}(y) < \mu_{B_3}(y)\} = \varnothing.$

Тогда $f_1(0{,}5) \leqslant \mu_{B_2}(y)$ для $y \in Y_{21}$, т. .е . $f_1(0{,}5) \leqslant$ $\leqslant \min\{0{,}5;\ 0{,}25;\ 0\} = 0.$

На этом шаге не получено ограничение для f_3, так как $Y_{23}= \varnothing$, но для f_1 имеем

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть i = 3. В этом случае имеем

$$Y_{31} = \{y : \mu_{B_3}(y) < \mu_{B_1}(y)\} = \{y_3,\ y_4,\ y_5\},$$

$$Y_{32} = \{y : \mu_{B_3}(y) < \mu_{B_2}(y)\} = \{y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5\}.$$

Это означает, что

$$f_1(0{,}5) \leqslant \min\{\mu_{B_3}(y) \quad \text{для } y \in Y_{31}\},$$

$$f_2(0{,}5) \leqslant \min\{\mu_{B_2}(y) \quad \text{для } y \in Y_{32}\},$$

откуда

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

В. Объединяя границы, определенные для функций принадлежности на последовательных шагах 1—3, получаем

$$f_1(x) = 0 \quad \text{для } x \in [0;\ 0{,}5] \ \text{(шаги 2, 3)},$$

$$f_3(x) \leqslant 0{,}2 \ \text{для } x \in [0;\ 0{,}5] \ \text{(шаг 1)},$$

$$f_2(x) \leqslant 0 \quad \text{для } x \in [0;\ 0{,}5] \ \text{(шаг 3)},$$

что в результате приводит к глобальной оценке: $f_1(x)=0$ для $x \in [0;\ 0{,}5]$ и $f_3(x) \leq 0{,}2$ для $x \in [0;\ 0{,}5]$ (шаг 1), $f_3(x)$, без ограничений (шаг 2), что дает $f_3(x) \leq 0{,}2$ для $x \in [0;\ 0{,}5]$. Наконец, в рассматриваемом примере можно выбрать в качестве функций доверия любое множество f_i (в соответствии с определением 1), такое, что

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \leqslant 0{,}2 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ \text{произвольное значение в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для проверки обоснованности алгоритма положим

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ x \text{ для } x \in [0{,}5;\ 1], \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ x^2 \text{ для } x \in [0{,}5;\ 1], \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ для } x \in [0;\ 0{,}5], \\ -x^2 + 2x \quad \text{для } x \in [0{,}5;\ 1]. \end{cases}$$

В качестве подходящих значений для КМ-меры возможностей в суперпозиции с выписанными функциями доверия получаем

$$\gamma^1(A_1) = 1, \quad \gamma^1(A_2) = 0, \quad \gamma^1(A_3) = 0.$$

Очевидно, что $\mu_{T(A_1)} = \mu_{B_1}$. Аналогично можно также показать, что $\mu_{T(A_2)} = \mu_{B_2}$ и $\mu_{T(A_3)} = \mu_{B_3}$. На рис. 1,*а, б* изображены функции принадлежности для A_i и B_i соответственно.

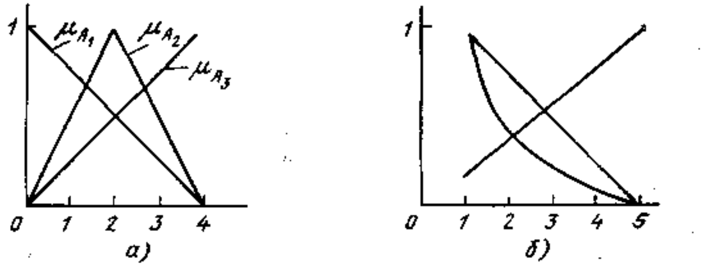


Рис. 1

На рис. 2,*а—в* представлены графики ранее определенных функций доверия. При анализе этих рисунков возникает вопрос о результатах исходных первичных преобразований, согласованных со свойством хорошего отображения. Это, однако, должно стать объектом отдельного изучения.

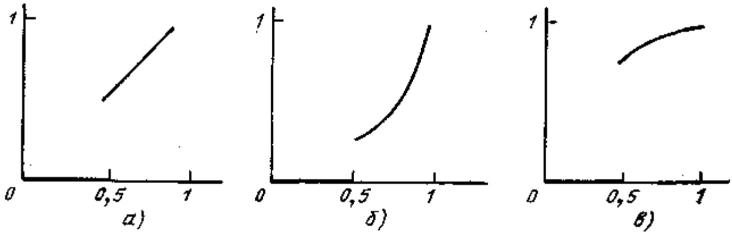


Рис. 2

В качестве ипростой иллюстрации приведем таблицу, в которой представлены некоторые выходные значения для заданных входных данных в случае, когда первичное матричное преобразование *(A)* было заменено улучшенным преобразованием (*B*) посредством введения определенного выше нечеткого доверия:

Нечеткие входные множества нечетких входов	Нечеткие выходные множества
[1 0,75 0,5 0,25 0]	(*A*) [0,5 0,5 0,6 0,8 1]
	(*B*) [0,2 0,4 0,6 0,8 1]
[0 1 0 0 0]	(*A*) [0,5 0,5 0,6 0,75 0,75]
	(*B*) [0,25 0,4 0,6 0,75 0,75]
[0 0 0 1 0]	(*A*) [0,75 0,5 0,25 0,25 0,25]
	(*B*) [0,94 0,5 0,2 0,1 0]
[0 0,3 0,5 1 0,4]	(*A*) [0,75 0,5 0,5 0,5 0,5]
	(*B*) [0,94 0,5 0,2 0,1 0]

Свойство хорошего отображения, описанное в определении 5, является наиболее строгим для того, чтобы гарантировалась «повторяемость» преобразования. Очевидно, что требование, предъявляемое свойством хорошего отображения к преобразованиям, можно ослабить с учетом некоторых практических соображений. Часто оказывается так, что на выходе нечеткой формальной системы на самом деле нужно вовсе не нечеткое множество как таковое, а некоторое его преобразование. Схема такой ситуации приведена на рис. 3.

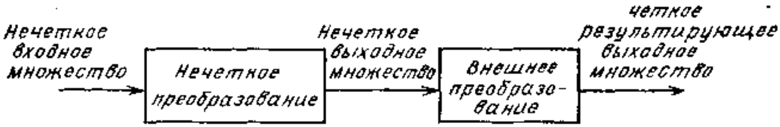


Рис. 3

В практических приложениях такое внешнее преобразование представляет собой просто некоторое устранение нечеткости, т. е. преобразование, которое нечеткое выходное множество отображает в некоторое значение, принадлежащее пространству Y. Такое преобразование заданному множеству может ставить в соответствие медиану или значение, на котором функция принадлежности множества достигает своего максимума или значения подходящего интеграла на Y и т. п. Тогда определение свойства хорошего отображения в соответствии с системой, изображенной на рис. 3, можно обобщить следующим образом.

Определение 6. Нечеткое преобразование T обладает свойством хорошего отображения относительно некоторого внешнего преобразования E тогда и только тогда, когда для любой пары (A_i, B_i), взятой из базы преобразования T, выполняется условие

$$E(T(A_i)) = E(B_i).$$

Заметим, что в определении 5 свойство хорошего отображения рассматривается относительно тождественного преобразования E. Это замечание приводит к следующему выводу.

Вывод. Если нечеткое преобразование обладает свойством хорошего отображения, соответствующим определению 5, то оно обладает этим свойством относительно любого внешнего преобразования E.

Сделанные замечания позволяют сформировать расширенную теорему существования.

Теорема 3. Для данного множества пар нечетких множеств (A_i, B_i) $i=1,...,N$ и данного внешнего преобразования E существует функция доверия $f=\{f_1, \ldots, f_N\}$, такая, что нечеткое экстраполирующее преобразование, построенное на (A_i, B_i) как на базовой последовательности, обладает свойством хорошего отображения относительно E.

5.6.3. О НЕКОТОРЫХ ТРЕБОВАНИЯХ СОГЛАСОВАННОСТИ

В этом разделе приводятся некоторые наблюдения, касающиеся нечетких преобразований, относящиеся к мере возможностей и нечеткому доверию. Оба элемента нечеткой системы — эвристического происхождения и зависят от неформальных характеристик реального процесса, который и должен отображаться на формальную нечеткую систему. **Нечеткое преобразование — это абстрактное представление связей между входными и выходными характеристиками реального объекта** и, более того, оно зависит от предваряющей формализацию диагностики процесса по **мерам возможностей и доверяя.**

В таком случае между нечетким преобразованием и парой мера возможностей — нечеткое доверие существует некоторая «связь», которая делает возможным последовательное построение всей нечеткой системы. Эту ситуацию можно изобразить в виде схемы, приведенной на рис. 4.

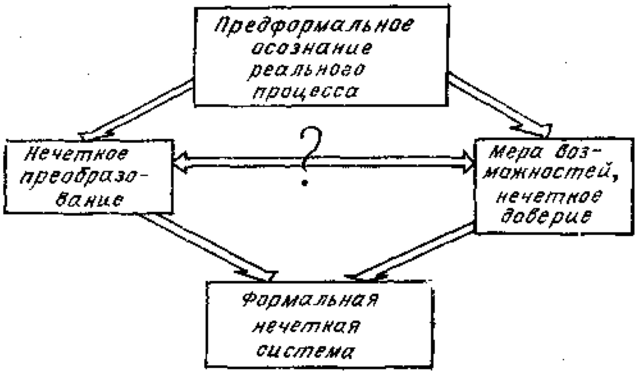


Рис. 4

Место в конструкции формальной нечеткой системы, в котором существует эта гипотетическая связь, отмечено в схеме вопросительным знаком. Далее будут установлены два принципа согласования, проясняющие эту проблему. Следует расценивать их только как вводные положения, требующие дальнейших исследований.

5.6. 4. ПЕРВЫЙ ПРИНЦИП НЕЧЕТКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть заданы универсальные пространства X и Y, семейство D_X нечетких распределений на X и $f=\{f_A\}_{A\in D_X}$ —нечеткое доверие. Рассмотрим нечеткое преобразование $T: F(X)\ni C\to T(C)\in F(Y)$. Тогда

$$\mu_{T(C)}\leqslant\bigvee_{A\in D_X}\mu_{T(A)}\wedge\gamma^{f_A}(C). \quad (2)$$

Для данного Y формулу (2) можно прочитать следующим образом. Распределение возможностей, порожденное образом *T(C),* не превосходит ни в одной точке пространства Y max-композиции распределений *T(A),* урезанной возможностью $\gamma^{f_A}(C)$, модифицированной нечетким доверием f_A, $A\in D_X$. Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту идею.

Пример 2. Пусть даны универсальные пространство X и КМ-мера возможности. Рассмотрим нечеткое доверие, определенное следующим образом: $f_A(x)=x^2$ для $A\in V_0$, где $V_0=\{A\in D_X:\mu_{A'}(x_0)\geqslant\alpha\}$ —так называемая окрестность некоторого элемента $x_0\in X$. Для $B\notin V_0$ функция $f_B(x)=x$.

Согласно определению нечеткого доверия априори мы имеем дело со слабым доверием к тому, что появится значение из окрестности точки x_0.

Введем теперь нечеткое преобразование T: $F(X)\to F(X)$, просто как тождественное преобразование, и посмотрим, выполняется ли первый принцип согласованности. Пусть нечеткое множество C достигает своего максимального значения α для аргумента: x_0, т. е.

$$\bigvee_X\mu_C(x)=\alpha<1.$$

Рассмотрим правую часть неравенства (2):

$$\bigvee_{A\in D_X}\mu_{T(A)}(x_0)\wedge\gamma^{f_A}(C)=\bigvee_{A\in D_X}\mu_A(x_0)\wedge\gamma^{f_A}(C),\ \text{так как}\ T(A)=A.$$

Далее

$$\bigvee_{A\in D_X^1}\mu_A(x_0)\wedge\gamma^{f_A}(C)\vee\bigvee_{A\in D_X^2}\mu_A(x_0)\wedge\gamma^{f_A}(C),$$

где

$$D_X^1 = \{A \in D_X : \mu_A(x_0) \geqslant \alpha\}; \quad D_X^2 = \{A \in D_X : \mu_A(x_0) < \alpha\}.$$

Напомним, что

$$\gamma^{f_A}(C) = \bigvee_X f_A(\mu_C(x) \wedge \mu_A(x)).$$

Если $A \in D^1{}_X$, то

$$\gamma^{f_A}(C) = \bigvee_X (\mu_C(x) \wedge \mu_A(x))^2 < \mu_C(x_0),$$

если $A \in D^2{}_X$, то

$$^{f_A}(C) = \bigvee_X \mu_C(x) \wedge \mu_A(x) < \mu_C(x_0).$$

Отсюда следует, что

$$\bigvee_{A \in D_X^1} \mu_A(x_0) \wedge \gamma^{f_A}(C) \vee \bigvee_{A \in D_X^2} \mu_A(x_0) \wedge \gamma^{f_A}(C) < \alpha = \mu_C(x_0) = \mu_{T(C)}(x_0),$$

что, однако, противоречит принципиальному неравенству (2)

$$\mu_{T(C)} \leqslant \bigvee_{A \in D_X} \mu_{T(A)} \wedge \gamma^{f_A}(C).$$

Данные вычисления показывают, что рассматриваемое преобразование формально не удовлетворяет первому принципу согласованности. Это соответствует предваряющему формализацию предположению, что существует недоверие к возможности появления значений из окрестности V_0 точки x_o.

Примечание. Если бы было взято нечеткое множество С, такое, что

$$\bigvee_X \mu_C(x) = \mu_C(x_0) = 1,$$

то неравенство (2) должно было бы выполняться, что было бы результатом безусловности значения 1 распределения возможностей. Эту ситуацию можно также встретить в анализе лингвистических ограничений.

В этом примере была подчеркнута роль нечеткого доверия. Легко видеть, что чем менее вероятно априори распределение *А,* тем более ограничивающей должна быть выпуклость функции доверия (см., например, рис. 2,*б*). В рассматриваемом случае небольшое доверие в $A \in V_0$ отражается в формуле, определяющей f_A для $A \in V_0$. С другой стороны, чем более правдоподобно распределение *А,* тем больше доверие к *А* и.тем больше вогнута функция f_A при $A \in V_0$ (см., например, рис. *2,в).* Закончим рассмотрение первого принципа согласования следующей теоремой.

Теорема 4. Нечеткое экстраполирующее преобразование удовлетворяет первому принципу согласования относительно любой меры возможностей и нечеткого доверия, если обладает свойством хорошего отображения.

Доказательство. Пусть $V \in F(X)$. Рассмотрим нечеткое экстраполирующее преобразование $\mu_{T(V)} = \bigvee_s \mu_{B_s} \wedge \gamma^{f_{A_s}}(V)$. Поскольку экстраполирующее нечеткое преобразование обладает свойством хорошего отображения, т. е. $\mu_{B_s} = \mu_{T(A_s)}$, то

$$\mu_{T(V)} = \bigvee_s \mu_{B_s} \wedge \gamma^{f_{A_s}}(V) = \bigvee_s \mu_{T(A_s)} \wedge \gamma^{f_{A_s}}(V) \leqslant \bigvee_{D_X} \mu_{T(A)} \wedge \gamma^{f_A}(V).$$

Первый принцип согласования был сформулирован на языке распределения возможностей. Второй принцип согласованности опирается на понятие меры возможностей. Содержательно он может быть описан следующим образом. Независимо от того, какое распределение участвует в определении меры возможностей, значение меры возможностей множества — образа *T(A)* не меньше значения для *A*.

Рассмотрим формализацию этого принципа.

5.6.5. ВТОРОЙ ПРИНЦИП НЕЧЕТКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Пусть даны универсальные пространства *X, Y,* некоторое нечеткое подмножество $A \in F(X)$ и функция нечеткого доверия

$$f = \{f_V\}_{V \in D_X}, \quad g = \{g_W\}_{W \in F(Y)}.$$

Рассмотрим нечеткое преобразование

$$T : F(X) \ni A \to T(A) \in F(Y).$$

Тогда

$$\gamma^{g_G}(T(A)) \geqslant \gamma^{f_E}(A) \tag{3}$$

для любого $E \in D_X$, $G = T(E)$ и $A \in F(X)$.

Как и в предыдущем случае, приведем пример, чтобы пояснить этот принцип.

Пример 3. *X*= [1, ∞]. Пусть нечеткое доверие ослабевает с увеличением аргумента, т. е. $g_V(x) = f_V(x) = x^{\alpha}$, где

$$\mu_V(\alpha) = \bigvee_X \mu_V(x).$$

Рассмотрим нечеткое преобразование T: $F(X) \to F(X)$, такое,что для некоторого положительного действительного q

$$\mu_{T(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{для } |x-1| < q, \\ \mu_A(x-q) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Данное преобразование в некотором смысле возрастающее, однако интуитивно этот факт вступает в полное противоречие с предлагаемым нечетким доверием. Отмеченное противоречие подтверждается следующими расчетами для достаточно «больших» *A* и *E:*

$$\gamma^{g_G}(T(A)) = \bigvee_X g_G(\mu_{T(A)}(x) \wedge \mu_G(x)) = \bigvee_X g_G(\mu_{T(A)}(x) \wedge \mu_{T(E)}(x)) =$$

$$= \bigvee_X g_G(\mu_A(x-q) \wedge \mu_E(x-q)) = \bigvee_X g_G(\mu_A(x) \wedge \mu_E(x)) =$$

$$= g_G(\bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x)) < f_E(\bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x)) =$$

$$= \bigvee_X f_E(\mu_A(x) \wedge \mu_E(x)) = \gamma^{f_E}(A).$$

Полученный результат противоречит второму принципу, отражающему, таким образом, интуитивное беспокойство.
Теперь покажем при некоторых добавочных предположениях, что экстраполирующие нечеткие преобразования удовлетворяют второму принципу. Докажем, что справедлива следующая лемма.
Лемма 1. Пусть $G = T(E)$ и $g_G(x) = \max\{f_E(x) : T(E) = G\}$, $E \in D_X$, f, g — функции нечеткого доверия в соответствующих пространствах. Тогда из неравенства $\gamma^G(T(A)) \geqslant \gamma^E(A)$ следует, что $\gamma^{g_G}(T(A)) \geqslant \gamma^{f_E}(A)$.

Доказательство просто следует из монотонности функции доверия. Учитывая соответствующие определения, получаем

$$\gamma^{g_G}(T(A)) = \bigvee_Y g_G(\mu_{T(A)}(y) \wedge \mu_{T(E)}(y)) = g_G(\bigvee_Y \mu_{T(A)}(y) \wedge \mu_{T(E)}(y)) \geqslant$$

$$\geqslant f_E(\bigvee_Y \dots) = f_E(\bigvee_Y \mu_E(x) \vee \mu_A(x))$$

вследствие предположения, и это равно $\gamma^E(A)$, что и завершает доказательство.
Используя обозначения, введенные при формулировке второго принципа, докажем следующую теорему.
Теорема 5. Экстраполирующее нечеткое преобразование удовлетворяет второму принципу при условии, что 1) мера возможностей есть КМ-мера возможностей; 2) соответствующие функции нечеткого доверия f и g удовлетворяют ограничениям леммы 1; 3) для каждого x существует такое значение s, что $\mu_{A_s}(x) = 1$ и $\mu_{B_s}(y) = 1$ для некоторого $y \in Y$.

Доказательство. Докажем, что для экстраполирующего нечеткого преобразования, определенного равенством $\mu_{T(A)} = \bigvee_{s=1} \mu_{B_s} \wedge \gamma^{A_s}(A)$ справедливо неравенство $\gamma^g(T(A)) \geqslant \gamma^{f_A}(A)$. Тогда в силу леммы 1 будет выполняться неравенство $\gamma^{g_G}(T(A)) \geqslant \gamma^{f_E}(A)$. Согласно определению 2

$$\gamma^G(T(A)) = \bigvee_Y \mu_G(y) \wedge \mu_{T(A)}(y) = \bigvee_Y \mu_G(y) \wedge \bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{A_s}(A) =$$

$$= \bigvee_Y (\bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{A_s}(E)) \wedge (\bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{A_s}(A)) \geqslant$$

$$\geqslant \bigvee_Y (\bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{A_s}(E) \wedge \gamma^{A_s}(A)).$$

Теперь отметим, что

$$\gamma^{A_s}(A) \wedge \gamma^{A_s}(E) = \bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_{A_s}(x) \wedge \bigvee_X \mu_E(x) \wedge \mu_{A_s}(x) \geqslant$$

$$\geqslant \bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x) \wedge \mu_{A_s}(x).$$

Отсюда видно, что

$$\gamma^G(T(A)) \geqslant \bigvee_Y (\bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \gamma^{A_s}(E) \wedge \gamma^{A_s}(A)) \geqslant \bigvee_Y (\bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge$$

$$\wedge \bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x) \wedge \mu_{A_s}(x)) = \bigvee_Y \bigvee_s \bigvee_X (\mu_{B_s}(y) \wedge \mu_A(x) \wedge \mu_E(x) \wedge$$

$$\wedge \mu_{A_s}(x)) = \bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x) \wedge \bigvee_Y \bigvee_s \mu_{B_s}(y) \wedge \mu_{A_s}(x) =$$

$$= \bigvee_X \mu_A(x) \wedge \mu_E(x) = \gamma^E(A).$$

Очевидно, что третье допущение очень ограничительное. Легко доказать, что неравенство из утверждения леммы 1 не выполняется для соответственно выбранных нечетких множеств *A* и *E* и, в частности, в случае, когда *A* и *E* «близкие» подмножества, если условие 3) отбрасывается. Пусть, например, *E = A,* тогда, конечно, $\gamma^A(A) = = \bigvee_X \mu_A(x) = 1$ по предположению. Из рис. 5 видно, что неравенство $\gamma^{T(A)}(T(A)) < 1 = \gamma^A(A)$ справедливо для любого экстраполирующего нечеткого преобразования независимо от того, какие B_s используются в определении преобразования.

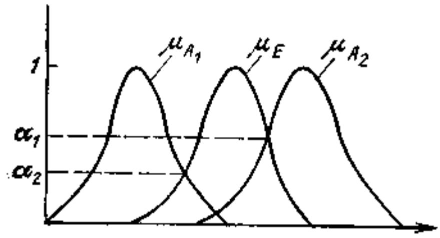


Рис. 5

Это, однако, противоречит второму принципу, так как $\mu_{T(A)} < \alpha_1 < 1$.
Трудности, которые выявились при доказательстве теоремы 5, можно смягчить. Поскольку на практике допущение 3 неудобно, то можно доказать следующую теорему, опирающуюся на второй принцип, но более слабую, так как она не содержит рассматриваемого допущения.
Теорема 6. Если 1) мера возможностей введена как в определении 2; 2) данные нечеткие функции доверия *f* и *g* удовлетворяют ограничениям леммы 1; 3) данное экстраполирующее нечеткое преобразование обладает свойством хорошего отображения, то выполняется следующее неравенство:

$$\gamma^{T(A_s)}(T(A)) \geqslant \gamma^{A_s}(A)$$

для любого $A \in F(x)$ и $s = 1, \ldots, N$.
Доказательство. Зафиксируем некоторое $s \in \{1, \ldots, N\}$. Тогда

$$\gamma^{T(A_s)}(T(A)) = \bigvee_Y \mu_{T(A)}(y) \wedge \mu_{T(A)}(y) = \bigvee_Y \mu_{B_s}(y) \wedge \bigvee_{i=1}^{N} \mu_{B_i}(y) \wedge \gamma^{A_i}(A) =$$

$$= \bigvee_Y \bigvee_i \gamma^{A_i}(A) \wedge \mu_{B_i}(y \wedge \mu_{B_s}(y) = \bigvee_i \gamma^{A_i}(A) \wedge \bigvee_Y \mu_{B_i}(y) \wedge \mu_{B_s}(y) =$$

$$= \gamma^{A_s}(A) \vee \bigvee_{i \neq s} \gamma^{A_i}(A) \wedge \bigvee_Y \mu_{B_i}(y) \wedge \mu_{B_s}(y) \geqslant \gamma^{A_s}(A),$$

при условии, что $\bigvee_Y \mu_{B_s}(y) = 1$.

Следствие. Для произвольных нечетких *f, g,* удовлетворяющих допущениям леммы 1, и экстраполирующего нечеткого преобразования неравенство $\gamma^{g_{B_s}}(T(A)) \geqslant \gamma^{f_{A_s}}(A)$ справедливо для любого $A \in F(X)$, если γ будет КМ-мера возможностей.
В прикладных задачах встречаются случаи, когда нечеткое преобразование оказывается несколько смещенным. Такую картину можно, например, наблюдать в операциях нечеткого управления, которые часто обнаруживают эффекты смещения. В этом случае

алгоритм обычно улучшают так называемым методом проб и ошибок, меняя характер выполнения алгоритма или даже его структуру. Это позволяет достичь некоторого успеха. Проблема состоит прежде всего в отсутствии свойства хорошего отображения.

В настоящем разделе на основе понятия экстраполирующего нечеткого преобразования предлагаются эффективные формальные способы исследовать свойство хорошего отображения, создавая, таким образом, новые возможности для «настройки» нечеткого алгоритма.

Вплоть до недавнего времени был известен только один способ построения нечеткого преобразования — использование отношения, т. е. матричный метод, в своей первоначальной форме предложенный Заде.

Рассматриваемый в данном разделе метод основан на использовании меры возможности нечеткого доверия. Естественно, что возникает вопрос о поиске и других путей построения нечетких преобразований.

Рассмотренные в разделе два принципа согласования поднимают проблему разработки общих правил, которым должно удовлетворять любое нечеткое преобразование, чтобы оно оставалось согласованным с описанием реального объекта на предформальном этапе.

5.7. О СВЯЗИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ПОНЯТИЯМИ НЕЧЕТКИХ МЕР

В этом разделе Э. Ф. Клементом показано, что между понятиями, называемыми четко-значными нечеткими мерами, с одной стороны, и нечетко-значными нечеткими мерами, с другой стороны, существует очень естественная связь, причем последние принимают свои значения во множестве нечетких чисел.

5.7.1.ВВЕДЕНИЕ

Главная цель этого раздела состоит в том, чтобы установить связь между двумя нечеткими мерами, одна из которых изучалась Э. Ф. Клементом *(четко-значные нечеткие меры),* а другая введена Хёле *(нечетко-значные нечеткие меры).*

Поскольку нечетко-значные нечеткие меры принимают свои значения во множестве нечетких неотрицательных действительных чисел, сначала дадим краткую характеристику этого понятия. После этого приведем различные определения нечетких мер, и, наконец, дадим основной результат: существует возможность естественным образом связать нечетко-значную нечеткую меру с четко-значной, и наоборот.

В этом разделе X будет обозначать непустое четкое множество. Под нечетким множеством, как обычно, будет пониматься отображение μ из X в единичный интервал [0,1]. Будем писать $\mathbf{R}_+$ вместо $[0, \infty[$ и $\bar{\mathbf{R}}_+$ — вместо $[0, \infty]$. Также будем всегда считать, что на интервале [0,1] определена обычная σ-алгебра B борелевских подмножеств [0,1].

Пусть (L, ≤) —решетка, тогда $\wedge$ и $\vee$ будут обозначать пересечение и объединение соответственно. Если решетка *(L,* ≤) полная, то $\wedge$ и $\vee$ будем записывать как inf и sup соответственно. Очевидно, что $(\mathbf{R}_+, \leqslant)$ — решетка, и $(\bar{\mathbf{R}}_+, \leqslant)$ и $([0,1]^X, \leqslant)$ — полные решетки, причем в последнем случае ≤ означает обычное (поточечное) частичное упорядочение нечетких множеств. Кроме того, $(\mathbf{R}_+, \leqslant, +)$ и $(\bar{\mathbf{R}}_+, \leqslant, +)$ образуют частично упорядоченные, коммутативные полугруппы.

5.7.2. НЕЧЕТКИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Кратко обсудим понятия нечетких неотрицательных действительных чисел, введенных Хёле. Отметим, что это понятие нечетких чисел отличается от других аналогичных, предложенных в ряде работ. Также нужно отметить, что в некоторых работах предложено расширенное определение (не ограниченное только неотрицательными числами) нечетких действительных чисел.

Нечеткое неотрицательное действительное число определяется как отображение $\rho : \mathbf{R}_+ \to [0,1]$, удовлетворяющее условиям

$$\rho(0) = 0, \quad \bigvee \{\rho(r) | r \in \mathbf{R}_+\} = 1 \quad (\textit{граничные условия}), \tag{1}$$

$$\forall r \in \mathbf{R}_+ : \rho(r) = \bigvee \{\rho(r') | r' \in \mathbf{R}_+,\ r' < r\} \quad (\textit{непрерывность слева}). \tag{2}$$

Если ρ — нечеткое неотрицательное действительное число, то величину $\rho(r)$ можно интердретировать как степень принадлежности неясного числа ρ четкому интервалу [0, t[. Заметим, что именно в этом состоит основное отличие введенного понятия от понятий, использованных другими авторами.

Множество всех нечетких неотрицательных действительных чисел будет обозначаться $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$. Множество $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ совпадает с множеством D^+ всех неотрицательных функций распределения. Определяя частичный порядок на $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ условием

$$\rho \lesssim \varphi \Leftrightarrow \forall r \in \mathbf{R}_+ : \varphi(r) \leqslant \rho(r), \tag{3}$$

легко видеть, что $(\mathscr{H}(\mathbf{R}_+) \lesssim)$ будет решеткой.

На $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ определена естественная алгебраическая операция $\tau_\wedge$

$$\tau_\wedge(\rho, \varphi)(r) = \bigvee \{\rho(s) \wedge \varphi(t) | s, t \in \mathbf{R}_+, s + t = r\}. \quad \textbf{(4)}$$

Тогда $(\mathscr{H}(\mathbf{R}_+), \lesssim, \tau_\wedge)$ образует частично упорядоченную коммутативную полугруппу.

Хотелось бы также отметить, что $\tau_\wedge$ можно рассматривать как обобщение операции сложения действительных чисел, полученное с помощью *принципа обобщения,* сформулированного Заде.

Множество $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ можно естественным образом «уплотнить», если определить *обобщенные нечеткие неотрицательные действительные числа* как отображения $\rho : \overline{\mathbf{R}}_+ \to [0,1]$, удовлетворяющие условиям

$$\rho(0) = 0, \ \rho(\infty) = 1, \quad (5)$$

$$\forall r \in \overline{\mathbf{R}}_+ : \rho(r) = \bigvee \{\rho(r') | r' \in \mathbf{R}_+, r' < r\}, \quad (6)$$

или как нечеткое бесконечно большое число ε_∞:

$$\varepsilon_\infty(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r + \mathbf{R}_+, \\ 1, & \text{если } r = \infty. \end{cases} \quad \textbf{(7)}$$

Расширенное множество всех нечетких неотрицательных действительных чисел будем обозначать через $\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_+)$. Частичный порядок $\lesssim$ на $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ и операция $\tau_\wedge$ на $\mathscr{H}(\mathbf{R}_+)$ могут быть непосредственно распространены на $\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_+)$. Очевидно, что $(\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_+), \lesssim)$ полная решетка, а $(\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_+), \lesssim, \tau_\wedge)$— вновь частично упорядоченная коммутативная полугруппа.

Существует естественное вложение $(\overline{\mathbf{R}}_+, \leqslant, +)$ в $(\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_+))$ посредством полного мономорфизма $x \to \varepsilon_x$, определенного условием

$$\varepsilon_x(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } r > x, \\ 0, & \text{если } r \leqslant x. \end{cases} \quad (8)$$

Далее, для любого отображения рассмотрим *квазиобратное* ему отображение $[\rho]^q$, т. е. функцию из [0,1] в $\overline{\mathbf{R}}_+$

$$[\rho]^q(\alpha) = \begin{cases} \bigvee \{r \in \overline{\mathbf{R}}_+ | \rho(r) < \alpha\}, & \text{если } \rho \neq \varepsilon_\infty, \\ \infty, & \text{если } \rho = \varepsilon_\infty. \end{cases} \quad \textbf{(9)}$$

Легко видеть, что поскольку в ([0,1], $\leq$) все собственные простые идеалы имеют вид $[0, \alpha]$, $\alpha \in [0,1[$ или $[0, \alpha[$, $\alpha \in]0,1]$, эти квазиобратные отображения в действительности оказываются частным случаем квазиобратных отображений, изученных Хёле.

Как непосредственное следствие этого определения получаем, что множество $\mathscr{H}^q(\overline{\mathbf{R}}_+)$ всех квазиобратных отображений из

$\mathcal{H}(\bar{\mathbf{R}}_+)$ есть множество всех функций $f : [0,1] \to \bar{\mathbf{R}}_+$, удовлетворяющих условию

$$f(\alpha) = \begin{cases} \bigvee \{f(\beta) \mid \beta \in [0, \alpha[\ \}, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases} \quad \textbf{(10)}$$

Если наделить $\mathcal{H}^q(\bar{\mathbf{R}}_+)$ отношением $\leq$ обычного (поточечного) частичного порядка действительных функций и операцией + обычного (поточечного) сложения действительных функций, то очевидно, что $(\mathcal{H}^q(\bar{\mathbf{R}}_+) \leqslant)$ будет полной решеткой и $(\mathcal{H}^q(\bar{\mathbf{R}}_+), \leqslant, +)$ — частично упорядоченной коммутативной полугруппой.

Кроме того, отображение $\rho \to [\rho]^q$ —это полный изоморфизм между $(\mathcal{H}(\bar{\mathbf{R}}_+), \leqslant, \tau_\wedge)$ и $(\mathcal{H}^q(\bar{\mathbf{R}}_+), \leqslant, +)$.

5.7.3. НЕЧЕТКИЕ МЕРЫ

В этом разделе приведены определения четко-значных и нечетко-значных нечетких мер. Сначала напомним определение нечеткой σ-алгебры.

Нечеткой σ-*алгеброй* называется семейство нечетких подмножеств, т. е. $\sigma \subset [0,1]^X$, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\alpha \text{ постоянная} \Rightarrow \alpha \in \sigma; \quad (11)$$

$$\mu \in \sigma \Rightarrow 1 - \mu \in \sigma; \quad (12)$$

$$(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \sigma^{\mathbf{N}} \Rightarrow \bigvee_{n\in\mathbf{N}} \mu_n \in \sigma. \quad (13)$$

Пара *(X,* σ*)* называется *нечетким измеримым пространством,* а элементы из σ — *нечеткими измеримыми множествами.* Очевидно, что каждая нечеткая σ -алгебра будет σ -решеткой.

Отметим, однако, что если на *X* задана классическая σ -алгебра *А,* то ξ(*А*)—семейство всех функций, измеримых относительно *А,* всегда образует нечеткую σ -алгебру. Эта ситуация рассматривалась Заде, который нечеткие измеримые множества назвал нечеткими событиями.

Далее, *четко-значной нечеткой мерой* на измеримом пространстве *(X,* σ*)* называется отображение

$$m : \sigma \to \bar{\mathbf{R}}_+,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

$$m(0) = 0, \quad \textbf{(14)}$$

$$m(\mu \vee \nu) + m(\mu \wedge \nu) = m(\mu) + m(\nu), \quad \textbf{(15)}$$

$$(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \sigma^{\mathbf{N}},\ \mu_n \leqslant \mu_{n+1} \Rightarrow m\Big(\bigvee_{n\in\mathbf{N}} \mu_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbf{N}} m(\mu_n). \quad \textbf{(16)}$$

Заметим, что если *(X, A, P)* —классическое измеримое пространство, то мера

$$m(\mu)=\int \mu\, dP \tag{17}$$

всегда определяет четко-значную нечеткую меру на $(X,\ \zeta(A))$.
Нечетко-значная нечеткая мера на *(X,* σ*)* определяется как функция $\tilde{m}:\sigma\to\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_{+})$,такая,что

$$\tilde{m}(0)=\varepsilon_0; \tag{18}$$

$$\tau_\wedge(\tilde{m}(\mu\vee\nu),\ \tilde{m}(\mu\wedge\nu))=\tau_\wedge(\tilde{m}(\mu),\ \tilde{m}(\nu)); \tag{19}$$

$$(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}\in\sigma^{\mathbf{N}},\ \mu_n\leqslant\mu_{n+1}\Rightarrow\tilde{m}(\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\mu_n)=\bigvee_{n\in\mathbf{N}}\tilde{m}(\mu_n). \tag{20}$$

Это определение было дано при рассмотрении σ -нечетких множеств, где *G* — полная булева алгебра, а σ означает σ -полную подалгебру G^X. Однако это определение имеет смысл также и в случае рассмотренных выше нечетких σ -алгебр.
Пусть опять *(X, A, P)* — классическое измеримое пространство. Можно определить на $(X,\ \zeta(A))$ нечеткую меру:

$$\tilde{m}(\mu)(r)=\bigvee\{\alpha\in[0,1]\,|\,P(\{\mu>1-\alpha\})<r\}. \tag{21}$$

Хотелось бы отметить, что на идее нечетких мер, принимающих не только четкие, но и нечеткие значения, впервые настаивал Заде. Необходимо отметить, что рассмотренная Ягером нечеткая вероятность в некотором смысле подобна определенной в (21) квазиобратной мере относительно нечеткой меры $\tilde{m}$.
Обозначим через λ меру Лебега на измеримом пространстве $([0,1],\ \mathscr{B})$.
Утверждение 1. Пусть *(X,* σ*)* —нечеткое измеримое пространство и $m:\sigma\to\overline{\mathbf{R}}^{+}$—четко-значная нечеткая мера на *(X,* σ). Тогда

$$\tilde{m}(\mu)=\varepsilon_{m(\mu)} \tag{22}$$

определяет нечетко-значную нечеткую меру на *(X,* σ).
Доказательство. Очевидно, что свойство (18) выполняется. Выполнение свойств (19), (20) непосредственно следует из того, что $x\to\varepsilon_x$— полный мономорфизм из $(\overline{\mathbf{R}}_{+},\ \leqslant,\ +)$ в $\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_{+},\leqslant,\ \tau_\wedge)$.
Утверждение 2. Пусть *(X,* σ*)* — нечеткое измеримое пространство и $\tilde{m}:\sigma\to\mathscr{H}(\overline{\mathbf{R}}_{+})$ есть нечетко-значная нечеткая мера на *(X,* σ). Тогда

$$m(\mu)=\int_{[0,1]}[\tilde{m}(\mu)]^{q}\,d\lambda \tag{23}$$

определяет четко-значную нечеткую меру на *(X,* σ*)*.

Доказательство. Заметим сначала, что число, квазиобратное нечеткому числу, будет неубывающей и поэтому измеримой функцией, поэтому $m(\mu)$ — всегда хорошо определенная мера.
Справедливость условия (14) проверяется непосредственно. Проверим выполнение условий (15) и (16). Для этого используем тот факт, что $\rho \to [\rho]^q$ —полный изоморфизм из $(\mathscr{H}(\bar{\mathrm{R}}_+), \lesssim, \tau_\wedge)$ на $(\mathscr{H}^q(\bar{\mathrm{R}}_+), \leqslant, +)$, а также свойства (19) и (20) соответственно, и, в последнем случае, теорему Лебега о монотонной сходимости:

$$m(\mu \vee \nu) + m(\mu \wedge \nu) = \int_{[0,1]} ([\tilde{m}(\mu \vee \nu)]^q + [\tilde{m}(\mu \wedge \nu)]^q)\, d\lambda =$$

$$= \int_{[0,1]} [\tau_\wedge(\tilde{m}(\mu \vee \nu), \tilde{m}(\mu \wedge \nu))]^q\, d\lambda = \int_{[0,1]} [\tau_\wedge(\tilde{m}(\mu), \tilde{m}(\nu))]^q\, d\lambda =$$

$$= \int_{[0,1]} ([\tilde{m}(\mu)]^q + [\tilde{m}(\nu)]^q)\, d\lambda = m(\mu) + m(\nu).$$

Следовательно, свойство (15) выполняется. Проверим свойство (16). Пусть $(\mu_n)_{n \in \mathrm{N}} \in \sigma^{\mathrm{N}}$ —неубывающая последовательность нечетких измеримых множеств. Тогда имеем

$$\bigvee_{n \in \mathrm{N}} m(\mu_n) = \bigvee_{n \in \mathrm{N}} \int_{[0,1]} [\tilde{m}(\mu_n)]^q\, d\lambda = \int_{[0,1]} [\tilde{m}(\bigvee_{n \in \mathrm{N}} \mu_n)]^q\, d\lambda = m(\bigvee_{n \in \mathrm{N}} \mu_n).$$

На этом завершается доказательство.

6. О плотности λ-нечеткой меры

В этом разделе излагается работа Я. Цукамото, М. М. Тута, П. Н. Никифорук, в которой исследуется функция *F*-плотности λ-нечеткой меры применительно к методу вычисления нечеткого интеграла Утверждается, что введение функции *F* -плотности очень полезно для изучения так называемых нечетких статистик.

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Суджено ввел теорию нечетких интегралов и понятие нечеткой меры. Кроме того, он предложил λ -нечеткую меру как частный случай нечеткой меры. В серии последующих работ он провел дальнейшее изучение, связанное с λ -нечеткой мерой, и сообщил о некоторых вариантах ее применения. Кандель назвал теорию нечетких интегралов нечеткой статистикой и развил некоторые исследования в этой области. Прад в обзоре по нечетким мерам рассматривал связи между такими различными нечеткими мерами, как **вероятностная мера, мера возможностей, мера определенности, мера правдоподобия, мера достоверности и т. д**. По сравнению с другими нечеткими мерами λ -нечеткая мера допускает более естественную интерпретацию. Суджено определил функцию *F*-распределения λ -нечеткой меры для бесконечного случая и ее функцию F-плотности для конечного случая, которые приводят к правилу построения λ -нечеткой меры для произвольного подмножества рассматриваемого множества. Поскольку функция плотности распределения играет важную роль в теории вероятностей и статистики, то может оказаться очень полезной попытка определить по аналогии и функцию λ -плотности.

В этом разделе рассматривается понятие функции *F*-плотности λ -нечеткой меры для бесконечного случая. Введем определение функции *F*-плотности в противоположность функции плотности вероятностей и покажем, как λ -нечеткая мера выводится из нее. Далее исследуем связь между функций *F*-плотности и функцией *F*-распределения, а также метод вычисления нечеткого интеграла с использованием функции *F*-плотности. Опираясь на эти результаты, установим семантику значения λ в λ -нечеткой мере и, наконец, в качестве иллюстративного примера рассмотрим представление понятия неосведомленности. Результаты этого обсуждения и новый метод вычисления нечеткого интеграла приводят к выводу о полезности понятия функции *F*-плотности для решения практических задач.

Далее будем использовать следующие обозначения:

X — произвольное множество

x—элемент X

$\mathcal{B}$ — борелевекая алгебра на X

A,B.....— подмножества X

A^c _ дополнение A

R — действительная прямая

R+ — неотрицательная часть действительной прямой

I —интервал [0, 1]

$\int$ —интеграл Лебега

⨍ — нечеткий интеграл

h—функция плотности

H —функция распределения вероятностей

p— функция плотности вероятностей

P— вероятностная мера

g — нечеткая мера

g_λ — λ — нечеткая мера

$\vee$ —оператор взятия максимума

$\wedge$ —оператор взятия минимума

$\equiv$ — равно по определению

$\varnothing$ —пустое множество

W — случайная переменная.

6.2. ВВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ λ -НЕЧЕТКОЙ МЕРЫ

Сначала дадим простое объяснение основных понятий теории нечетких интегралов, разработанной Суджено.

Определение 1 (нечеткая мера). Нечеткой мерой называется функция множества, определенная на $\mathscr{B}$ и обладающая следующими свойствами:

а) $g(\varnothing)=0,\ g(X)=1,$

б) если $A,\ B\in\mathscr{B}$ и $A\subset B,$ то $g(A)\leqslant g(B),$

в) если $F_n\in\mathscr{B}$ при $1\leq n\leq\infty$ и последовательность $\{F_n\}$ монотонная (в смысле включения), то $\lim\limits_{n\to\infty} g(F_n)=g(\lim\limits_{n\to\infty} F_n).$

Тройка $(X,\ \mathscr{B},\ g)$ называется пространством нечеткой меры, а g — нечеткой мерой $(X,\ \mathscr{B}).$

Определение 2 (нечеткий интеграл). Пусть $y: X\to I$ есть $\mathscr{B}$ измеримая функция. Нечеткий интеграл по $A\in B$ функции $y(x)$ относительно нечеткой меры g определяется следующим образом:

$$\oint y(x)\circ g(\cdot)=\sup_{\alpha\in I}\{\alpha\wedge g(A\cap F_\alpha)\}, \quad \textbf{(1)}$$

где

$$F_\alpha\equiv\{x|y(x)\geqslant\alpha\}. \quad (2)$$

Свойство б) из определения 1 характеризует монотонность, которая определяет следующие фундаментальные свойства нечеткого интеграла:

$$\text{г) если } A\subset B,\ \oint_A y(x)\circ g\leqslant\oint_B y(x)\circ g, \quad \textbf{(3)}$$

$$\text{д) если } y_1\leqslant y_2,\ \oint_X y_1(x)\circ g\leqslant\oint_X y_2(x)\circ g. \quad \textbf{(4)}$$

Каквидно из соотношения (1), для подсчета нечеткого интеграла необходимо иметь метод получения нечетких мер для произвольных подмножеств X. Определим λ-нечеткую меру как меру, которая удовлетворяет следующему уравнению: для каждой пары непересекающихся подмножеств $E,\ F$ множества X

$$g_\lambda(E\cup F)=g_\lambda(E)+g_\lambda(F)+\lambda\, g_\lambda(E)\, g_\lambda(F),\ -1<\lambda<\infty. \quad \textbf{(5)}$$

Это уравнение называется λ -правилом. Нечеткая мера, подчиненная λ -правилу, представляет собой специальную форму нечеткой меры. Поскольку $g_\lambda(X)=1$, то из (5) следует, что

$$g_\lambda(E^C)=(1-g_\lambda(E))/(1+\lambda\, g_\lambda(E)), \quad \textbf{(6)}$$

где E^c — дополнение E.

Рассмотрим теперь случай, когда X есть конечное множество $K=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Тогда нечеткая мера g_λ алгебры всех подмножеств $(K, 2^K)$ строится следующим образом. Пусть $0\leqslant g^i\leqslant 1$, $1\leqslant i\leqslant n$

$$1/\lambda\left\{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g^i)-1\right\}=1, \quad -1<\lambda<\infty. \quad (7)$$

Где $g^i\equiv g(\{S_i\})$, $i=1, ..., n$. При условии, что величины $g^i (i=1, ..., n)$ заданы, при любом $S\subset K$ можно получить удовлетворяющую λ -правилу (5) *меру* $g_\lambda(S)$

$$g_\lambda(S)=1/\lambda\{\prod_{s_i\in S}(1+\lambda g^i)-1\}. \quad (8)$$

Поэтому величины g^i будут называться нечеткой плотностью λ -нечеткой меры g_λ по Суджено. Теперь пусть X совпадает с R и H — функция, обладающая свойствами функции распределения вероятностей:

1) если $x<z$, то $H(x)\leqslant H(z)$; 2) $\lim\limits_{x\to a} H(x)=H(a)$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x)=0$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=1$.

Используя такую функцию, для $\forall(a, b)\subset R$ можно построить $g_\lambda\{(a, b)\}$ следующим образом:

$$g_\lambda((a, b))=(H(b)-H(a))/(1+\lambda H(a)) \quad (9)$$

(непосредственно следует из λ -правила (5)). Суджено назвал такую функцию функцией F-распределения и использовал ее для подсчета нечеткого интеграла.

Функция плотности вероятностей есть отображение R в R^+, такое, что

$$\int p(x)\,dx=1. \quad (10)$$

Пусть $\mathcal{R}$ есть σ-алгебра в R. Тогда вероятностная мера P есть отображение, определяемое как

$$P:\mathcal{B}\to(0, 1), \; P(A)\equiv\int_A p\,dx, \quad (11)$$

где величина $P(A)$ означает вероятность того, что $W\in A$; W — случайная переменная, принимающая значение в R. Аналогичным образом можно рассмотреть некоторый тип функции плотности для пространства λ-нечеткой меры $(R, \mathcal{R}, g_\lambda)$.

Пусть теперь h— отображение R в R^+ и

$$\int_R h(x)\,dx = N_\lambda,$$

где

$$N_\lambda \equiv (\log(1+\lambda))/\lambda, -1 < \lambda < \infty. \quad (12)$$

Тогда λ -нечеткая мера $g_\lambda : \mathscr{R} \to (0, 1)$ задается соотношением.

$$g_\lambda(A) = \left(e^{\lambda \int_A h(x)dx} - 1 \right) / \lambda. \quad (13)$$

В (13) используется интеграл Лебега, т. е. λ -нечеткая мера может быть введена как сумма бесконечного числа интегралов Лебега функции F-плотности h по $A \subset R$. Согласно теореме Лопиталя, вероятностный случай как частный входит в (12) и (13). Уравнение (13) можно представить в эквивалентной форме:

$$g_\lambda(A) = ((1+\lambda)^\rho - 1)/\lambda \quad (14)$$

или

$$g_\lambda(A) = \int_0^{\rho N} \lambda\, e^{\lambda t}\, dt, \quad (15)$$

где

$$\rho \equiv \int_A h dx / \int_B h dx.$$

Легко показать, что функция g_λ удовлетворяет λ-правилу (5). Теперь можно дать следующее определение.

Определение 3. Если h—неотрицательная измеримая функция и N_λ — нормирующий множитель, и если для любого подмножества A из R функция $g_\lambda(A)$ получается из (13), (14) или (15), то можно сказать, что g_λ имеет плотность h, λ -соответствующую мере Лебега.

Теперь вернемся к рассмотрению функции F-распределения. Как было установлено, свойства функции F -распределения, использованные Суджено, в точности совпадали со свойствами функции распределения вероятностей. Однако при желании сохранить связь между функцией F -плотности и функцией F -распределения

$$H_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} h(x)\,dx, \quad (16)$$

свойство (4) нужно заменить на

$$4')\ \lim_{x\to\infty} H_\lambda(x) = \log(1+\lambda)/\lambda. \quad (17)$$

Далее функцию F -распределения будем обозначать через $H_\lambda(x)$ и считать, что она обладает свойствами 1—3, 4' и удовлетворяет (16). Таким образом, λ-нечеткая мера при

$\forall (a, b] \subset R$

задается формулой

$$g_\lambda((a, b)) = 1/\lambda \{e^{\lambda(H(b)-H(a))} - 1\}. \quad (18)$$

Утверждение 1. Правило построения (13), (14) или (15) включает в себя как частный случай правило построения (8) для конечного множества.

Доказательство. Пусть $E_i \equiv (a_i, b_i],\ i=1, ..., n$ и $E_n \equiv (a_n, b_n)$ — попарно непересекающиеся подмножества R и пусть $g^i \equiv$ $\equiv g_\lambda(E_i) = 1/\lambda(e^{\lambda\int_{E_i} h dx} - 1)$. Таким образом, получаем $e^{\lambda\int_{E_i} h dx} = 1 + \lambda g^i (i=1, ..., n)$. Тогдасо гласно (13) имеем

$$g_\lambda(\bigcup_i E_i) = 1/\lambda \left\{e^{\lambda\sum_i \int_{E_i} h dx} - 1\right\} = 1/\lambda \{\prod_i (1+\lambda g^i) - 1\}.$$

Когда $a_1 = -\infty,\ b_i = a_{i+1} (i=1, ..., n-1)$ и $b_n = +\infty$, согласно (14) легко получаем $g_\lambda(R) = 1$, что и завершает доказательство.
Это утверждение, по-видимому, важно по той причине, что из определенной Суджено функции *F*-распределения и правила построения (9) нельзя вывести как частный случай правило построения (8).

6.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕЧЕТКОГО ИНТЕГРАЛА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ *F*-ПЛОТНОСТИ

В этом подразделе предложим метод вычисления нечеткого интеграла, определенного в (1), с помощью функции *F*-плотности для бесконечного случая.
Пусть *у*— отображение из *R* в *I* такое, что для каждой пары $\alpha_1, \alpha_2 \in I,\ \alpha_1 < \alpha_2$ следует, что $F\alpha_1 \supseteq F\alpha_2$ и $F\alpha_1 \to F\alpha_2 (\alpha_1 \to \alpha_2)$, где

$F\alpha \equiv \{x | y(x) \geqslant \alpha\},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$

Утверждение 2. Пусть задана функция *F*-плотности *h*. Значение нечеткого интеграла по *R* от функции *y* относительно λ-плотности g_λ, равно значению α, для которого

$$\rho(F_\alpha) = \frac{\log(1+\alpha\lambda)}{\log(1+\lambda)}, \quad -1 < \lambda < \infty, \quad (19)$$

где

$$\rho(F_\alpha) \equiv \frac{\int_{F_\alpha} h(x)\,dx}{\int_R h(x)\,dx}. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть

$$\sup_{\alpha\in I} \{\alpha \wedge g_\lambda(F_\alpha)\} \equiv M. \quad \textbf{(21)}$$

В силу свойств монотонности g_λ и F_α для $\alpha \in [0, 1]$ очевидно, что M равно значению α, которое удовлетворяет соотношению

$$\alpha = g_\lambda(F_\alpha). \quad \textbf{(22)}$$

Согласно (14) получаем

$$g_\lambda(F_\alpha) = 1/\lambda\,((1+\lambda)^{\rho(F_\alpha)} - 1), \quad \textbf{(23)}$$

где $\rho(F_\alpha)$ определяется согласно (20). Соотношение (19) следует из (22) и (23). Пусть λ=0, по теореме Лопиталя получаем $g_0(F_\alpha) = \rho(F_\alpha)\,(= \int_{F_\alpha} h(x)dx)$,

что и требовалось доказать.

Легко видеть, что, с одной стороны, правая часть (19) в утверждении 2 зависит только от значений λ и α, а с другой — левая часть представляет собой просто отношение области, определяемой F_α, ко всей области (определения) функции F-плотности. Следовательно, правая часть выражения может быть получена заранее в числовом виде в форме таблицы или графика, откуда следует лемма.

Лемма 1. Если функция F-плотности, с помощью которой строится g_λ, одна и та же, то для каждой пары $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, \infty)$, такой, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, справедливо неравенство

$$\oint y(x) \circ g_{\lambda_1} \geqslant \oint y(x) \circ g_{\lambda_2}. \quad \textbf{(24)}$$

Доказательство. Как видно из (14), для любого подмножества $A \subset R$ производная $g_\lambda(A)$ по λ неположительна. Поэтому из определения (1) нечеткого интеграла следует утверждение леммы.

Можно установить, что $\rho(F_\alpha)$ обладает следующим хорошим свойством. Предположим, что функция F-плотности выражает распределение степеней важности. Пусть кто-нибудь описал свои субъективные степени важности с помощью функции $\varphi: R \to R^+$, в некотором роде похожей на функцию плотности вероятностей, но которая не должна удовлетворять условию нормализации (10) или (12). Если, используя φ, пытаться найти значение нечеткого интеграла, то φ нужно будет преобразовать в другую функцию, удовлетворяющую условию (12). Теперь предположим, что задано

$$h(x) = \gamma\varphi(x) \text{ для всех } x \in R, \quad (25)$$

где γ — положительный коэффициент пропорциональности, тогда. в силу (12)

$$\gamma = \log(1+\lambda)/(\lambda \int_R \varphi(x)\,dx). \quad \textbf{(26)}$$

В описанной ситуации из уравнения (20) следует, что процедура нормализации не потребуется, поскольку $\rho(F_\alpha)$ в уравнении (2) остается инвариантной при таких преобразованиях, как (25).

6.4. СЕМАНТИКА λ В λ -НЕЧЕТКОЙ МЕРЕ

Другое достоинство функции F-плотности связано с представлением о связи между положением в субъективной оценке нечетких объектов и выбором значения λ. Рассмотрим здесь представление неосведомленности. Пусть для простоты *X* будет интервал [0,2]. Если принять вероятностную точку зрения, то функция плотности для представления ситуации неосведомленности задается равномерным распределением, т. е.

$$\rho(x) = 0{,}5 \text{ для всех } x \in [0;\ 2]. \quad \textbf{(27)}$$

Если для функции F-плотности также принять равномерное распределение, то согласно (12) имеем

$$h(x) = \frac{\log(1+\lambda)}{2\lambda} \text{ для всех } x \in [0,\ 2], \quad \textbf{(28)}$$

откуда следует, что значение функции F-плотности $h(x)$ зависит от параметра λ, даже если плотность не зависит от основной переменной. Точно так же, как мера вероятности утверждения «$W \in [0,1]$», получается из соотношения

$$P(W \in [0,\ 1]) = \int_0^1 p(x)\,dx\ (= 0{,}5), \quad (29)$$

нечеткая мера g_λ ([0,1]) задается с помощью соотношения (13) следующим образом:

$$g_\lambda([0,1]) = 1/\lambda\left(e^{\lambda\int_0^1 \frac{\log(1+\lambda)}{2\lambda}dx} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1},\ -1 < \lambda < \infty. \quad \textbf{(30)}$$

То же самое отношение справедливо и для утверждения «$W \in [1;\ 2]$». Таким образом, получаем табл. 1, представляющую распределение нечетких мер для случая отсутствия сведений.

Таблица 1.

Зависимость g_λ *(A)* от значений λ

λ	A	
	[0, 1]	[1, 2]
(−1	1	1)
−0,89	0,75	0,75
0	0,5	0,5
8	0,25	0,25
(∞	0	0)

Итак, в ситуации неосведомленности можно сказать следующее: возможность того, что «$W \in [0,\ 1]$», равна 1; вероятность того, что *W* принадлежит [0, 1], равна 0,5, и необходимость того, что *W* принадлежит [0, 1], равна 0 и т. д. Эти результаты интуитивно совершенно понятны.

Хотя в этом разделе рассмотрены только самые фундаментальные понятия, касающиеся функции F-плотности, можно оптимистически оценивать их применимость, когда речь идет о роли, которую функция плотности вероятностей играет в теории вероятностей и статистике. Кандель, во время дискуссий о связях между нечетким ожидаемым значением (нечетким интегралом) и стандартным вероятностным ожиданием, с одной стороны, и между нечетким ожидаемым значением и мерами центральной тенденции — с другой, высказал предположение, что даже в том случае, когда использованная нечеткая мера совпадает с мерой вероятности, понятие нечеткой ожидаемой величины может оказаться удобнее «осредненной оценки» классических методов. Введение понятия функции F-плотности при таких исследованиях должно оказаться полезным для развития теории нечеткого интеграла в направлении «нечеткой статистики».

7. УСЛОВНЫЕ НЕЧЕТКИЕ МЕРЫ

В данном разделе рассматриваются основные принципы теории нечетких мер в рамках вероятностного подхода, которые являются обобщением классических принципов традиционной теории вероятностей. В результате вводятся понятия условных нечетких мер, нечетких величин, а также их числовых характеристик. Описываемые ниже основные принципы теории нечетких мер в рамках вероятностного подхода разработаны Броневичем А.Г. и Розенбергом И.Н.

7.1. Введение

А.Г. Броневичем и А.Н. Каркищенко подробно исследованы основные выпуклые семейства нечетких мер, которые можно интерпретировать, как нижние или верхние оценки вероятностей событий. Следующий шаг развития теории состоит во введении базовых понятий, аналогичных в теории вероятностей или аддитивной теории меры. В рамках данного исследования используется так называемый «интуитивный» подход, который в некотором смысле близок к модели неточных вероятностей, основанных на множествах вероятностных мер. Аналогичные результаты могут быть получены из совсем других аксиоматических предпосылок, например, на основе согласованных нижних (верхних) предвидений**,** а также принципов избежания потерь и естественного продолжения, или согласованных нижних (верхних) средних по Кузнецову. Однако, по всей видимости, предлагаемый подход является более наглядным и понятным, несмотря на то, что указанные принципы имеют экономическую интерпретацию.
Отметим, что до сих пор в теории нечетких мер или шире в теории неточных вероятностей, нет единого мнения, как определять такие базовые понятия как условные нечеткие меры, понятие независимости, декартового произведения нечетких мер и понятий более высокого уровня. Это может объясняться до сих пор глубоко неизученным, тонким взаимодействием различных видов моделируемой неопределенности, включающих неполноту, неточность, случайность и противоречивость анализируемых данных. Кроме того, здесь нужно учитывать специфику логических построений, например, при переходе от безусловных к условным вероятностям, мы можем потерять важную информацию. Такие же свойства сопутствуют понятию независимости нечетких величин, т.е. в данном случае в силу неточности данных, мы не можем судить о независимости нечетких величин по их совместному распределению, а можем с некоторой точностью говорить

о степени их зависимости. Такая ситуация приводит к аналогичным выводам, например, при поиске подходящей меры информативности по Шеннону (энтропии Шеннона) для функций доверия, а также для меры полной неопределенности.
Неоднозначность определения, например, условной нечеткой меры может объясняться наличием дополнительной априорной информации, выбором статистической модели порождения нечеткой меры, кроме того, в задачах, которые не имеют вероятностную интерпретацию, условные нечеткие меры могут иметь другой содержательный смысл, например, условной информативности относительно частичной информации. В этих случаях условные нечеткие меры могут выбираться совсем из других принципов.
С учеюм этого, в разделе обсуждаются и исследуются такие базовые понятия как условные нечеткие меры, функциональные нечеткие распределения, нечеткие величины, а также их числовые характеристики, принцип обобщения в теории нечетких мер. В основном данные понятия вводятся вначале для точных нижних вероятностей, а затем полученные результаты обобщаются на более широкие семейства нечетких мер. Также приводятся теоремы, обобщающие классические утверждения из теории вероятностей.

7.2. Основные понятия и определения

Наиболее важные определения и утверждения описываются ниже.
Функция множества g на конечной алгебре $\mathfrak{A} = 2^X$ конечного пространства $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ называется нечеткой мерой, если она удовлетворяет условиям нормировки
$(g(\emptyset) = 0,\ g(X) = 1)$

и монотонности $(g(A) \leqslant g(B)$ при $A \subseteq B)$.
Множество всех нечетких мер обозначается M_0, M_P -множество всех вероятностных мер. Нечеткая мера $\neg g(A) = 1 - g(\bar{A})$ называется двойственной к нечеткой мере g. Отношение $g_1 \leqslant g_2$ означает, что $g_1(A) \leqslant g_2(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.
А.Г. Броневичем и А.Н. Каркищенко были детально изучены следующие семейства нечетких меря, которые можно интерпретировать в качестве нижних оценок вероятностей:
$M_1 = \{g \in M_0 \,|\, \exists P \in M_P : g \leqslant P\}$ — множество всех нижних вероятностей на алгебре *A*. Здесь K_P - множество всех вероятностных мер на алгебре $\mathfrak{A}$;

$M_2 = \left\{ g \in M_0 \,|\, \forall B \in \mathfrak{A},\ g(B) \neq 0 : g_B(A) = \frac{g(A \cap B)}{g(B)} \in M_1 \right\}$ — множество всех обобщенных точных нижних вероятностей на алгебре $\mathfrak{A}$;

M_3 — множество всех нечетких мер на алгебре $\mathfrak{A}$, представляемых в виде выиуклой комбинации примитивных нижних вероятностей;
$M_4 = \{g \in M_0 \,|\, \forall A \in \mathfrak{A},\ \exists P \in M_P :\ g \leqslant P,\ g(A) = P(A)\}$ —множество всех точных нижних вероятностей на алгебре $\mathfrak{A}$;
M_5 —множество всех 2-монотонных мер на алгебре $\mathfrak{A}$, для которых выполняется неравенство: $g(A) + g(B) \leqslant g(A \cap B) + g(A \cup B)$ для любых $A, B \in \mathfrak{A}$;

M_6 — множество всех мер доверия на алгебре $\mathfrak{A}$.
А.Г. Броневичем и А.Н. Каркищенко доказано, что данные выпуклые семейства нечетких мер являются идеалами, т.е. они замкнуты относительно операции перемножения нечетких мер.
Имеют место следующие включения:

$$M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \left\{ \begin{array}{l} M_3 \\ M_4 \end{array} \right. \supset M_5 \supset M_6,$$

при этом, однако, $M_3 \not\subseteq M_4$ и $M_4 \not\subseteq M_3$.

7.3. Условные нечеткие меры

Пусть g точная нижняя вероятность, определенная на конечной алгебре $\mathfrak{A} = 2^X$ конечного пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$.
Рассмотрим, как определить условное распределение $g(A|B)$ оценок вероятностей в рамках вероятностного подхода.
Известно, что точная нижняя вероятность определяет семейство вероятностных мер $\Xi = \{P_i | g \leqslant P_i\}$, причем $g(A) = \inf_{P_i \in \Xi} P_i(A)$.

Далее можно ввести в рассмотрение условные вероятностные распределения $P_i(A|B)$, $P_i(B) \neq 0$, порожденные семейством вероятностных мер Ξ, а также точную нижнюю оценку вероятности $P(A|B)$ как

$$g(A|B) = \inf_{P_i \in \Xi | P_i(B) \neq 0} P_i(A|B) \quad (1)$$

С учетом этого нечеткую меру $g(A|B)$ естественно назвать условной нечеткой мерой, построенной по мере g.
Лемма 1. *Пусть* $\Xi = \{P = \alpha P_1 + (1 - \alpha) P_2 | \alpha \in [0, 1]\}$, *тогда*
$g(A) = \min\{P_1(A), P_2(A)\}$ *и* $g(A|B) = \min\{P_1(A|B), P_2(A|B)\}$,

если $g(B) \neq 0$.

Доказательство. Первая формула леммы очевидным образом следует из способа определения точной нижней грани для данного случая. Докажем, что справедлива вторая формула леммы. Будем считать, что $A \subseteq B$. Тогда

$$g(A|B) = \inf_{\alpha \in [0,1]} \frac{\alpha P_1(A) + (1-\alpha)P_2(A)}{\alpha P_1(B) + (1-\alpha)P_2(B)}.$$

Дифференцируя выражение под знаком inf, получим

$$\frac{P_1(A)P_2(B) - P_1(B)P_2(A)}{[\alpha P_1(B) + (1-\alpha)P_2(B)]^2},$$

т.е. функция, стоящая под знаком inf, является монотонной на отрезке $\alpha \in [0,1]$. С учетом этого заключаем, что наибольшее значение данная функция будет принимать на концах отрезка, т.е.

$g(A|B) = \min\{P_1(A|B), P_2(A|B)\}$, если $g(B) \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\Xi = \left\{ P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i \middle| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0 \right\}$, *тогда*

$$g(A) = \min_{i=1,\dots,m} P_i(A) \text{ и } g(A|B) = \min_{i=1,\dots,m} P_i(A|B), \ g(B) \neq 0.$$

Теорема 1   это, очевидно, следствие леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* g *точная нижняя вероятность, причем*

$g(B) + g(\bar{B}) = 1, \quad g(B) \neq 0.$ *для некоторого* $B \subseteq X$. *Тогда*

$$g(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(B)}$$

Доказательство. Заметим, что в данном случае $P(B) = g(B)$ для любой вероятностной меры P. $P \geqslant g$. Поэтому $g(A|B) \geqslant \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$.

Поскольку g - точная нижняя вероятность, то для любого $A \in \mathfrak{A}$ найдется вероятностная мера P, что $P \geqslant g$ и $P(A \cap B) = g(A \cap B)$.

Таким образом, для данной вероятностной меры

$$P(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(B)}.$$

Теорема 2. *Пусть* g *точная нижняя вероятность, определенная на конечной алгебре* $\mathfrak{A}$ *пространства*

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ *и* $\Xi = \{P_i | g \leqslant P_i\}$. *Тогда* Ξ *выпуклое множество, имеющее конечное число экстремальных точек*

$P_1, P_2, \dots, P_m$, *т.е. оно представляется в виде:*

$$\Xi = \left\{ P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i \middle| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geqslant 0 \right\}$$

Доказательство. Семейство вероятностных мер Ξ является решением следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{x_i \in A} P\{x_i\} \geqslant g(A), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} P\{x_i\} = 1, \end{cases} \quad \text{для всех } A \subseteq X\ ,\ A \neq \emptyset.$$

Таким образом, теорема 2 является следствием теории**,** описывающей решения конечной системы линейных неравенств.

Теперь ясно, как находить условные нечеткие распределения для точных нижних вероятностей. Рассмотрим, какие конструктивные результаты можно получить для 2-монотонных нечетких мер. Заметим, что для 2-монотонных мер множество Ξ описывается следующей теоремой**.**

Теорема 3. *Пусть нечеткая мера* g *является 2-монотонпой и* $\Xi = \{P|g \leqslant P\}$. *Тогда экстремальными точками выпуклого множества* Ξ *являются вероятностные меры* P_γ*; где* $\gamma = (i_1, i_1, \ldots i_n)$ *—это перестановки множества чисел* {1.2, ...,n}, *причем* $P_\gamma\{x_{i_k}\} = g(A_k) - g(A_{k-1})$, *где* $A_k = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$,

$k = 1, 2, \ldots n$, $A_0 = \emptyset$.

Теорема 4. *Пусть нечеткая мера* g *является 2-мопотонной, тогда*

$$g(A|B) = \frac{g(A)}{g(A) + 1 - g(A \cup \bar{B})}$$

при $A \subseteq B$ *и* $g(B) \neq 0$.

Доказательство. Из формулы (1) следует, что

$$g(A|B) = \inf_{P \geqslant g} \frac{P(A)}{P(A) + P(B \cap \bar{A})}$$

Таким образом, вероятностную меру P, $P \geqslant g$, требуется выбрать так, чтобы выражение под знаком inf принимало наименьшее значение. Обозначим $P(A) = \alpha$, $P(B \cap \bar{A}) = \beta$, тогда необходимо минимизировать функцию $f(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$. При α ,β > 0, эта функция монотонно возрастает относительно α и монотонно убывает относительно β . Отсюда следует, что вероятностную меру *P* требуется выбрать таким образом, чтобы значение *P(A)* было как можно меньше, а значение $P(B \cap \bar{A})$ как можно больше. С учетом этого, используя свойство 2-монотонности g, выберем вероятностную меру, так чтобы $g(A) = P(A)$, $g(A \cup \bar{B}) = P(A \cup \bar{B})$. Тогда $P(B \cap \bar{A}) = 1 - P(A \cup \bar{B}) = 1 - g(A \cup \bar{B})$. Заметим, что g*(A)* является точной нижней оценкой вероятности события *A* по семейству вероятностных мер $\Xi = \{P|g \leqslant P\}$, а $1 - g(A \cup \bar{B})$ точной верхней оценкой вероятности события $B \cap A$ по Ξ. Поэтому доказываемая формула истинна.

Следствие 1. *Пусть нечеткая мера g является 2-альтернирующей и $A \subseteq B$, тогда*

$$q(A|B) = \frac{q(A)}{q(A) + 1 - q(A \cup \bar{B})},$$

т.е. формула остается такой же, как и для 2-монотонных нечетких мер.

Доказательство. Требуется, используя отношение двойственности, построить двойственную нечеткую меру для $g(A|B)$.

$$q(A|B) = 1 - g(\bar{A} \cap B|B) = 1 - \frac{g(\bar{A} \cap B)}{g(\bar{A} \cap B) + 1 - g((\bar{A} \cap B) \cup \bar{B})}.$$

Заметим, что $(\bar{A} \cap B) \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}$, так как $A \subseteq B$. Поэтому

$$q(A|B) = 1 - \frac{1 - q(A \cup \bar{B})}{1 - q(A \cup \bar{B}) + q(A)} = \frac{q(A)}{q(A) + 1 - q(A \cup \bar{B})}.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Формулу из теоремы 4 для произвольного события $A \subseteq X$ можно обобщить следующим образом:*

$$g(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cap B) + 1 - g(A \cup \bar{B})} = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cap B) + \neg g(\bar{A} \cap B)},$$

где $\neg g$ - это двойственная мера к нечеткой мере g.

Теорема 5. *Пусть g 2-монотонная мера. Тогда мера $g(A|B)$ также будет 2-монотонной.*

Простое доказательство этого факта можно получить, используя теорию разностей. Аналогичную теорему можно получить для мер доверия. Подчеркнем, что приведенное ниже доказательство основано на свойствах идеалов.

Вспомогательная лемма. *Пусть g мера доверия, тогда функция множества* $\mu(A) = \dfrac{g(A \cup B) - g(A \cap B) - g(\bar{B})}{1 - g(B) - g(\bar{B})}$ *является также мерой доверия при*

$g(B) + g(\bar{B}) < 1.$

Доказательство. Очевидно, что функция множества μ удовлетворяет условию нормировки. Докажем, что это мера доверия. Пусть μ мера доверия, тогда

$$g(A) = \sum_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C \rangle}(A).$$

Следовательно,

$$q(A) = g(A \cup \bar{B}) - g(A \cap B) - g(\bar{B}) = \sum_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(A \cup \bar{B}) -$$

$$- \sum_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(\bar{B}) - \sum_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(A \cap B).$$

Поскольку $\eta_{\langle C\rangle}(A \cup \bar{B}) = \eta_{\langle C\rangle}(\bar{B})$ при $C \subseteq \bar{B}$

$$\eta_{\langle C\rangle}(A \cup \bar{B}) = \begin{cases} 1, & C \subseteq A \cup \bar{B}, \\ 0, & C \not\subseteq A \cup \bar{B}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & C \cap B \subseteq A, \\ 0, & C \cap B \not\subseteq A, \end{cases} = \eta_{\langle C \cap B\rangle}(A),$$

а также $\eta_{\langle C\rangle}(A \cap B) = \begin{cases} \eta_{\langle C\rangle}(A), & C \subseteq B, \\ 0, & C \not\subseteq B, \end{cases}$ получим, что

$$q(A) = \sum_{C \subseteq X, C \not\subseteq \bar{B}} m(C)\eta_{\langle C \cap B\rangle}(A) - \sum_{C \subseteq B} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(A) = \sum_{C \subseteq X \left| \begin{smallmatrix} C \not\subseteq \bar{B}, \\ C \not\subseteq B \end{smallmatrix}\right.} m(C)\eta_{\langle C \cap B\rangle}(A).$$

Таким образом, функция множества q представляется в виде линейной комбинации примитивных мер возможности с неотрицательными коэффициентами, т.е. за. счет нормировки мы получим нечеткую меру μ, являющуюся мерой доверия.

Теорема 6. *Пусть g мера доверия. Тогда мера $g(A|B)$ также будет мерой доверия.*

Доказательство. Возможно два случая. Пусть $g(B) + g(\bar{B}) = 1$, тогда для любой вероятностной меры P, $P \geqslant g$, будет выполняться $g(B) = P(B)$. Это означает, что формула для вычисления $g(A|B)$ примет вид

$$g(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(B)}.$$

Нетрудно заметить, что для данного случая мера $g(A|B)$ является мерой доверия. Рассмотрим второй случай, когда $g(B) + g(\bar{B}) < 1$.

$$g(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cap B) + 1 - g(A \cup \bar{B})} = \frac{g(A \cap B)}{(1 - g(\bar{B}))\left(1 - \frac{g(A \cup \bar{B}) - g(A \cap B) - g(\bar{B})}{1 - g(\bar{B})}\right)} =$$

$$= \frac{g(A \cap B)}{1 - g(\bar{B})} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g(A \cup \bar{B}) - g(A \cap B) - g(\bar{B})}{1 - g(\bar{B})}\right)^n.$$

Видно, что в пределе, используя операции выпуклой суммы и произведения для нечетких мер доверия μ из вспомогательной леммы и

$$g_B(A) = \frac{g(A \cap B)}{g(B)},$$

можно выразить нечеткую меру $g(A|B)$. Следовательно, она также является мерой доверия.

Лемма 3. *Пусть g нижняя вероятность и*

$$g(A|B)=\frac{g(A)}{g(A)+1-g(A\cup\bar{B})},$$

$A\subseteq B$, $g(B)\neq 0$. *Тогда для любой вероятностной меры* P, $P\geqslant g$, *будет выполняться неравенство:* $g(A|B)\leqslant P(A|B)$.

Доказательство. Ясно, что

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B\backslash A)},$$

при этом $P(A)\geqslant g(A)$ и $P(B\backslash A)\leqslant 1-g(A\cup\bar{B})$. Кроме того, функция $f(\alpha,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ монотонно возрастает по α и монотонно убывает по *β* при *α, β* > 0. Из этого делаем вывод, что $g(A|B)\leqslant P(A|B)$М

Смысл леммы 3 в том, что формулу для оценок условных вероятностей можно использовать на более широком семействе нечетких мер, включающих все нижние вероятности, а также верхние вероятности. При этом в общем случае будут получаться менее точные оценки, например, для точных нижних вероятностей по сравнению с формулой (1).

Лемма 4. *Пусть g точная нижняя вероятность и*

$g(A|B)=\inf\limits_{P\geqslant g}\frac{P(A)}{P(B)}$, $A\subseteq B$, $g(B)\neq 0$. *Тогда* $g(A)\geqslant g(A|B)\,g(B)$.

Доказательство. Поскольку g точная нижняя вероятность, то выберем вероятностную меру P таким образом, что $P\geqslant g$ и $P(A)=g(A)$. В этом случае $g(B)\leqslant P(B)$, а также по определению $g(A|B)\leqslant P(A|B)$. Поэтому из тождества $P(A)=P(A|B)\,P(B)$ следует неравенство $g(A)\geqslant g(A|B)\,g(B)$.

Теорема 7. *Пусть g - точная нижняя вероятность на $\mathfrak{A}$ и $\{H_1,H_2,\dots,H_k\}$ это разбиение пространства X. т.е.* $H_1\cup H_2\cup\dots\cup H_k=X$ *и* $H_i\cap H_j=\emptyset$, *i≠j. Тогда*

$$g(A)\geqslant\sum_{i=1}^{k}g(A|H_i)\,g(H_i),\ \textit{если}\ g(H_i)>0.$$

Доказательство. Поскольку g точная нижняя вероятность, то она является супераддитивной для несовместных событий. Поэтому

$$g(A)\geqslant\sum_{i=1}^{k}g(A\cap H_i).$$

Далее пользуясь неравенством из леммы 4 $g(A\cap H_i)\geqslant g(A|H_i)\,g(H_i)$, получим требуемое неравенство.

Возникает вопрос, в каких случаях формула полной вероятности дает более точные оценки вероятностей. Ответ на данный вопрос дают следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть* $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ *это разбиение пространства X и* $A \in \mathfrak{A}$ *- произвольное событие. Рассмотрим также разбиение* $\{B_1, B_2, \ldots, B_k, B_{k+1}, \ldots, B_{2k}\}$ *, где* $B_i = A \cap H_i$ *при* $i \leqslant k$, *и* $B_{i+k} = \bar{A} \cap H_i$ *при i≤k. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} g(A|H_i)\, g(H_i) \leqslant \sum_{i=1}^{2k} g(A|B_i)\, g(B_i). \quad \textbf{(2)}$$

Доказательство. Очевидно, что $g(A|H_i)g(H_i) \leqslant g(A \cap H_i) = g(B_i)$ по лемме 4. Кроме того, $g(A|B_i) = 1$ при *i* = 1, 2, ...,*k*, так как $B_i \subseteq A$ и $g(A|B_i) = 0$ при *i* = *k*+ 1, *k*+2, ...,*2k*, поскольку $B_i \cap A = \emptyset$. Поэтому правая часть неравенства (2) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^{k} g(B_i).$$

Теперь, используя оценку $g(A|H_i)g(H_i) \leqslant g(B_i)$, *i* = 1, 2, ...,*k* ,

убеждаемсяв справедливости неравенства *(2).*

Следствие теоремы 8. *Пусть* $\{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ *- это разбиение пространства X, причем* $A = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m, m \leqslant k$. *Тогда неравенство полной вероятности имеет вид:*

$$g(A) \geqslant \sum_{i=1}^{m} g(H_i).$$

Теорема 9. *Пусть* $\mathfrak{A}_1$ *и* $\mathfrak{A}_2$ *- это конечные алгебры событий, определенные на множестве А, и*
$\Omega_1 = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$, $\Omega_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ *это разбиения А, порождающие данные алгебры. Тогда, если* $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, *то* $\sum_{i=1}^{k} g(H_i) \geqslant \sum_{i=1}^{m} g(B_i)$, *т.е. разбиение* Ω_1 *дает более точную оценку вероятности события А по точной нижней вероятности* g.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$,то любой элемент $H \in \mathfrak{A}_1$ является объединением элементов разбиения Ω_2. Поэтому множества B_i можно занумеровать таким образом, чтобы

$$H_1 = \bigcup_{i=i_0+1}^{i_1} B_i,\ H_2 = \bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} B_i, \ldots,\ H_k = \bigcup_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} B_i,$$

где $0 < i_0 < i_1 < \ldots < i_k$. Пользуясь супераддитивностью меры g для несовместных событий, получим

$$g(H_n) = g\left(\bigcup_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} B_i\right) \geqslant \sum_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} g(B_i).$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} g(H_i) \geqslant \sum_{i=1}^{m} g(B_i).$$

7.4. Условные нечеткие меры при дополнительных ограничениях

В некоторых случаях оказывается возможным уточнить условное распределение оценок вероятностей, если имеется дополнительная априорная информация. Покажем, как это уточнение производится, если при расчете $g(A|B)$ каким-то образом получена точная оценка вероятности *P(B)*. Пусть g является 2-монотонной нечеткой мерой и $P(B \cup C) = g(B \cup C)$, $P(C) = g(C)$, причем $C \cap B = \emptyset$. В этом случае можно вычислить вероятность $P(B) = P(B \cup C) - P(C) = g(B \cup C) - g(C)$. Будем вычислять $g(A|B)$ при $A \subseteq B$, используя формулу:

$$g(A|B) = \inf_{P\left|\substack{P \geqslant g,\ P(C)=g(C), \\ P(B\cup C)=g(B\cup C)}\right.} \frac{P(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}.$$

Очевидно, что $P(A \cup C) \geqslant g(A \cup C)$, поэтому

$$g(A|B) \geqslant \frac{g(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}.$$

Покажем, что в последнем неравенстве можно поставить знак равенства. Действительно, поскольку нечеткая мера g является 2-монотонной, то можно найти такуювероятностную меру P, $P \geqslant g$, что $P(C) = g(C)$, $P(A \cup C) = g(A \cup C)$ и

$P(B \cup C) = g(B \cup C)$.

Лемма 5. *Пусть* g *- 2-монотонная нечеткая мера на* $\mathfrak{A} = 2^X$. *Тогда нечеткая мера*

$$g(A|B) = \frac{g(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}.$$

на алгебре $\mathfrak{A}_B = 2^B$, *является 2-монотонной.*

Доказательство. Достаточно показать, что дли любых событий

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq B$ найдется такая вероятностная мера P, $P \geqslant g$, что $g(A_1|B) = P(A_1|B)$, $g(A_2|B) = P(A_2|B)$. Поскольку мера g является 2-монотонной и $C \subsetneq A_1 \cup C \subsetneq A_2 \cup C \subseteq B \cup C$, то найдется вероятностная мера $P \geqslant g$,что $P(C) = g(C)$,

$P(A_1 \cup C) = g(A_1 \cup C)$, $P(A_2 \cup C) = g(A_2 \cup C)$ и $P(B \cup C) = g(B \cup C)$,

откуда уже следует требуемое.

Замечание. Фактически в данном разделе рассматривалось правило пересчета $g(A|B) = \dfrac{g(A \cap B \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}$ при $C \cap B = \emptyset$. Это правило

объединяет всебе такие известные правила, как $g(A|B) = \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$ при

$C = \varnothing$, и

$$g(A|B) = \frac{g(A \cup \bar{B}) - g(\bar{B})}{1 - g(\bar{B})} \text{ при } C = \bar{B}.$$

7. 5. Функциональные нечеткие распределения

Далее будем рассматривать нечеткую меру g на на алгебре $\mathfrak{A} = 2^{X \times Y}$ декартового произведения $X \times Y$ конечных пространств X и Y. В этом случае значения нечеткой меры на всех подмножествах $X \times Y$, и, будем предполагать, отражают некоторую функциональную зависимость между X и Y. Эту зависимость можно исследовать, используя понятие условной нечеткой меры. Пусть произошло событие $A \in \mathfrak{A}_X$, где $\mathfrak{A}_X = 2^X$, оценим значение условной вероятности наступления события $B \in \mathfrak{A}_Y$,где $\mathfrak{A}_Y = 2^Y$, предполагая, что g точная нижняя вероятность. Ясно, что

$$g_2(B|A) = \inf_{P \geqslant g} \frac{P(A \times B)}{P(A \times Y)}, A \in \mathfrak{A}_X, B \in \mathfrak{A}_Y. \quad \textbf{(3)}$$

Если нет никакой другой априорной информации, т.е. в пространстве X наступает достоверное событие, то мы получаем маргинальное распределение оценок вероятностей пространства Y:

$g_2(B) = g_2(B|X) = g(X \times B)$.

Поскольку пространства X и Y являются равносильными, мы можем аналогичным образом получить оценку условной вероятности $g_1(A|B)$, что произошло событие $A \in \mathfrak{A}_X$ при условии наступления $B \in \mathfrak{A}_Y$.

$$g_1(A|B) = \inf_{P \geqslant g} \frac{P(A \times B)}{P(X \times B)}, A \in \mathfrak{A}_X, B \in \mathfrak{A}_Y, \quad (4)$$

а также маргинальное распределение

$$g_1(A) = g_1(A|Y) = g(A \times Y).$$

В том случае, когда мера g является 2-монотонной, формулы (3) и (4) преобразуются к виду:

$$g_2(B|A) = \frac{g(A \times B)}{g(A \times B) + 1 - g(A \times \bar{B} \cup \bar{A} \times Y)}, \quad \textbf{(3*)}$$

$$g_1(A|B) = \frac{g(A \times B)}{g(A \times B) + 1 - g(A \times B \cup X \times \bar{B})}. \quad \textbf{(4*)}$$

Рассмотрим задачу нахождения маргинального распределения $g_2(B),\ B \in \mathfrak{A}_Y$. если известны маргинальное распределение $g_1(A),\ A \in \mathfrak{A}_X$, и значения $g_2(B|\{x_i\}) = g_{x_i}(B)$ только в точках $x_i \in X$. В этом случае, используя принцип точной нижней вероятности (или принцип естественного продолжения), получим

$$g_2(B) = g(X \times B) = \inf_{\substack{P_{x_i} \geqslant g_{x_i} \\ P_1 \geqslant g_1}} \sum_{i=1}^{n} P_{x_i}(B) P_1\{x_i\}, \qquad (5)$$

где $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

В том случае, когда нечеткие меры g_{x_i} являются точными нижними вероятностями, формулу (5), очевидно, можно преобразовать следующим образом:

$$g_2(B) = \inf_{P_1 \geqslant g_1} \sum_{i=1}^{n} g_2(B|\{x_i\}) P_1\{x_i\}.$$

Последнее выражение можно рассматривать, как нижнюю оценку математического ожидания нечеткой величины $g_2(B|\{x_i\}),\ x_i \in X$, по нечеткой мере g_1. Речь об этом пойдет в следующих разделах.

7.6. Принцип обобщения в рамках понятия нижней (верхней) вероятности

(Принцип обобщения хорошо известен в теории меры (в частности, в теории вероятностей), а также теории возможностей. Целью данного раздела было показать, что этот принцип естественно получается в рамках вероятностного подхода в теории нечетких мер.)

Пусть g_X точная нижняя вероятность на $\mathfrak{A}_X = 2^X$ и $\Xi_X = \{P_X | P_X \geqslant g_X\}$ семейство вероятностных мер, индуцированное нечеткой мерой g_X. Кроме того, рассмотрим функциональное отображение f из пространства X в конечное пространство *Y*. Покажем, каким образом в этом случае порождается нечеткая мера g_Y с помощью функционального отображения *f*.

Пусть $P_X \geqslant g_X$, тогда вероятностная мера P_X порождает вероятностную меру P_Y, удовлетворяющую условиям:

$$P_Y(B) = P_X(f^{-1}(B)), \quad (6)$$

где $B \in \mathfrak{A}_Y$ и $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$. Таким образом, мы можем рассматривать функциональное отображение $P_Y = f(P_X)$ вероятностной меры P_X на вероятностную меру P_Y, удовлетворяющую условиям (6). Аналогичным образом можно рассмотреть функциональное отображение *f* семейства вероятностных мер Ξ_X на Ξ_Y: $\Xi_Y = \{f(P_X) | P_X \geqslant g_X\}$. С учетом этого можно определить нечеткую меру g_Y как точную нижнюю оценку вероятности по семейству вероятностныхмер Ξ_Y:

$$g_Y(B) = \inf_{P_Y \in \Xi_Y} P_Y(B) = \inf_{P_X | P_X \geqslant g_X} P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B)),$$

где $B \in \mathfrak{A}_Y$.. Таким образом, мы получили формулу обобщения

$$g_Y(B) = g_X(f^{-1}(B)), B \in \mathfrak{A}_Y,$$

которую можно использовать в общем случае для любых нечетких мер. Далее рассмотрим несколько утверждений, которые позволяют установить, какие свойства нечетких мер сохраняются после действия функциональных отображений.

Утверждение 1. *Пусть g_X - нечеткая мера на $\mathfrak{A}_X$ и $f : X \to Y$ - функциональное отображение, тогда $g_Y = f(g_X)$ - также нечеткая мера.*

Доказательство. Требуется проверить аксиомы нормировки и монотонности нечеткой меры:

1) $g_Y(\emptyset) = g_X(f^{-1}(\emptyset)) = g_X(\emptyset) = 0$;

2) $g_Y(Y) = g_X(f^{-1}(Y)) = g_X(X) = 1$;

3) пусть $A \subseteq B \subseteq Y$, тогда $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ и $g_Y(A) = g_X(f^{-1}(A)) \leqslant g_X(f^{-1}(B)) = g_Y(B)$, т.е. условие монотонности $g_Y(A) \subseteq g_Y(B)$ при $A \subseteq B$ выполняется. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть g_X и q_X нечеткие меры на $\mathfrak{A}_X$ и $f : X \to Y$ функциональное отображение, причем $g_X \leqslant q_X$. Тогда $g_Y = f(g_X) \leqslant q_Y = f(q_X)$.*

Доказательство. Требуется показать, что $g_Y(B) \leqslant q_Y(B)$ для любого $B \in \mathfrak{A}_Y$. По определению последнее неравенство записывается как: $g_X(f^{-1}(B)) \leqslant q_X(f^{-1}(B))$, т.е. $g_Y \leqslant q_Y$ следует из $g_X \leqslant q_X$.

Утверждение 3. Пусть $\mu_X = \alpha g_X + \beta q_X$,где g_X и q_X - нечеткие меры на $\mathfrak{A}_X$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $f : X \to Y$ функциональное отображение, тогда $\mu_Y = \alpha g_Y + \beta q_Y$, где

$g_Y = f(g_X)$, $q_Y = f(q_X)$, $\mu_Y = f(\mu_X)$.

Доказательство. Доказываемое тождество можно переписать в виде

$$\mu_X(f^{-1}(B)) = \alpha g_X(f^{-1}(B)) + \beta q_X(f^{-1}(B),$$

которое выполняется для любого события $B \in \mathfrak{A}_Y$.Но это тождество, очевидно, выполняется из условия утверждения.

Утверждение 4. *Пусть* g_X *нечеткая мера на* $\mathfrak{A}_X$ *и* $\neg g_X$ *двойственная к* g_X *мера,* $f : X \to Y$ *- функциональное отображение. Тогда*

$f(\neg g_X) = \neg f(g_X)$.

Доказательство. Требуется доказать, что $f(\neg g_X)(B) = \neg f(g_X)(B)$ для любого $B \in \mathfrak{A}_Y$. Действительно,

$$f(\neg g_X)(B) = \neg g_X(f^{-1}(B)) = 1 - g_X\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) =$$
$$1 - g_X(f^{-1}(\bar{B})) = 1 - f(g_X)(\bar{B}) = \neg f(g_X)(B).$$

Утверждение 5. *Пусть* g_X *нечеткая мера и* $f : X \to Y$ *функциональное отображение,* $g_Y = f(g_X)$. *Тогда*

1) если g_X *— примитивная мера, то* g_Y *примитивная мера;*

2) если g_X *— нижняя (верхняя) вероятность, то* g_Y *нижняя (верхняя) вероятность;*

3) если g_X *— обобщенная точная нижняя вероятность, то* g_Y *обобщенная точная нижняя вероятность;*

4) если $g_X \in M_3$, *то* $g_Y \in M_3$*;*

5) если g_X *— точная нижняя (верхняя) вероятность, то* g_Y *точная нижняя (верхняя) вероятность;*

6) если g_X *2-монотонная (2-альтернирующая) мера, то* g_Y *2-монотонная (2-альтернирующая) мера;*

7) если g_X *— мера доверия (правдоподобия), то* g_Y *мера доверия (правдоподобия):*

8) если g_X *— мера необходимости (возможности). то* g_Y *мера необходимости (возможности);*

9) если g_X *— вероятностная мера, то* g_Y *вероятностная мера.*

Доказательство.

1) Если g_X —примитивная мера, то $g_X(A) \in \{0,1\}$, $A \in \mathfrak{A}_X$, поэтому и $g_Y(B) = g_X(f^{-1}(B)) \in \{0,1\}$, т.е. g_Y также является примитивной мерой.

2) Пусть g_X — нижняя вероятность. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что $P_X \geqslant g_X$. Пусть $P_Y = f(P_X)$, тогда согласно утверждению 2 $P_Y \geq g_Y$, т.е. g_Y - это нижняя вероятность.

3) Пусть g_X — обобщенная точная вероятность. Тогда согласно определению функции множества $g_X(A|B) = \dfrac{g_X(A \cap B)}{g_X(B)}$ являются нижними вероятностями для любых $B \in \mathfrak{A}_X$, $g_X(B) \neq 0$. Рассмотрим функцию множества

$$g_Y(A|B) = \frac{g_Y(A \cap B)}{g_Y(B)} = \frac{g_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{g_X(f^{-1}(B))} = g_X(f^{-1}(A)|f^{-1}(B)).$$

Таким образом. $g_X(*|B) = g_Y(*|f(B))$, т.е. это свойство следует из 2) и того, что

$$g_Y(A) = \frac{g_Y(A \cap B)}{g_Y(B)} = \frac{g_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{g_X(f^{-1}(B))},$$ т.е. g_Y обобщенная точная нижняя вероятность по свойству 2).

4) Доказывается совершенно аналогично, как и (5).

5) Пусть g_X — точная нижняя вероятность и $B \in \mathfrak{A}_Y$. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что
$P_X \geqslant g_X$ и $P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B))$. Тогда вероятностная мера $P_Y = f(P_X)$ будет удовлетворять необходимым условиям:
$P_Y(B) = g_Y(B)$ и $P_Y \geqslant g_Y$, т.е. g_Y - точная нижняя вероятность.

6) Пусть g_X — 2-монотонная мера и $A \subseteq B \subseteq Y$. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что
$P_X \geqslant g_X$ и $P_X(f^{-1}(A)) = g_X(f^{-1}(A))$, $P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B))$. Это можно сделать, так как $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Далее замечаем, что вероятностная мера $P_Y = f(P_X)$ удовлетворяет всем необходимым условиям: $P_Y \geqslant g_Y$, $P_Y(A) = g_Y(A)$ и $P_Y(B) = g_Y(B)$, т.е. g_Y это 2-монотонная мера.

7) Пусть g_X — мера доверия, тогда ее можно представить в виде выпуклой комбинации примитивных мер необходимости
$g_X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i N_{X,i}$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $N_{X\,i}$— примитивные меры необходимости. Пусть $N_{Y,i} = f(N_{X,i})$, $i = 1, 2, ..., n$.
Тогда, используя доказанные свойства 1) и 6) теоремы, а также утверждение 5, получим

$$g_Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_{Y,i},$$

т.е. g_Y является мерой доверия, поскольку представляется в виде выпуклой комбинации примитивных мер необходимости $N_{Y,i}$.
Полностью доказать утверждение для верхних вероятностей, точных верхних вероятностей, 2-альтернирующих мер, мер правдоподобия и возможности можно, используя свойства 2), 3), 4), 5), 6), отношение двойственности нечетких мер, а также утверждение 4.
8) Пусть g_X — мера необходимости, тогда для любых $A, B \in \mathfrak{A}_X$ $g_X(A \cap B) = \min(g_X(A), g_X(B))$. Проверим, будет ли это свойство выполняться для меры $g_Y = f(g_X)$. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_Y$, тогда $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, поскольку f функциональное отображение. Поэтому $g_Y(A \cap B) = g_X(f^{-1}(A \cap B)) =$ $\min[g_X(f^{-1}(A)), g_X(f^{-1}(B))] = \min(g_Y(A), g_Y(B))$, т.е. g_Y мера необходимости.
9) Следует из принципа обобщения для вероятностных мер.
Замечание 1. Утверждение 5 фактически отражает следующий факт: если нечеткая мера g_X является примитивной, или нижней вероятностью, ...и т.д., на алгебре событий $\mathfrak{A}_1$, то она будет обладать тем же свойством и на алгебре $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$. Покажем, как получается алгебра $\mathfrak{A}_2$ при помощи функционального соответствия *f*:
1) *f* индуцирует алгебру $\mathfrak{A}_Y = f(\mathfrak{A}_1)$ пространства *Y:*
2) рассмотрим обратное отображение $\mathfrak{A}_2 = f^{-1}(\mathfrak{A}_Y)$. Поскольку *f* функциональное отображение, алгебра $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$.
Замечание 2. Ясно, что не любое свойство сохраняется при функциональном отображении. Так, например, любую противоречивую меру можно отобразить на непротиворечивую меру, в частности, на примитивную вероятностную меру. Для этого рассмотрим функциональное отображение пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ на пространство $Y = \{y\}$ по правилу $f(x_i) = y$.
В этом случае любая нечеткая мера g_X на $\mathfrak{A}_X$ отображается на примитивную вероятностную меру g_Y пространства *Y.*

7.7. Нечеткие величины

Аналогичным образом, как и в теории вероятностей, можно определить понятие нечеткой величины. При этом случайную величину можно рассматривать как частный случай нечеткой величины (В ряде работ не делается различия между нечеткой величиной и случайной величиной. В некотором смысле рассматриваемые здесь нечеткие величины можно считать «неточно заданными» случайными величинами.)

Определение 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ нечеткое пространство, на котором определена нечеткая мера g_X. Тогда любая вещественная функция *f(x)*, $x \in X$. называется нечеткой величиной $\xi = f(x)$.

Ясно, что нечеткая величина определяет распределение нечеткости на вещественной оси. При этом достаточно рассматривать что распределение на множестве $Y = f(X)$. Таким образом, изучать нечеткую величину ξ можно, исследуя нечеткую меру $g_Y = f(g_X)$.

Пусть мера g_X является точной нижней вероятностью, тогда g_Y это тоже точная нижняя вероятность. Таким образом, значение $g_Y(A) = g_X(\xi \in A)$ дает точную нижнюю оценку вероятности $P(\xi \in A)$. Другими словами, нечеткая величина ξ отличается от обычной случайной величины тем, что точный закон ее распределения неизвестен, а известны лишь оценки вероятностей. При этом, если g_Y нижняя вероятность, то величина ξ имеет вероятностный закон распределения, который описывается вероятностной мерой из семейства вероятностных мер $\Xi = \{P|P \geqslant g_Y\}$. С учетом этого, для нечеткой величины ξ можно ввести в рассмотрение количественные оценки математического ожидания, моментов различных порядков, дисперсии следующим образом:

1) величина $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P \in \Xi} \sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\} y_i$ называется точной нижней оценкой математического ожидания нечеткой величины ξ (Другой более общей моделью неточных вероятностей является задание нижних (верхних) оценок математических ожиданий функций. Хотя эта модель позволяет делать более точные выводы, но, по-видимому, наиболее оптимальная модель должна быть результатом компромисса между точностью и сложностью модели.)

2) величина

$$\overline{M}[\xi] = \sup_{P \in \Xi} \sum_{i=1}^{m} P\{y_i\} y_i$$

называется точной верхней оценкой математического ожидания нечеткой величины ξ.

3) $\underline{M}[\xi^n]$, $\overline{M}[\xi^n]$ соответственно точные верхняя и нижняя оценки момента *n*-го порядка;

4) величина $\overline{D}[\xi] = \sup\limits_{P\in\Xi}\left(\sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i\right]^2\right)$ называется точной верхней оценкой дисперсии нечеткой величины ξ.

Следующие результаты дают представление, как находить указанные характеристики для простейших семейств вероятностных мер Ξ.

Утверждение 6. *Пусть нечеткая величина ξ описывается семейством вероятностных мер* $\Xi = \{P = \alpha P_1 + \beta P_2 | \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geqslant 0\}$. *Будем считать, что вероятностная мера* $P_i,\ i = 1, 2$, *описывает вероятностное распределение случайной величины* ξ_i, *тогда*
$\underline{M}[\xi] = \min\{M[\xi_1], M[\xi_2]\}$.

Доказательство. Пусть $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$, где $\alpha \in [0,1]$. Тогда

$$\underline{M}[\xi] = \inf_{\alpha\in[0,1]} \sum_{i=1}^{m} (\alpha P_1\{y_i\} + (1-\alpha)P_2\{y_i\})\, y_i =$$

$$= \inf_{\alpha\in[0,1]} (\alpha M[\xi_1] + (1-\alpha)M[\xi_2]) = \min\{M[\xi_1], M[\xi_2]\} .$$

Утверждение доказано.

Следствие. *Пусть нечеткая величина ξ описывается семейством вероятностных мер*

$$\Xi = \left\{P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \,\Big|\, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0\right\}.$$

Введем также в рассмотрение случайные величины ξ_i , *описываемые вероятностными распределениями* P_i,*тогда*
$\underline{M}[\xi] = \min\limits_{i=1,\dots,k}\{M[\xi_i]\}$.

Утверждение 7. *Пусть нечеткая величина ξ описывается семейством вероятностных мер* $\Xi = \{P = (\alpha + 0,5)P_1 + (0,5 - \alpha)P_2 \,|\, |\alpha| \leqslant 0,5\}$.
Введем также в рассмотрение случайные величины ξ_i, *описываемые вероятностными распределениями* P_i, *тогда*

1) $\overline{D}[\xi] = \max\{D[\xi_1], D[\xi_2]\}$, *если* $|D[\xi_1] - D[\xi_2]| \geqslant (M[\xi_1] - M[\xi_2])^2$;

2) $\overline{D}[\xi] = \dfrac{(D[\xi_1] - D[\xi_2])^2}{4(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2} + \frac{1}{4}(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2 + \frac{1}{2}(D[\xi_1] + D[\xi_2])$,

в противном случае.

Доказательство. По определению $\overline{D}[\xi] = \sup\limits_{\alpha\in[-0.5,0.5]} Q(\alpha)$, где

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \left((\alpha + 0,5)P_1\{y_i\} + (-\alpha + 0.5)P_2\{y_i\}\right) y_i^2 =$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{m} \left((\alpha + 0,5)P_1\{y_i\} + (-\alpha + 0.5)P_2\{y_i\}\right) y_i\right]^2 .$$

Упрощая *Q*(α)*,* получим

$$Q(\alpha) = -\alpha^2 \left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2 + \alpha \left(D[\xi_1] - D[\xi_2]\right) +$$

$$+0,5 \left(D[\xi_1] - D[\xi_2]\right) + 0,25 \left(M[\xi_1] + M[\xi_2]\right)^2 .$$

Ясно, что многочлен *Q*(α*)* в точке

$$\alpha = \frac{D[\xi_1] - D[\xi_2]}{2 \left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2}$$

имеет максимум. Учитывая ограничения, накладываемые на α*,* и подставляя α в выражение для *Q*(α*),* легко проверить справедливость утверждения.

Формулу утверждения 7 можно упростить следующим образом.

Следствие утверждения 7. *Пусть выполняются условия, указанные в утверждении 7, причем* $D[\xi_1] \geqslant D[\xi_2]$, *тогда*

$$D[\xi] = 0,25 \,(k-1)^2 \left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2 + D[\xi_1],$$

где

$$k = \min \left\{ \frac{D[\xi_1] - D[\xi_2]}{\left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2},\ 1 \right\}.$$

Рассмотрим, как находить точные нижние и верхние оценки математического ожидания, если нечеткая величина описывается 2-монотонной мерой. Для этого воспользуемся следующей вспомогательной леммой.

Лемма 6. *Пусть f(x) неотрицательная измеримая (интегрируемая) функция на вероятностном пространстве* $(X, P, \mathfrak{A})$, *причем* $h = \sup_{x \in X} f(x)$. *Тогда*

$$\int_X f(x) dP(x) = \int_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha. \quad (7)$$

где $F(\alpha) = \{x \in X | f(x) > \alpha\}$.

Доказательство. Докажем эту лемму вначале для простых измеримых функций. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$- это конечное множество значений, которое принимает простая измеримая функция, $A_i = \{x \in X | f(x) = \alpha_i\}$. Тогда согласно определению интеграла по Лебегу $\int\limits_X f(x)dP(x) = \sum\limits_{i=1} \alpha_i P\{A_i\}$.Пусть $\alpha_0 = 0$, тогда

$\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} P\{F(\alpha)\}\, d\alpha$. В последнем выражении

$P\{F(\alpha)\} = P\{F(\alpha_i)\}$ при $\alpha \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. Поэтому

$$\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha = \sum_{i=1}^{m} P\{F(\alpha_i)\}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} P\{F(\alpha_i)\}\alpha_i - \sum_{i=0}^{m-1} P\{F(\alpha_{i+1})\}\alpha_i =$$

$$= P\{F(\alpha_m)\}\alpha_m + \sum_{i=1}^{m}(P\{F(\alpha_i)\} - P\{F(\alpha_{i+1})\})\alpha_i - P\{F(\alpha_1)\}\alpha_0.$$

Поскольку $P\{F(\alpha_m)\} = P\{A_m\}$, $F(\alpha_i) \backslash F(\alpha_{i+1}) = A_i$ и $\alpha_0 = 0$, в результате получаем: $\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} P\{A_i\}\alpha_i$, т.е. формула (7) истинна для случая простых измеримых функций.

Рассмотрим общий случай. Пусть *f(x)* - интегрируемая функция, тогда существует последовательность простых измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, что $f_n(x) \leqslant f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, и $\int\limits_X f(x)dP(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dP(x)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha)$, где $F_n(\alpha) = \{x \in X | f_n(x) > \alpha\}$. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)dP(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)dP(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^h P\{F_n(\alpha)\}\, d\alpha = \int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha.$$

Лемма доказана.

Теорема 10. *Пусть $\xi(\omega)$ - неотрицательная нечеткая величина, заданная на конечном нечетком пространстве (Ω, μ) и μ 2-монотонная мера. Тогда*

$$\underline{M}[\xi] = \int\limits_0^h \mu\{F(\alpha)\}\, d\alpha. \quad (8)$$

где $h = \max\limits_{\omega\in\Omega} \xi(\omega)$ и $F(\alpha) = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > \alpha\}$.

Доказательство. Данная теорема легко следует из леммы 6. Действительно, по определению $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P\in\Xi}\int\limits_{\Omega}\xi(\omega)dP(\omega)$, или.

используя лемму 6, $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P\in\Xi}\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\,d\alpha$. По условию для любой вероятносшой меры $P\in\Xi$, $P\geqslant\mu$, поэтому

$$\underline{M}[\xi]\geqslant\int\limits_0^h\mu\{F(\alpha)\}\,d\alpha.$$

Кроме того, поскольку нечеткая мера μ, является 2-монотоиной и множества *F(α)* линейно упорядочены отношением включения, т.е. $F(\alpha_1)\supseteq F(\alpha_2)$, если $\alpha_1 < \alpha_2$, то найдется вероятностная мера P, $P\geqslant\mu$, что $P\{F(\alpha)\} = \mu\{F(\alpha)\}$, $\alpha\in[0,1]$, т.е. формула (8) дает точную нижнюю оценку математического ожидания нечеткой величины.

Замечания

1. Формулу (8) можно использовать и для вычисления оценок моментов болеевысокого порядка. В этом случае $h = \max\limits_{\omega\in\Omega}\xi^n(\omega)$ и $F(\alpha) =$

$\{\omega\in\Omega|\xi^n(\omega) > \alpha\}$.

2. Формулу (8) можно применять также и для нечетких величин, описываемых нечеткими мерами, которые называются нижними вероятностями. В этом случае получается неточная нижняя оценка математического ожидания.
3. Пусть μ - это 2-альтернирующая мера, тогда формула (8) дает точную верхнюю оценку математического ожидания нечеткой величины.
4. Замечание 2 также справедливо и для верхних вероятностей.
5. Формула (8) - это ничто иное, как интеграл Шоке по нечеткой мере.

Заключение

В данном исследовании была рассмотрена модель неточных вероятностей, основанная на теории нечетких мер. При этом описание основных базовых понятий, таких, как условная нечеткая мера, принцип обобщения, нечеткая величина, ее характеристики, строилось подобным образом, как и в классической теории вероятностей. Подчеркнем, что в основе данного построения лежат семейства вероятноспных мер, из которых вытекает вероятностная интерпретация нечетких мер, когда мы рассматриваем их в качестве верхних или нижних оценок вероятностей. Возможны и другие варианты построения основных базовых понятий. Например, можно строить условную нечеткую меру, используя в качестве базового следующее выражение $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, т.е. можно пытаться выбирать условную нечеткую меру таким образом, чтобы из условного и безусловного нечеткого распределения можно было бы получить совместное распределение. Такая модель оказывается близкой по характеру к моделям неточных вероятностей второго порядка, и является более подходящей для моделей неточного вероятностного вывода. Другой вариант обобщения рассмотренных понятий связан с рассмотрением аналогичных конструкций в рамках обобщенных точных вероятностей. В этом случае мы должны рассматривать множества не вероятностных мер. а ненормированных аддитивных мер и числовые характеристики нечетких величин следует рассчитывать по множеству $\Xi = \{P | P \geqslant g_Y\}$ ненормированных аддитивных мер *P*, которые мажорируют сверху обобщенную точную нижнюю вероятность g_Y. Это позволит расширить полученные результаты на более широкий класс нижних вероятностей. Дальнейшие обобщения данных понятий на все множество нечетких мер может проводиться, например, за счет использования требования монотонности, как это делается, например, при определении условных монотонных мер. За пределами данного исследования осталось много других важных проблем. Как, например, определить независимость или декартово произведение нечетких мер? Как отмечалось выше, данные проблемы также пока еще не имеют однозначного решения. Авторы данного раздела склоняются к следующему определению декартового произведения.

Пусть g_X, g_Y - точные нижние вероятности, определенные на конечных алгебрах $\mathfrak{A}_X$ и $\mathfrak{A}_Y$ конечных пространств *X* и *Y*. тогда декартово произведение $g_X \times g_Y$ на алгебре $\mathfrak{A}_X \times \mathfrak{A}_Y$ можно определить по формуле:

$$g_X \times g_Y = \bigwedge_{P_X \in \Xi_X, P_Y \in \Xi_Y} P_X \times P_Y,$$

Где $\Xi_X = \{P_X | P_X \geqslant g_X\}$, $\Xi_Y = \{P_Y | P_Y \geqslant g_Y\}$. Данное определение легко распространяется на обобщенные точные нижние вероятности. Другие обобщения также могут проводиться с помощью требования монотонности.

Дальнейшие исследования могут также проводиться и по практическому использованию предложенных конструкций в интервальных статистических моделях, в распознавании образов, приближенных рассуждениях. Следует подчеркнуть, что многие модели приближенных рассуждений, основанные на теории возможностей, можно обосновать в рамках понятий нижней (верхней) вероятности.

8. Представление нечетких данных на основе теории меры

8.1. Определение и основные свойства нечеткой меры

Нечеткая мера может рассматриваться как обобщение понятия вероятностной меры, свободное от ряда ограничений.
Как известно, мерой называется функция множества $m: P(x) \to R$ удовлетворяющаяследующим трем аксиомам:

1) $A \subseteq X \Rightarrow m(A) \geq 0$;
2) $m(\varnothing) = 0$;
3) $A, B \in P(X)$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) =$
$m(B) + m(A) - m(B \cap A)$.

Здесь P *(X)* - множество всех подмножеств *X, R* - множество действительных чисел. При *R* = [01] эти аксиомы определяют вероятностную меру. В отличии от вероятностной меры, рассматриваемая нами в дальнейшем, нечеткая мера свободна от весьма ограничительного требования аддитивности. Приведем соответствующее определение нечеткой меры.

Определение 8.1. Нечеткой мерой, заданной на пространстве (X, B), где *B* - σ- алгебра для X, называется не аддитивная функция множества $g(\cdot): \ B \to [01]$ удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $g(\varnothing) = 0$, $g(X) = 1$. (ограниченности);
2) Если $A, B \in B$ и $A \subseteq B$, то $g(A) \leq g(B)$ (монотонности);
3) Если $F_n \in B$, $n = \overline{1,N}$, $\{F_n\}$ - является монотонной последовательностью множеств (возрастающая или убывающая), то $\lim_{n\to\infty} g(F_n) = g(\lim_{n\to\infty} F_n)$ (непрерывности).

Тройка (X, *B,* g) - называется пространством с нечеткой мерой. В ибщем случае для нечеткой меры не должно выполняться условие аддитивности:

$$g(A \cup B) \neq g(A) + g(B), \quad A, B \in \mathcal{B}, \; A \cap B = \varnothing.$$

Нечеткую меру $g(\cdot)$ можно рассматривать как однопараметрическое расширение вероятностной меры. С семантической точки зрения выражение g(A) представляет собой меру, характеризующую степень нечеткости события А, то есть оценку нечеткости суждения "$x \in A$". Непосредственно из аксиомы монотонности вытекают следующие неравенства, характеризующие объединение и пересечение множеств:

$$g(A \cup B) \geq \max(g(A), g(B)), \quad (8.1)$$
$$g(A \cap B) \leq \min(g(A), g(B)).$$

Предельным случаем (1) для нечетких мер оказываются функции множества удовлетворяющие выражениям:

$$Poss(A \cup B) = \max(Poss(A), Poss(B)),$$
$$Ness(A \cap B) = \min(Ness(A), Ness(B)), \quad \textbf{(8.2) - (8.3)}$$

где Poss (possibility) - мера возможности, а Ness (nessesary) - мера необходимости.

По аналогии с функцией распределения вероятности (если X = R) меру $g(\cdot)$ можно определить с помощью непрерывной функции, ювлетворяющей следующим свойствам:

1) Если $x \leq y$, то $h(x) \leq h(y)$, $x, y \in R$;

2) $\lim\limits_{x \to a} h(x) = h(a)$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

Функция h(x) называется нечеткой функцией распределения. Значения g(x) нечеткой меры, определенные на одноточечных подмножествах $x \in X$ называются плотностью нечеткой меры.

8.2. Построение нечетких мер

Вопросу построения и представления нечетких мер посвящено большое количество работ. Однако, наиболее стройным построением нечетких мер можно считать построение на основе функции меры фокальных элементов.

Определение 8.2. Функцией меры фокальных элементов называется функция определенная на подмножествах E_p, $p = \overline{1,N}$; $E_p \subseteq X$ называемых фокальными элементами и удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{p=\overline{1,N}} m(E_p) = 1; \quad (8.4)$$

$$\forall p, \quad m(E_p) > 0.$$

Величина $m(E_p)$ понимается как значение вероятности совокупности элементарных событий, составляющих E_p, причем здесь не оговаривается распределение величины $m(E_p)$ по элементарным событиям. Подмножества E_p, $p=1,\bar{N}$, называются "фокальными элементами" и могут отражать неточность наблюдений. Семантически величина $m(E_p)$ выражает степень уверенности, отнесенную к множеству A в целом.

На основе функции

$m(\cdot): P(x) \to [01]$

могут быть построены различные нечеткие меры.

Определение 8.3. Мерой доверия (belief measure) называется функция множества $Bel(\cdot): 2^X \to [01]$, определяемая по распределению уверенности $m(\cdot)$ как:

$$Bel(A) = \sum_{E_p \subseteq A} m(E_p) \quad (8.5)$$

и удовлетворяющая следующим свойствам:

а) $Bel(\varnothing) = 0$, $Bel(X) = 1$

б) $\forall A_1, \ldots, A_n \subseteq X, n > 0$

$$Bel(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \geq \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ I \neq \varnothing}} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right), \quad (8.6)$$

где$|I|$ - мощность множества I (индексной последовательности).

Дли двух множеств A, B $\subseteq$ X имеем:

$$Bel(A \bigcup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \bigcap B) \quad (8.7)$$

Функция Bel семантически определяет тот факт, что степень доверия к высказыванию A (A $\neq \varnothing$), которое является истинным, не обязательно равна 1. Это доказывает, что существует некоторое доверие к высказыванию A определяемое внешними или внутренними факторами. В то же время, отсюда следует, что сумма степеней доверия к событию A и его отрицанию $\overline{A}$ также не обязательно равна 1, а может быть либо равной, либо меньше 1. Из (8.5) вытекает:

$$\forall A \subseteq X: Bel(A) + Bel(\bar{A}) = 1 - \sum_{\substack{E_p \not\subseteq A \\ E_p \not\subseteq A}} m(E_p) \in [01] \qquad \textbf{(8.8)}$$

В ряде работ показано, что если множество фокальных элементов $\{E_p\}$ образует последовательность вложенных подмножеств, т.е. если $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_N$, то функция доверия Be1(A) может трактоваться как нечеткая мера необходимости.

Определение 8.4. Мера доверия удовлетворяющая свойствам (8.6) и свойству (8.3) называется нечеткой мерой необходимости. (Ness (•)). При этом выполняются условия:

$$\min [\mathrm{Ness}(A), \mathrm{Ness}(\bar{A})] = 0, \qquad (8.9)$$

$$\forall A,B \subseteq X, \mathrm{Ness}(A \bigcup B) > \max [\mathrm{Ness}(A), \mathrm{Ness}(B)]. \qquad (8.10)$$

Мера необходимости Ness(A) определяется фокальными элементами, образующими вложенную последовательность подмножеств X, которые делают необходимым появление события A (влекут за собой событие A).

Определение 8.5. Нечеткой мерой правдоподобия (plausibility measure) называется функция множества $\mathrm{Pl}(\cdot)$: $2^X \to [01]$, определяемая по распределению уверенности $m(\cdot)$ как:

$$\forall A \subseteq X, \mathrm{Pl}(A) = \sum_{E_p \cap A \neq \varnothing} m(E_p) \qquad (8.11)$$

и удовлетворяющая следующим свойствам:

а) $\mathrm{Pl}(\varnothing), \mathrm{Pl}(X) = 1;$

б) $\forall A_1, \ldots, A_n \subseteq X, n > 0,$

$$Pl(A_1 \bigcap .. \bigcap A_n) \leq \sum_{\varnothing \neq I \subseteq \{1..n\}} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i \in I} A_i) \qquad (8.12)$$

Для двух множеств A, B $\subseteq$ X выполняется:

$$Pl(A \cap B) \leq Pl(A) + Pl(B).$$

Мера $\mathrm{Pl}(\cdot)$ выражает степень правдоподобности события $A \subseteq X$, которая может быть и больше, чем 0 даже в случае ложности высказывания A. Между мерами доверия и правдоподобия существует двойственная связь, определяемая следующими соотношениями:

$$Pl(A) + Bel(\bar{A}) = 1. \qquad (8.13)$$

$$\forall A, B \subseteq X, Pl(A) \geq Bel(A).$$

В том случае, когда множество фокальных элементов является вложенной последовательностью подмножеств, нечеткая мера правдоподобия определяет нечеткую меру возможности.

Определение 8.6. Нечеткой мерой возможности называется функция множества, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\text{а) } Poss(\varnothing) = 0,\ Poss(X) = 1.$$

$$\text{б) } \forall i \in I,\ A_i \subseteq X,\ Poss\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup_{i \in I} Poss(A_i), \quad (8.14)$$

где I - множество натуральных чисел.

В случае вложенности множества фокальных элементов нечеткая мера возможности может быть определена с помощью распределения возможности $\pi(x)\colon X \to [01]$ (плотности нечеткой меры возможности) такой, что

$$\sup_{x \in X} \pi(x) = 1. \quad (8.15)$$

При этом имеем;

$$\forall x \in X,\ \pi(x) = \begin{cases} \sum_{j=i} m(E_j), & x \in E_i, x \notin E_{i-1} \\ 0, & x \in X \setminus E_p \end{cases} \quad (8.16)$$

где $E_i \subseteq E_{i+1}$.

И силу того, что меры возможности являются нечеткими мерами правдоподобия, а необходимости - мерами доверия, то для них справедливо условие двойственности (8.13):

$$\forall A \subseteq X,\ Poss(A) = 1 - Ness(X \setminus A). \quad (8.17)$$

Соотношение (8.17) выражает численное соотношение двойственности между семантическими модальностями "возможно" и "необходимо" (в модальной логике), постулирующее тот факт, что некоторое событие необходимо, когда противоположное событие невозможно. В силу этого всегда можно построить меру необходимости исходя из распределения плотности нечеткой меры возможности с помощью формулы:

$$Ness(A) = \inf\{1 - \pi(x) \mid x \notin A\} \quad (8.18)$$

С точки зрения теории нечеткой меры возможно и представление нечетких множеств, нашедших широкое применение в прикладной математике для описания сложно формализуемых объектов и систем. При этом, задание нечеткой меры локализирует значение переменной *x*, выражая для каждого подмножества A $\subseteq$ X имеющуюся информацию об отношении x $\subseteq$ A. Семейство подмножеств, подходящих для представления переменной x $\subseteq$ X, будет индуцировать обобщенную характеристическую функцию нечеткого множества. При этом данное представление строго эквивалентно представлению через функцию принадлежности $\mu(x)$: $X \to [01]$ в случае использования нечетких мер возможности. Нечеткое множество, в этом случае, рпссматривается как "след" меры возможности на одноточечных множествах в X. Если E $\subseteq$ X достоверное событие, то легко определить функцию П со значениями {0,1}, удовлетворяющую условию (8.2) вида:

$$\Pi_E(A) = \begin{cases} 1, & A \cap E \neq \varnothing; \\ 0, & A \cap E = \varnothing; \end{cases} \quad (8.19)$$

В этом контексте $\Pi_E(A) = 1$ означает, что событие A возможно, а следовательно функция $\Pi(\cdot) = \mathrm{Poss}(\cdot)$. Если мера возможности принимает значения в единичном интервале, то функцию плотности нечеткой меры возможности $\pi(x)$, определенную на одноточечных подмножествах X, можно интерпретировать, как функцию принадлежности четкого множества F, рассматриваемого как достоверное событие, на котором сосредоточена мера Poss(·). Действительно, обозначая *F(X)* множество нечетких подмножеств универсума X, имеем:

$$\forall\, \mathrm{Poss}(\cdot), \exists\, F \in \boldsymbol{F}(X), \forall x \in X,\ \mathrm{Poss}(\{x\}) = \pi(x) = \mu_x(x). \quad (8.20)$$

В то же время, задание нечеткого множества достаточно для описания функции плотности нечеткой меры возможности при условии, что это нечеткое множество нормально, то есть $\exists\, x \in X,\ \mu_F(x) = 1$.

Если же считать, что условие Poss (x) = 1 может не выполняться, то имеем:

$$\forall F \in \boldsymbol{F}(X), \exists\, \mathrm{Poss}(\cdot), \forall x \in X,\ \mathrm{Poss}(\{x\}) = \pi(x) = \mu_x(x). \quad (8.21)$$

Величина $\mathrm{Poss}(x) = \sup \mu_x(x)$ называется высотой нечеткого множества F и обозначается hgt (μ). Легко видеть, что при определении функции плотности нечеткой меры по мере фокальных элементов m(·) сами фокальные элементы образуют семейство

$$C(F) = \{F_\alpha \mid F_\alpha = [x \in X \mid \mu_F(x) \geq \alpha \in [01]]\} \quad (8.22)$$

α- срезов нечеткого множества F. (Множество F_α содержит все элементы из X, для которых уровень совместимости F не меньше $\alpha \in [01]$).

Семейство C(F) всех α -срезов есть монотонная последовательность множеств, удовлетворяющая условию:

$$\alpha, \beta \in [0,1],\ 0 < \alpha \leq \beta \leq 1 \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta \quad (8.23)$$

Тогда, если F_α совпадают с фокальными элементами E_P (определение 8.2) имеем:

$$E_P = F_{\alpha p}, \quad \text{где} \quad \alpha_p = \sum_{j=p...N} m(E_j) \tag{8.24}$$

тогда: $\forall x \in X$,

$$\mu_F(x) = \sum_{p,\, x \in F_{\alpha p}} m(F_{\alpha p}) \tag{8.25}$$

Это так называемый "вероятностный способ" представления нечеткого множества.

Для представления четких данных, по которым имеется полная унеренность в их значении, может использоваться примитивный класс мер, а именно, меры Дирака.

Определение 8.7. Мера Дирака есть функция множества, определяемая соотношением:

$$\forall A \subseteq X,$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A; \\ 0, & x_0 \notin A;, \end{cases} \tag{8.26}$$

где x_0 - заданный элемент в X, на котором сосредоточена мера Дирака. Как видно из определения мера Дирака есть частный случай вероятностной меры, соответствующий детерминированной ситуации (меры полной уверенности).

Некоторые наиболее существенные соотношения нечетких мер, рассмотренные ранее, приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Соотношения нечетких мер.

№	Условие	Соотношения
1.	$\forall A \subseteq X$	$Pl(A) + Bel(\bar{A}) = 1.$
2.	$\forall A \subseteq X$ $x_i \notin A$,	$Pos(A) = 1 - Nes(X \setminus A)$ $Nes(A) = \inf(1 - Pos(\{x\}))$
3.	$\forall A \subseteq X$	$Pos(A) \geq Pl(A) \geq Bel(A) \geq Nes(A)$
4.	$\forall Pos(\cdot)$, $\exists F \in \mathcal{F}(X)$, $\forall x \in X$,	$Pos(\{x\}) = \mu_F(x).$ $\sup_{x \in X} Pos(\{x\}) = 1.$

И заключение пункта продемонстрируем возможность представления нечетких данных для решения аналитических задач поддержки принятия решений на основе нечетких мер на простом примере экспертной лингвистической оценки риска при реализации некоторого инвестиционного проекта.

Пример 8.1.

Пусть оценка риска оценивается лингвистически на множестве возможных значений: D = <1 -риск отсутствует, 2 - минимальный риск, 3 - допустимый, 4 - критический, 5 - недопустимый, 6 - неизвестно, является ли это риском>. В табл. 8.2 приведены варианты формализации нечетких данных при решении задачи оценки уровня риска реализации проекта.

Таблица 8.2

Пример формализации нечетких данных

№	Описание нечетких данных	Представление нечетких данных на основе НМ
1	Неизвестно есть ли риск или нет, но если он есть, то неизвестно какой величины.	$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \mu(\cdot) = Poss(\cdot); \\ \lambda \in [01], & \mu(\cdot) = Pl(\cdot), Bel(\cdot); \\ 0, & \mu(\cdot) = Ness(\cdot). \end{cases}$
2	Вполне возможно, что риска нет, тем не менее есть возможность λ, что риск есть и он оценивается не выше критического.	$\mu(d) = \begin{cases} \lambda, & d < 3; \\ 0, & d \geq 3; \\ 1, & d = 6. \end{cases}$
3	Есть полная уверенность, что риска нет.	$\mu(d) = \begin{cases} 0, & d \in D \setminus \{6\}; \\ 1, & d = 6. \end{cases}$

№	Описание нечетких данных	Представление нечетких данных на основе НМ
4	Вполне правдоподобно, что есть риск и достаточно высокого уровня, но имеется и не нулевая возможность λ, что эта риска нет	$\mu(d) = \begin{cases} Pl, & d \in D \setminus \{6\}; \\ \lambda, & d = 6. \end{cases}$ Pl - распределение меры правдоподобия для понятия «риск высокого уровня»
5	Есть полная уверенность, что риск есть, но тяжело оценить его значение.	$\mu(d) = \begin{cases} 1, & \mu(\cdot) = Poss(\cdot),\ d \neq 6; \\ \lambda \in [01], & \mu(\cdot) = Pl(\cdot), Bel(\cdot),\ d \neq 6; \\ 0, & \mu(\cdot) = Ness(\cdot) \vee (d = 6). \end{cases}$
6	Полная уверенность, что риск есть, и неполная информация о его значении. Однако известно, что значение риска от минимального до допустимого.	$\mu(d) = \begin{cases} 1, & d \in [2,3]; \\ 0, & d \notin [2,3]; \\ 0, & d = 6. \end{cases}$
7	Полная уверенность, что риск есть и нечетко известно, что он небольшого размера.	$\mu(d) = \begin{cases} \varphi(d), & d \in D \setminus \{6\}; \\ 0, & d = 6. \end{cases}$ φ(d) - распределение нечеткости для понятия «риск небольшого размера», рис. 2.1.
8	Полная уверенность, что есть допустимый риск.	$\mu(d) = \begin{cases} 0, & d \in D \setminus \{3\}; \\ 1, & d = 3. \end{cases}$

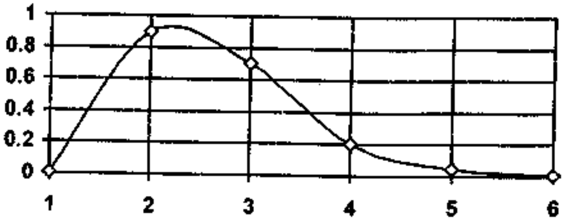


Рисунок 8.1. Распределение нечеткой меры оценки уровня риска понятия «риск небольшого размера».

Очевидно, что приведенные в табл. 8.2. примеры формализации нечетких данных не ограничивают всего спектра возможностей подхода на основе нечетких мер. При необходимости в каждой конкретной аналитической задаче могут использоваться индивидуальные, наиболее подходящие варианты формализации нечетких данных.

Приведенные определение и основные свойства нечеткой меры позволяют констатировать, что использование формализма нечетких мер дает возможность описать более широкий спектр разнородных, плохо определенных данных, эффективно учесть различные семантические модальности информации о событиях, более адекватно описать реальные аналитические задачи поддержки принятия решения. В частности, нечеткие множества и вероятностная мера могут рассматриваться как частный случай нечетких мер.

8.3. g_λ - меры Суджено и их свойства

При решении практических задач нашли широкое распространение различные конструкции нечетких мер, удовлетворяющие свойствам определения 8.1. Однако, наиболее широкое распространение нашли так называемые g_λ - нечеткие меры введенные в рассмотрение в М. Суджено (M. Sugeno).

Для построения g_λ - мер используется следующее λ - правило:

$$\forall A, B \subseteq X, A \cap B = \varnothing,$$

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda \cdot g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B), \lambda \in [-1, +\infty[. \quad (8.27)$$

В случае, когда $A \cup B = X$ и $g_\lambda(A \cup B) = 1$ условие (8.27) является словием нормировки g_λ - меры. Исходя из условия нормировки g_λ - меры можно определить меру дополнения $\bar{A} = X \setminus A, \quad A \subseteq X$, согласно выражения:

$$g_\lambda(\bar{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda \cdot g_\lambda(A)}; \quad (8.28),$$

Формула (8.28) определяет класс λ-дополнений Суджено, определяемый генератором отрицания (монотонно возрастающий функцией) $t: [01] \to R^+, t(0) = 0,$ такой, что $c(g) = t^{-1}(t(1) - t(g))$ вида

$$t_\lambda(g) = \frac{1}{\lambda}\ln(1 + \lambda g). \quad (8.29)$$

Все рассматриваемые g_λ -нечеткие меры в зависимости от параметра нормировки λ могут быть разбиты на классы:

1) супераддитивных нечетких мер ($\lambda > 0$);

2) субаддитивных нечетких мер ($-1 < \lambda < 0$);
3) вероятностных мер ($\lambda = 0$).
Для супераддитивных мер справедливо выполнение условия:

$$\forall A, B \subseteq X, A \cap B = \varnothing, \quad g_\lambda(A \cup B) > g_\lambda(A) + g_\lambda(B). \quad (8.30)$$

При этом, если h(x) - есть функция распределения плотности нечеткой меры, для супераддитивных нечетких g_λ - мер, X есть непрерывное пространство, то выполняется и следующее условие:

$$\int_X h(x)dx = N_\lambda < 1, \quad (8.31)$$

где $N_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda), \quad \lambda \in [-1,+\infty[,$

$\int_X$ – интеграл Лебега.

Как нетрудно заметить, что условия (8.30), (8.31) соответствуют условиям (8.6), (8.7), определяющим нечеткие меры доверия (определение 8.3). Отсюда следует, что любая g_λ - нечеткая мера является по семантической модальности нечеткой мерой доверия тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$.

Для субаддитивных нечетких мер условия (8.30), (8.31) принимают следующий вид:

$$\forall A, B \subseteq X, A \cap B = \varnothing, \quad g_\lambda(A \cup B) < g_\lambda(A) + g_\lambda(B), \quad (8.32).$$

$$\int_X h(x)dx = N_\lambda > 1. \quad (8.33)$$

В этом случае выполняются условия (8.12) определения 8.5, определяющего нечеткую меру правдоподобия. Следовательно, по аналогии с нечеткими мерами доверия, любая g_λ - нечеткая мера является нечеткой мерой правдоподобия тогда и только тогда, когда $\lambda \in [-1,0[$. В случае, когда $\lambda = 0$ мы имеем выполнение следующих условий:

1) $\forall A \subseteq X, \quad g_\lambda(A) \in [0 1], g_\lambda(\varnothing) = 0, g_\lambda(X) = 1;$
2) $\forall A_i \subseteq X, \quad i \in N, \forall i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$, то

$$g_\lambda(\bigcup_{i\in N} A_i) = \sum_{i\in N} g_\lambda(A_i), \quad (2.34)$$

которые соответствуют аксиомам, определяющим вероятностную меру.

В табл. 8.3 приведены классификация нечетких мер, их определения по фокальным элементам, рассмотренные ранее, а также наиболее характерные зависимости, условия нормировки и соответствующий λ -параметр меры.

Таблица 8.3

Классификация нечетких мер.

№	Класс НМ	Семант. модальн	Определение по фокал. элемент.	Характерные зависимости	Условия нормировки	Значен λ
1	Супер аддитивные	доверие (belief)	$Bel(A)=\sum_{E_p\subseteq A} m(E_p)$	$Bel(A\cup B)\geq Bel(A)+$ $+Bel(B)-Bel(A\cap B)$	$Bel(A)+Bel(\bar{A})=$ $=1-\sum_{\substack{E_p\not\subseteq A\\ E_p\not\subseteq \bar{A}}} m(E_p)$. $\int_X h(x)dx=N_\lambda<1$	$\lambda\geq 0$
2		необходимость (nessesary)	анологично Bel; $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_N$	$Nes(A\cup B)>$ $>Nes(A)\vee Nes(B)$. $Nes(A\cap B)=$ $=Nes(A)\wedge Nes(B)$,	$Nes(A)\wedge$ $Nes(\bar{A})=$ $=0$,	$\lambda>0$
3	Суб аддитивные	правдоподобие (plausebility)	$Pl(A)=$ $\sum_{E_p\cap A\neq\varnothing} m(E_p)$	$Pl(A\cap B)\leq Pl(A)+$ $+Pl(B)$.	$Pl(A)+Pl(\bar{A})>1$. $\int_\delta h(x)dx=N_\lambda>1$	$-1<\lambda<0$
4		возможность (possebility)	анологично Pl; $E_1\subseteq E_2\subseteq\ldots\subseteq E_N$	$Pos(\bigcup_{i\in I} A_i)=$ $=\sup_{i\in I} Pos(A_i)$,	$\sup_i Pos(x_i)=1$	$\lambda=-1$
5	Аддитивные	вероятность (probability)	анологично Bel и Pl; $E_P=\{x_P\}$	$Pr(A\cup B)=Pr(A)+$ $+Pr(B)-Pr(A\cap B)$; $Pr(A\setminus B)=Pr(A)-$ $-Pr(B)$.	$\sum_i Pr(x_i)=1$	$\lambda=0$
6	Дирака	четкость	-	$\forall A\subseteq X$ $\mu(A)=\begin{cases}1, & x_0\in A\\ 0, & x_0\notin A\end{cases}$		Произвольное

Представление нечеткой g_λ - меры зависит от носителя меры - пространства X на котором она задана. Когда X есть конечное множество $X = \{x_i\}$, тогда нечеткая мера g_λ алгебры всех подмножеств $(X, 2^x)$ строится следующим образом.

Пусть $g_x(x_i) = g^i \in [0 1]$, $i = \overline{1, n}$. Тогда условие нормировки будет:

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda g^i)-1\right\}=1, \qquad \lambda\in[-1,+\infty[\tag{8.35}$$

Величина g^i определяет нечеткую меру сосредоточенную на одноточечном множестве $\{x_i\} \subset X$, $i = \overline{1, N}$. и тем самым определяет λ-плотность нечеткой меры по Суджено. Тогда, при любом подмножестве $A \subseteq X$ можно получить удовлетворяющую λ-правилу меру $g_\lambda(A)$ по формуле:

$$g_x(A) = \frac{1}{\lambda}\left\{\prod_{x_i\in A}(1+\lambda g^i)-1\right\} \tag{8.36}$$

Из приведенных выражений следует:

$$g_x(\{x_i\}) = g^i$$
$$g_x(\{x_i, x_j\}) = g^i + g^j + \lambda\ g^i g^j, \tag{8.37}$$

В случае, когда пространство X, изоморфно множеству действительных чисел R можно задать функцию H(x) аналогичную функции распределения вероятности (см. п. 8.1). Тогда с использованием этой функции можно определить нечеткую меру для любого интервала $[a, b] \subseteq X$ следующим образом:

$$g_x([a,b]) = \frac{H(b)-H(a)}{1+\lambda\cdot H(a)}, \quad \forall[a,b]\subseteq X. \tag{8.38}$$

Уравнение (8.38) непосредственно следует из условия λ -правила (8.27). Согласно Суджено функция H(x) называется функцией F-распределения. Для непрерывного X λ -мера подмножества $A \subseteq X$ может быть определена исходя из следующих соотношений. Пусть h(x) есть плотность нечеткой меры на X. Тогда согласно (8.31) имеем:

$$\int_X h(x)dx = \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda\in[-1+\infty[\;.$$

Цели мы определяем меру $g(A)$, $A \subseteq X$,тогда имеем:

$$\int_X h(x)dx = \frac{\ln(1+g_X(A))}{\lambda}.$$

Ныражая из этого равенства g(A) получим:

$$g_x(A) = \frac{1}{\lambda}\left\{e^{\lambda \int\limits_A h(x)dx} - 1\right\}. \quad (8.39)$$

Таким образом для определения g_λ - меры в (8.39) используется интеграл Лебега, то есть λ - нечеткая мера вводится как сумма бесконечного числа интегралов Лебега функции плотности h(x) no A $\subseteq$ X. Следует отметить, что согласно теоремы Лопиталя вероятностный случай входит как частный случай в уравнение (8.39). Дпнное уравнение можно представить в эквивалентной форме:

$$g_X(A) = \left\{(1+\lambda)e^{\rho} - 1\right\}\frac{1}{\lambda}; \quad (8.40)$$

$$g_X(A) = \int\limits_0^{\rho N} \lambda e^{\lambda t} dt; \quad (8.41)$$

$$\rho = \int\limits_A h(x)dx \cdot \left\{\int\limits_X h(x)dx\right\}^{-1}. \quad (8.42)$$

Легко показать, что функция $g_x(\cdot)$ удовлетворяет λ-правилу (8.27). Используя функцию (8.39) можно просмотреть изменение семантической модальности нечеткой меры при изменении λ -параметра. Рассмотрим пример представления неосведомленности

Пример 8.2.

Пусть X = [02]. Неосведомленность с вероятностной точки зрения определяется равномерным распределением: $\forall$ x $\in$ X, ρ (x) = 0,5.

В случае F-плотности, тот же случай неосведомленности определяется выражением:

$$\forall\, x \in X, \quad h(x) = \frac{\ln(1+\lambda)}{2\lambda}$$

Рассмотрим событие W $\subseteq$ X, W = [01]. Тогда вероятность события W будет:

$$P(W) = \int\limits_0^1 \rho(x)dx = 0,5.$$

Для нечеткого случая имеем:

$$g_X(W) = \frac{1}{\lambda}\left\{e^{\lambda\int_0^1 \frac{\ln(1+\lambda)}{2\lambda}} - 1\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}+1}$$

Аналогичное выражение получаем для события Ω = [1,2]. Тогда, мы можем получить зависимости распределения нечетких мер для случая отсутствия сведений (рис. 8.2).

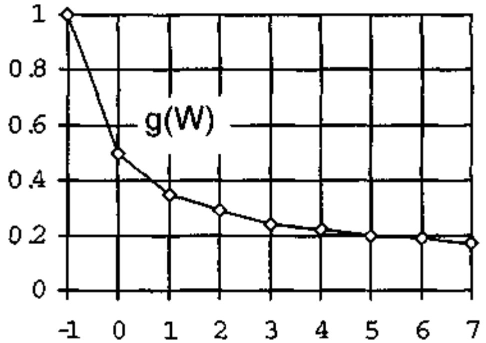


Рис. 8.2. Зависимость нечеткой меры от λ.

Из анализа зависимости рис. 8.2. можно сказать следующее. Возможность того, что W ∈ [01] равна 1; вероятность того, что W∈ [01], равна 0.5, и необходимость того, что W ∈ [01] равна 0. Эти результаты интуитивно совершенно понятны.

Обобщая полученные в примере 8.2 результаты можно отметить, что для фиксированного события W ⊆ X функция

$$g_x(W) = sem_W(\lambda), \quad (8.43)$$

где $sem_W(\lambda):[-1,+\infty[\to[01]$, определяет зависимость значения нечеткой меры от семантической модальности события W ⊆ X.

Определение 8.8. Функция $sem_W(\lambda):[-1,+\infty[\to[01]$, определяющая для фиксированного λ значения нечеткой меры g(W) события W ⊆ X „ называется семантическим спектром события W ⊆ X. Функция $sem_W(\lambda)$ есть функция не возрастающая для любого $W \subseteq X$

Построение, исследование и практическое применение зависимостей семантической модальности g_λ - нечетких мер для семантического спектра события W ⊆ X , является одним из наиболее интересных направлений исследования нечетких мер и их применения. Использование введенных понятий в реальных системах поддержки принятия решений раскрывает широкие горизонты для более полного учета субъективных особенностей процессов принятия решений.

Таким образом, одним из достаточно эффективных способов моделирования нечетких мер можно считать применение g_λ - мер Суджено, строящихся на основе λ - правила. Использование алгоритмов построения g_λ - нечетких мер как для дискретного, так и для непрерывного пространства *X* позволяют сделать эффективные расчетные процедуры для прикладного программного обеспечения при решении практических задач поддержки принятия решений в сложных динамических системах.

8.4. Нечеткозначные нечеткие меры и их связь с семантическими модальностями

Аналогично тому, как для нечетких множеств существует обобщение функций принадлежности для их области определения можно рассмотреть некоторое обобщение и для нечетких мер.
Рассмотрим пространство *X*. Пусть *F(x)* определяет множество всех возможных распределений нечетких g_λ- мер на *X*, т.е.:

$$F(X) = \left\{ g_x(\cdot) \middle| g_x(\cdot): 2^X \to [01] \right\}. \qquad (8.44)$$

Для любой нечеткой меры $g_x \ (\cdot)$ соответствует плотность распределения нечеткой меры $g(x) : X \to [01]$.Тогда можем переписать 8.44 в виде:

$$F(X) = \left\{ g(x) \middle| g(x): X \to [01], \forall x \in X \right\} \qquad (8.45)$$

Нечеткозначная мера или нечеткая мера типа 2 может быть задана рекурсивно следующим образом:

$$F^0 \ (X) = X;$$
$$F^1 \ (X) = F\,(F^0 \ (X)) = F\,(X);$$
$$F^2 \ (X) = F(F^1 \ (X)) = \{g^2 \ (x) \mid g^2 \ (x) : F\,(X) \to [01]\}. \qquad (8.46)$$

Нечеткая мера типа 2 может быть интерпретирована как нечеткое высказывание вида "W есть μ, есть λ", т.е. событие W имеет нечеткую меру μ с истинностью λ.
Практически, для фиксированного значения $x \in X$ нечеткая мера $g^2(X)$ задаем распределение плотности нечеткой меры на единичном интервале L = [01]. Графически это представляется в виде (рис.8.3).

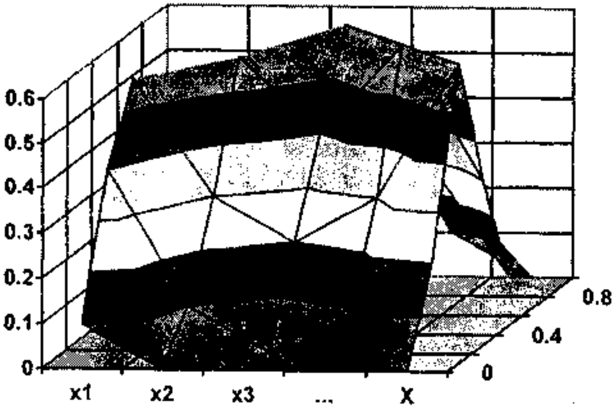


Рис. 8.2 . Распределение нечеткой меры типа 2.

Нечеткая мера на L для каждого x $\in$ X может быть интерпретирована как условная нечеткая мера вида

$$g_L^x(\cdot) = G_L(\cdot|X):2^L \to [01];$$

где 2^L - булеан единичного интервала L = [01]. Если для каждого $x \in X$ поставить в соответствие интервал A(x) = [0,r(x)] $\subseteq$ [01], такой, что $r \in [01]$, $r = g_L(A(x)|x) : X \to [01]$- есть распределение плотности нечеткой меры $g^2(X)$ при фиксированной степени истинности r $\in$ [01]. Обозначим значение нечеткой меры события $W \subseteq X$ при уровне истинности r $\in$ [01] как $g_r^2(W)$: $2^X \to [01]$. Мера $g_r^2(W)$ события $W \subseteq X$ есть неубывающая функция степени истинности r $\in$ [01]. В силу того, что нечеткая мера определенная на L = [01] для фиксированного $x \in X$ ехть функция не убывающая, то с увеличением r значение плотности нечеткой меры на x $g_L(A(x)|x)$ будет увеличиваться. Это равносильно тому, что значение λ параметра нечеткой меры $g_r(x)$ будет уменьшаться, что соответствует переходу к мерам правдоподобия (возможности) события. Физически это означает следующее: Истинность того, что мы определяем достоверно возможность события выше чем определение необходимости события в силу того, что определение возможности менее "обременительно", чем определение необходимости события.

Таким образом, мы получаем некоторую зависимость функции $g_r^2(W)$ и $sem_w(\lambda)$. То есть нечеткозначные нечеткие меры (нечеткие меры типа 2) могут быть определены для каждого события W своим

семантическим спектром $sem_w(\lambda)$ в случае определения функции
$f_w(r): \ [01] \to [-1,+\infty[$.

8.5. Идентификация и аппроксимация g_λ - нечетких мер

Для решения практических задач и дальнейшего использования в различного рода алгоритмах обработки нечеткой и слабо сруктурированной информации очень важным является идентификация нечеткой меры. Предлагается следующий подход к идентификации нечеткой меры. Предполагается, что эксперимент должен дать оценки степени важности всех подмножеств из пространства X. При этом необходимо иметь субъективные оценки *d* такие, что $d \ : \ 2^X \to [01]$. Тогда идентификация нечеткой меры заключается в минимизации функционала вида:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{|2^X|}\sum_{E \in 2^X}(d_X(E) - g_{\lambda X}(E))^2}, \qquad (8.47)$$

где $|2^X| = Card\ 2^X$ - мощность множества 2^X, а $g_{\lambda X}(E)$ - вычисляется по известной формуле для нечетких g_λ - мер для подмножества $E \subseteq X$. Результатом решения задачи идентификации является значение параметра λ и нечетких плотностей $g_{x1}, g_{x2}, \ldots g_{xn}, n = Card\ X$.

Однако, у данного подхода к идентификации нечеткой g_λ - меры существует ряд недостатков:

1. Этот подход может быть использован лишь при не большой мощности пространства *X*, иначе процедура оптимизации функционала (8.47) оказывается весьма сложной.
2. С практической точки зрения при большом *Card X* значительно осложняется процедура выявления знаний у эксперта относительно субъективных оценок подмножеств из 2^X.

Таким образом, в реальных задачах использование этого метода оказывается затруднительным.

Однако, использование свойств g_λ - меры позволяет упростить процедуру ее идентификации по ответам экспертов (их субъективным оценкам). Рассмотрим следующий подход к идентификации нечеткой g_λ - меры.

Разобьем пространство *X* на три подмножества $\{A_i\}, i = \overline{1.3}$ таким образом чтобы $A_i \cap A_j = \varnothing, \quad \bigcup_i A_i = X, \quad A_i \neq A_j, i \neq j$. Обозначим меру подмножества A_i как g_i . Эксперту предлагается оценить степень предпочтения A_i над $\overline{A}_i$ (где $\overline{A}_i$ - дополнение к A_i, $\overline{A_i} = X \setminus A_i$), то есть того, что, например, истинное значение нечеткой величины находится в подмножестве A_i, а не $\overline{A}_i$.Тогда из условия нормировки имеем:

$$\begin{cases} g_1 + G_{23} + \lambda g_1 G_{23} = 1; \\ \dfrac{g_1}{G_{23}} = \alpha; \end{cases} \tag{8.48}$$

где G_{23} - мера подмножества $A_2 \bigcup A_3$, а α- степень предпочтения A_i над $A_2 \cup A_3$, $L \in [0,1]$. В данном случае может быть использована обоснованная Т. Саати шкала субъективной оценки предпочтения одного элемента над другим.

Преобразуем (8.48). Из второго уравнения $G_{23} = g_1 \alpha^{-1}$. Представив это выражение в первое уравнение, имеем:

$$\lambda g_1^2 + g_1(1+\alpha) - \alpha = 0 . \tag{8.49}$$

Данное уравнение определяет зависимость меры множества A_i от λ-параметра и субъективной оценки предпочтения. Используя аналогичные рассуждения для подмножества A_2 и определяя экспертное предпочтение A_1 над A_2 в виде $\dfrac{g_1}{g_2} = \gamma$,получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda g_1^2 + g_2(1+\alpha) - \alpha = 0 \\ \lambda g_2^2 + g_2(1+\beta) - \beta = 0 \\ g_1 = \gamma g_2 \end{cases} \tag{8.50}$$

Мы имеем, разрешимую систему уравнений относительно g_1, g_2, λ. В результате решения (8.50) получим:

$$g_2 = \frac{\gamma^2\beta - \alpha}{\gamma^2(\beta+1) - \gamma(\alpha+1)},$$

$$g_1 = \frac{\gamma^2\beta - \alpha}{\gamma(\beta+1) - (\alpha+1)}, \tag{8.51}$$

$$\lambda = \frac{\alpha a^2 - ab(\gamma^2\beta + \alpha) + b^2\gamma^2\beta}{\gamma^2(\gamma^2\beta - \alpha)^2}$$

где

$$a=\gamma^2(\beta+1), \qquad b=\gamma(\alpha+1).$$

Значение меры подмножества A_3 легко находится из условия нормировки:

$$g_3=\frac{1-G_{12}}{1+\lambda G_{12}}; \tag{8.52}$$

где

$$G_{12}=g_1+g_2+\lambda g_1 g_2.$$

Таким образом, в результате обработки трех ответов эксперта относительно парного сравнения указанных выше подмножеств мы имеем возможность определить их меры.

Пример 8.3.

Пусть истинное значение нечетких плотностей меры на пространстве *X*, *CardX*= 3 равны $g_1 = 0.3$, $g_2 = 0.2$, $g_3 = 0.04$ и параметр нормировки λ =5. В результате опроса эксперта имеем

$$\frac{g_1}{G_{23}}=1.07 \qquad \frac{g_2}{G_{13}}=0{,}5 \qquad \frac{g_1}{g_2}=1.5.$$

Используя выражения (8.51) мы получаем значения (Табл. 8.4):

Таблица 8.4.

Значения плотности нечеткой меры.

Параметр	g_1	g_2	g_3	λ
Значение	0.3001	0.2033	0,0401	4,998

Таким образом, видим, что для множества *X* с *Card X* = 3 использование полученных зависимостей позволяет определить вес плотности и λ- параметр нечеткой меры. Преимущество предложенного метода идентификации заключается в возможности построить итерационную процедуру построения нечеткой меры для пространств *X* с *Card X*> 3. Опишем эту процедуру.

Пусть в результате эксперимента получено, согласно приведенному выше, распределение нечеткой меры $g_x(\cdot)$ на трех подмножествах A_i (Рис. 8.4):

$$\left\{A_i \middle| i=\overline{1,3}, A_i\cap A_j=\varnothing, \quad \bigcup_i A_i = X, \quad A_i\neq A_j, i\neq j\right\}. \tag{8.53}$$

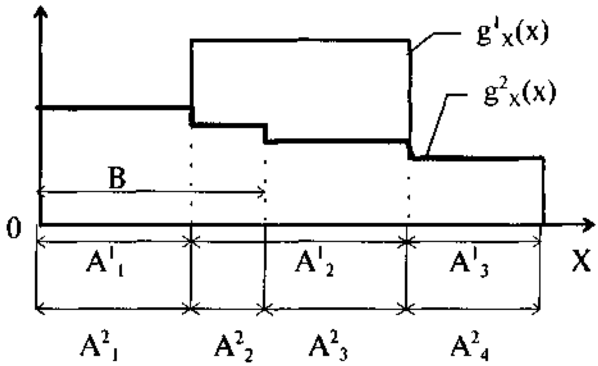


Рис. 8.4. Распределение нечеткой меры.

Ступенчатая функция $g^1_X(x)$ - есть первое приближение распределения плотности нечеткой меры (где $g^1_X(x)$ - равномерна на каждом A_i).

Дальнейшее уточнение функции $g_x(x)$ на 2-м шаге осуществляется щедующим образом. Эксперту предлагается оценить предпочтение подмножества $B \subseteq X$ над $B=X\backslash B$. (Желательно, чтобы $\forall i,\ B \neq A_i$, иначе информации для уточнения $g_x(x)$ не будет). В результате оценки имеем уравнение:

$$\lambda g^2_X(B) + g_X(B)(1+\alpha) - \alpha = 0\ . \qquad (8.54)$$

При известном λ (из предыдущего шага) с учетом того, что $g_x(B) \in [01]$ имеем:

$$g_x(B) = \frac{-(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 + 4\lambda\alpha}}{2\lambda} \in [01]. \qquad (8.55)$$

В результате полученной от эксперта информации функция g_x может быть уточнена следующим образом. На втором шаге получаем следующее множество подмножеств (см. рис. 8.4):

$$\left\{ A_i^2 \middle| i = \overline{1,4},\ \ A_i^2 \cap A_j^2 = \varnothing,\ \bigcup_i A_i^2 = X,\ \ A_i^2 \neq A_j^2, i \neq j \right\}. \qquad (8.56)$$

Значение функции g(·) на A_i, i=1,4 определяется из соотношений:

$$\begin{cases} g(A_1^2) = g(A_1^1); \\ g(A_2^2) = \dfrac{g_x(B) - g(A_1^1);}{1 + \lambda g(A_1^1)} \\ g(A_3^2) = \dfrac{g(A_2^1) - g(A_2^2)}{1 + \lambda g(A_2^2)}; \\ g(A_4^2) = g(A_3^1). \end{cases} \quad (8.57)$$

Таким образом мы имеем возможность уточнить функцию $g_x(x)$. Обобщая данную процедуру для l-го шага будем иметь возможность уточнения функции $g_x(x)$, при этом для l-го шага будем иметь значение $g_x(A^l{}_i)$ на $l+2$ непересекающихся подмножествах $i = \overline{1, l+2}$.

Учитывая условия аналогичные (8.56) в пределе будем иметь при $l \to \infty$ непрерывную функцию плотности нечеткой меры $g_X(x)\colon X \to [01]$.

Однако, не является рациональным увеличивать количество q вопросов к эксперту. На l-*м* шаге эксперту будет задано вопросов:

$$q = l + 2. \quad (8.58)$$

Поэтому, после получения приближения функции распределения плотности нечеткой меры на q^* подмножествах пространства X целесообразно осуществить аппроксимацию функции плотности $g_x(x)$ функцией (L-R)-типа.

Определение 8.9. Функция, обозначаемая L (или R) является функцией (L-R) типа тогда и только тогда, когда $\forall x \in X \equiv [0, +\infty[\colon \; L(-x) = L(x); \; L(0) = 1, \; L(\cdot)$ - монотонно убывает на множестве X.

В качестве таких функций могут выступать функции вида:

$$L(x) = \max\left(0, 1 - |x^p|\right); \\ L(x) = \exp\left(-|x^p|\right), \quad p \geq 1 \quad (8.59)$$

Для функции распределения $g_\lambda(\cdot)$ меры может быть использована такая $L(\bullet)$ функция для которой:

$$g([0,x]) = L\left[(a - x)/\beta \vee 0\right], \quad (8.60)$$

где a - параметр, при котором $g([0a]) = 1$, β - коэффициент нечеткости.

Таким образом, определив функцию *(L-R)* типа аппроксимация нечеткой меры может быть представлена в виде следующей процедуры. Пусть в результате экспертной оценки имеем значение нечеткой меры $g_X(A_i) = g^i$ на подмножествах пространства *X:*

$$\left\{A_i | i = \overline{1, l+2}, A_i \bigcap A_j = \varnothing, \bigcup_i A_i = X\right\} \quad (8.61)$$

Будем полагать, что для любого $A_i \subseteq X$ нечеткая мера $g_x(\cdot)$ сосредоточена в точке $x_i \in A_i \subseteq X$,такой,что:

$$A_i = \left[x_i - \frac{|A_i|}{2}; x_i + \frac{|A_i|}{2}\right],$$

где $|A_i|$ - длина интервала A_i. Тогда мера подмножества A_i через *(L-R)* функцию может быть представлена в виде:

$$g_x(A_i) = \frac{L\left[\varphi + \frac{|A|_i}{2\beta}\right] - L\left[\varphi - \frac{|A_i|}{2\beta}\right]}{1 + \lambda L\left[\varphi - \frac{|A_i|}{2\beta}\right]}, \quad (8.62)$$

где $\varphi = \frac{2(a - x_i)}{2\beta}, a = \inf X.$ Используя значения $g_X(A_i)$, полученные от экспертов, задача *(L-R)* аппроксимация функции распределения нечеткости сводится к оценке параметров *a* и β *(L-R)* функции по минимуму функционала качества:

$$H = \left\{\sum_{B \in 2^X} (g_X(B) - g_X^1(B))^2\right\}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \min, \quad (8.63)$$

$$g_x^1(B) = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{A_i \subseteq B} (\lambda g^i + 1) - 1\right]; \quad (8.64)$$

Таким образом, при минимизации функционала (8.62) мы получаем удовлетворительное представление функции распределения нечеткой меры *(L-R)* - функцией.

На рис. 8.5 приведен обобщенный алгоритм идентификации нечетких мер на основе предложенного выше подхода.

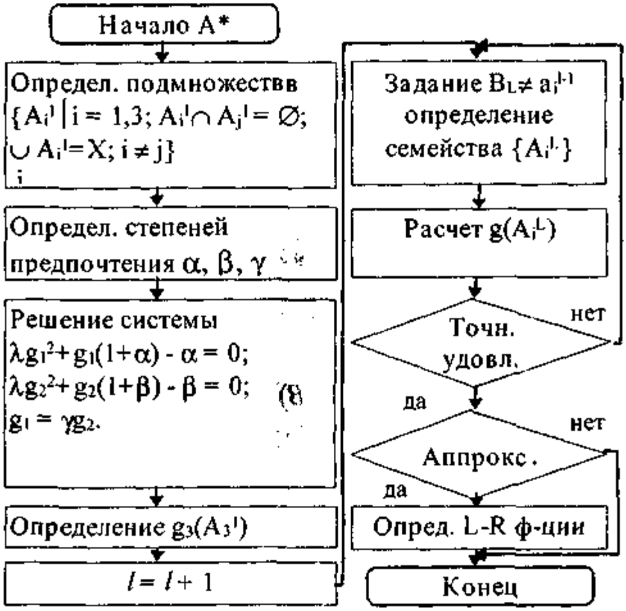


Рис. 8.5 Алгоритм идентификации нечетких мер.

Приведенный алгоритм идентификации по сравнению с подходом, основанным на методе Саати, а также с подходом прямого рейтингования является более аффективным. Например, в случае рассмотрения дискретного пространства X размерности Card X = 6, величины погрешности, трудоемкости и сходимости оценок нечеткой меры приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Оценка эффективности алгоритма

№	Характеристика (при cardx = 6)	Алгор. Саати	Алгор. А*	Прямое рейтинг.
1	Погрешность, %	> 1.5	> 1.7	≈10
2	Трудоемкость, кол.ср.	14	6	6
3	Сходимость, кол.итер.	14	4	6

Синтезированный новый эффективный алгоритм идентификации нечетких g_λ - мер является важным с практической точки зрения. Он обеспечивает высокую степень адекватности оценок нечеткой меры, снижает вычислительные затраты и обеспечивает итерационный подход, учет внутренней структуры меры, снижение нагрузки на экспертов (в случае их привлечения). Тем самым данный алгоритм позволяет эффективно осуществлять формализацию нечетких данных при описании аналитических задач поддержки принятия решений.

9. Обработка нечетких данных на основе нечетко- интегрального исчисления

9.1. Определение нечеткого интеграла

Для исчисления нечетких величин представленных нечеткими мерами и множествами на пространстве с нечеткой мерой могут быть использованы нечеткие интегралы, которые задаются согласно следующего определения.

Определение 9.1. Нечеткий интеграл (НИ) от функции $h(x) : X \to [01]$, измеримой на пространстве *(X, B)* с нечеткой мерой $g: 2^x \to [01]$ на множестве $A \subseteq X$ по нечеткой мере $g(\cdot)$ определяется выражением:

$$\int_A h(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [01]} \left\{ \alpha \wedge g(A \cap H_\alpha) \right\}, \tag{9.1}$$

где $H_\alpha = \left\{ x | h(x) \geq \alpha \right\}$, $\int$ - нечеткий интеграл.

Нечеткий интеграл называется также нечетким ожидаемым значением (fuzzy expected value FEV). Кроме определения нечеткого интеграла (9.1) может быть использовано следующее выражение, определяющее нечеткий интеграл.

Теорема 9.1. Пусть *(X, B)* измеримое пространство с заданной на нем нечеткой мерой $g(\cdot)$ и пусть $h(x)$ - *B* -измеримая функция. Нечеткий интеграл от функции $h(x)$ на множестве $A \subseteq X$ по нечеткой мере $g(\cdot)$ определяется выражением:

$$\int_A h(x) \circ g_x(\cdot) = \sup_{E \subseteq X} \left[\inf_{x \in E} h(x) \wedge g(A \cap E) \right] \tag{9.2}$$

Доказательство. Рассмотрим нечеткий интеграл на $A \subseteq X$. Согласно (9.1) имеем

$$\exists \alpha^* \in [01], \int_A h(x) \circ g(\cdot) = \alpha^* \wedge g(A \cap H_{\alpha^*}) = F_1$$

Для выражения (9.2) рассмотрим 2 случая:
1.Если $E \supset H_{\alpha^*}$, то имеем $\alpha^* \geq \inf_{x\in E} h(x)$ и

$g(A \cap E) \geq g(A \cap H_{\alpha}^*)$.
Тогда справедливо: $F_1 \geq \inf_{x\in E} h(x) \wedge g(A \cap E)$;
2. Если $E \subset H_{\alpha^*}$, то имеем $\alpha^* \leq \inf_{x\in E} h(x)$ и

$g(A \cap E) \leq g(A \cap H_{\alpha}^*)$.
Тогда справедливо: $F_1 \leq \inf_{x\in E} h(x) \wedge g(A \cap E)$.
Отсюда видно, что $\forall E \subseteq X$ $\sup_{E\subseteq X}\left[\inf_{x\in E} h(x) \wedge g(E \cap A)\right] = F_1$.

Следовательно выражение (9.2) справедливо.
Можно показать, что понятие НИ сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества X на непересекающиеся подмножества E_i следующим образом:
$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \quad E_i \cap E_j = \varnothing, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad i \neq j.$ Представим

функцию *h(x)* в виде ступенчатой функции: $h(x) = \sum \alpha_i f_{E_i}(x)$, где

$\alpha_i \in [01]$, $E_i \in B$, $f_{Ei}(x) \in \{01\}$ - характеристическая функция множества E_i. Пусть на пространстве (X, B) задана мера Лебега $l(\cdot)$. Интеграл Лебега от функции *h(x)* по множеству A $\subseteq$ X определяется выражением:

$$\int_A h(x)dl = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(A \cap E_i), \quad \alpha_i \leq \alpha_{i+1}, i = \overline{1,n}. \quad \textbf{(9.3)}$$

Воспользовавшись разбиением множества X на подмножества E_i функция *h(x)* может быть переопределена в другом виде. Пусть множество F_i определяется как $F_i = E_i \bigcup E_{i+1} \bigcup ... \bigcup E_n$ и $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$
Тогда функция *h(x)* может быть представлена как:

$$h(x) = \max_i \min(\alpha_i, f_{Fi}(x)),$$

где $f_{Fi}(x)$ - характеристическая функция множества F_i, определенного выше. Тогда нечеткий интеграл по аналогии с интегралом Лебега может быть определен в виде:

$$\int_A h(x) \circ g = \max_{i=\overline{1,n}} \min(\alpha_i, g(A \bigcap F_i)). \quad \textbf{(9.4)}$$

Сравнивая (9.3) и (9.4) можно обнаружить сходство между данными интегралами (операции сложения и умножения замены для интеграла (9.3) на операции *max* и *min* соответственно для НИ).
В случае интегрирования по вероятностной мере оба интеграла Лебегов и нечеткий могут быть сравнены.

Теорема 9.2. Пусть *(X, B, P)* - вероятностное пространство, а $h(x)\colon X \to [01]$ есть B - измеримая функция, то справедливо ограничивающее неравенство:

$$-\left(\frac{1-\inf h}{2}\right)^2 \le \int_X h dP - \int_X h \circ P \le \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2 \qquad (9.5)$$

где $\inf h = \inf_{x\in X} h(x), \quad \sup h = \sup_{x\in X} h(x)$.

Доказательство. Пусть значение нечеткого интеграла будет:

$\int_X h \circ P = M \in [01] = M \wedge P(H_M)$;

где $H_M = \{x | h(x) \ge M\}$; Рассмотрим интеграл Лебега от функции *h(x):* ,

$$\int_X hdP = \int_{H_M} hdP + \int_{X \setminus H_M} hdP.$$

Для нечеткого интеграла определим семейство функций $\{h_i(x)\}$ для которых выполняется условие $\forall h_i(x), \quad \int_X h_i(x) \circ P = M$. Определим мажоранту и миноранту этого семейства функций. Мажорирующая функция семейства $\{h_i(x)\}$ определяется выражением:

$$h^*(x) = \begin{cases} \sup h, x \in H_M \\ M, x \notin H_M \end{cases}$$

Минорирующей функцией будет:

$$h_*(x) = \begin{cases} M, & x \in H_M \\ \inf h, & x \notin H_M \end{cases}$$

Подставим значения мажоранты и миноранты в интеграл Лебега. Для функции *h*(x)* будем иметь:

$$\int_X hdP = \int_{H_M} hdP + \int_{X\setminus H_M} hdP \le \int_{H_M} \sup hdP + \int_{X\setminus H_M} MdP =$$

$$= \sup h \cdot P(H_M) + M(1 - P(H_M)) = \sup h \cdot M + M(1 - M).$$

Для функции $h_*(x)$ имеем:

$$\int_X hdP = \int_{H_M} hdP + \int_{X\setminus H_M} hdP \ge \int_{H_M} MdP + \int_{X\setminus H_M} \inf hdP =$$

$$= M \cdot P(H_M) + \inf h \cdot (1 - P(H_M)) = M^2 + \inf h \cdot (1 - M).$$

Таким образом справедливо:

$$M^2 + \inf h(1 - M) \le \int_X hdP \le M(1 - M) + \sup h \cdot M$$

Тогда разность интеграла Лебега и НИ будет ограничена неравенствами:

$$F_1 = M^2 + \inf h(1-M) - M \le \int_X hdP - \int_X h \circ P < M(1-M) + \sup hM - M = F_2$$

Найдем максимальный диапазон неравенств по M. Для этого найдем экстремумы функцией F_i, $i = 1,2$ по значению НИ M:

$$\frac{dF_1}{dM} = 2M - \inf h - 1; \qquad \frac{dF_2}{dM} = -2M + \sup h\cdot$$

Откуда максимальный диапазон неравенств определяется при $M = \frac{1 + \inf h}{2}$ для нижнего ограничения и при

$$M = \frac{1}{2} \sup h$$

для верхнего ограничения. Тогда подставим значения M в функций F_i, $i = 1,2$:

$$\min_M F_1 = \left(\frac{1 + \inf h}{2}\right)^2 + \inf h\left(1 - \frac{1 + \inf h}{2}\right) - \frac{1 + \inf h}{2} =$$

$$-\frac{1 - 2\inf h + (\inf h)^2}{4} = -\left(\frac{1 - \inf h}{2}\right)^2$$

$$\max_M F_2 = \frac{\sup}{2}\left(1 - \frac{\sup h}{2}\right) + \frac{(\sup h)^2}{2} - \frac{\sup h}{2} = \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2$$

Следовательно справедливо:

$$-\left(\frac{1-\inf h}{2}\right)^2 \le \int\limits_X hdP - \int\limits_X h \circ P \le \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 9.1. Если (X, B, P) - вероятностное пространство,

$h(x)$: $X \rightarrow [01]$

B-измеримая функция то:

$$\left|\int\limits_X hdP - \int\limits_X h \circ P\right| \le \frac{1}{4}; \quad (9.6)$$

Доказательство следствия тривиально, так как $\forall x \in X$, $h(x) \in [01]$ и подстановка предельных значений единичного интервала в неравенство (9.5) дает величину по модулю равную 0.25. В противном случае функции F_i, i=l,2 не превосходят по модулю 0.25.

Определение нечеткого множества, фиксирующего степень принадлежности элемента $x \in X$ подмножеству $A \in F(X)$, где *F(X)* - тожество всех нечетких подмножеств X, может быть представлено с использованием нечеткого интеграла следующим образом.

Пусть необходимо оценить степень принадлежности элемента $x \in X$ множеству $E \subseteq X$. Очевидно, что для пустого множества эта степень принадлежности равна 0, а для $x \in F$, где $E \subset F$ равна единице, то есть степень принадлежности для $x \in F$ будет больше, чем для $x \in E$, если $E \subset F$.

Если степень принадлежности $x_0 \in E$ равна $g(x_0, E)$, а вместо *E* имеем нечетное множество $\mu_A \in F(X)$,тогда:

$$g(x_0, A) = \int\limits_X \mu_A(x) \circ g(x_0) = \mu_A(x_0) \quad \textbf{(9.7)}$$

Это говорит, что степень нечеткости суждения "$x_0 \in A$" равна степени принадлежности x_0 нечеткому подмножеству μ_A. Таким образом, мы еще раз видим, что понятие степени нечеткости в теории нечетких мер включает в себя понятие степени принадлежности теории нечетких множеств.

Графически нечеткий интеграл можно представить согласно рис.9.1.

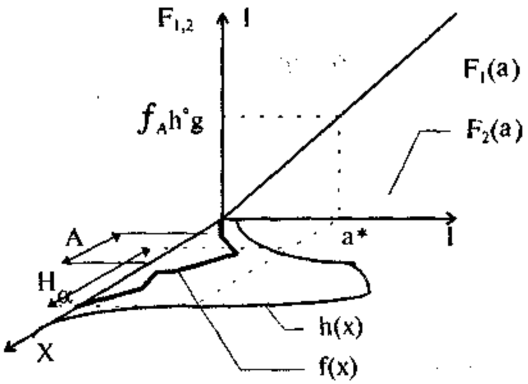


Рис.9.1. Графическое представление нечеткого интеграла

При этом НИ представлен в следующем виде:

$$\int_{A\subseteq X} h(x)\circ g(\cdot) = \sup_{\alpha\in[01]}\left\{F_1(\alpha)\wedge F_2(\alpha)\right\},$$

где $F_1(\alpha)=\alpha$;

$$F_2(\alpha)=g(H_2\cap A)=g(\{x|h(x)\geq\alpha\}\cap A)=\frac{1}{\lambda}\left\{\exp\left[\lambda\int_{H_2\cap A} f(x)dx\right]-1\right\},$$

где $f(x)$ - распределение плотности нечеткой меры.

Рассмотрим пример вычисления нечеткого интеграла для дискретного множества X.

Пример 9.1.

Пусть задано пятиэлементное множество $X=\{x_i\}, i=\overline{1,5}$ на котором заданы функция принадлежности нечеткого множества *h(x)* и распределение плотности нечеткой меры *g (·)* (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Исходные данные.

i	1	2	3	4	5
$h(x)$	0,1	0,3	0.7	0,6	0.2
g_i	0.143	0,4	0,261	0,350	0,131

Согласно условия нормировки параметр λ нечеткой меры равен: $\lambda=-0.51$. Тогда значение S НИ принимает значение:

$$S=\sup_{\alpha\in[01]}\left\{\alpha\wedge g_\alpha\right\}, \quad (9.8)$$

$$g_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(\prod_{i\in\Theta_\alpha}(\lambda g_i + 1) - 1\right), \quad \Theta_\alpha = \{i | h(x_i) \geq \alpha\}.$$

Согласно приведенных формул значение НИ будет: S = 0.5645.
Для непрерывного пространства $X = R$ вычисление нечеткого интеграла может быть упрощено и сведено к нахождению значения на монограмме (или в таблице). Если *h(x)* есть отображение функции принадлежит, то справедливо, что:

$$\forall\alpha_i,\ \alpha_1 < \alpha_2, \alpha_i \in [01], i = \overline{1,2} \Rightarrow F_{\alpha_1} \supseteq F_{\alpha_2}, \{x | h(x) \geq \alpha_i\} = F_{\alpha_i}$$

В этом случае справедливо следующее. Если *f(x)* -плотность нечеткой меры, значение НИ от *h(x)* по нечеткой мере равно значению $\alpha \in [01]$ для которого справедливо:

$$\rho(H_\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha\lambda)}{\ln(1+\lambda)}, \quad \lambda \in [-1, +\infty[\qquad (9.9)$$

где

$$\rho(H_\alpha) = \int_{H_\alpha} f(x)dx \cdot \left[\int_X f(x)dx\right]^{-1}.$$

Правая часть (9.9) зависит только от значений λ и α может быть получена заранее в числовом виде в форме таблицы или графика. Левая же часть (9.9) представляет собой отношение области определяемой уровневым множеством H_α ко всей области определения функции плотности нечеткой меры *f(x)*.
Использование (9.9), таким образом, может облегчить организацию вычисления нечеткого интеграла.

9.2. Основные свойства нечетких интегралов

Для дальнейшего рассмотрения нечетко-интегрального исчисления целесообразно остановиться на основных свойствах нечеткого интеграла.
Нечеткий интеграл на непрерывном пространстве *X* будет принимать значение *M* если будет выполняться условие:

$$\int_X h(x) \circ g = M = g(H_M), \qquad (9.10)$$

где $H_M = \{x | h(x) \geq M \in [01]\}$ при этом выполняется то, что $g(H_M) \geq M \geq g(H_{M+0})$, где $H_{M+0} = \{X | h(x) > M \in [01]\}$. Если обозначить $H_n = \left\{ x \middle| h(x) > M\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}$, тогда $H_M = \lim_{n\to\infty} H_n$. В этом случае, значение нечеткого интеграла может рассматриваться как предел:

$$M = \lim_{n\to\infty} g(H_n) = g(H_M).$$

В том случае, когда рассматривается интегрирование постоянной функции $h(x) = const = a \in [01]$ нечеткий интеграл удовлетворяет соотношению:

$$\int_X h(x) \circ g = \int_X a \circ g = a. \quad (9.11)$$

Пусть $h(x)\colon X \to [01]$, а $a \in [01]$ тогда удовлетворяются следующие соотношения:

$$\int_{E\subseteq X} (a \vee h(x)) \circ g = a \vee \int_E h(x) \circ g, \quad (9.12)$$

$$\int_{E\subseteq X} (a \wedge h(x)) \circ g = a \wedge \int_E h(x) \circ g. \quad (9.13)$$

Аналогично тому, как для интеграла Лебега существует возможность нахождения интеграла по областям, для НИ справедливо следующее. Пусть $E, F \in B$, а (X, B, g) - пространство с нечеткой мерой. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\int_{E\cup F} h(x) \circ g \geq \int_E h(x) \circ g \vee \int_F h(x) \circ g, \quad (9.14)$$

$$\int_{E\cap F} h(x) \circ g \leq \int_E h(x) \circ g \wedge \int_F h(x) \circ g. \quad (9.15)$$

Кроме того, если $E \subseteq F$ то выполняется следующее неравенство:

$$\int_E h(x) \circ g \leq \int_F h(x) \circ g. \quad (9.16)$$

Если на пространстве (X, B, g) заданы две функции принадлежности $h_i(x), i=1,2$ такие, что $\forall x \in X,\ h_1(x) \leq h_2(x)$, то для нечеткого интеграла выполняется следующее соотношение:

$$\int h_1(x) \circ g \leq \int h_2(x) \circ g. \quad (9.17)$$

Данный результат может быть расширен на случай рассмотрения пересечения и объединения множества функций $h_i(x)$.

Рассмотрим семейство функций $H = \{ h_i(x) \mid h_i(x)\colon X \to [01],\ i=1,N\}$.

Для данного семейства функций справедливым оказываются следующие неравенства:

$$\int_E \min_i h_i(x) \circ g \le \min_i \int_E h_i(x) \circ g; \quad (9.18)$$

$$\int_E \max_i h_i(x) \circ g \ge \max_i \int_E h_i(x) \circ g; \quad (9.19)$$

В том случае когда семейство функций *H* является монотонной последовательностью В - измеримых функций при увеличении *i*, то справедливым оказывается следующий предельный переход:

$$\int \lim_{i\to\infty} h_i(x) \circ g = \lim_{i\to\infty} \int h_i(x) \circ g. \quad (9.20)$$

Кроме того, если $h_i(x)$ - монотонно возрастающая (убывающая) последовательность В - измеримых функций и $\{a_i\}$ - монотонно убывающая (возрастающая) последовательность вещественных чисел $a_i \in [01]$, то показано, что выполняется тождество:

$$\int \left[\bigvee_{i=1}^{\infty} (a_i \wedge h_i(x)) \right] \circ g = \bigvee_{i=1}^{\infty} \left[a_i \wedge \int h_i(x) \circ g \right]; \quad (9.21)$$

В случае интегрирования нечетких отношений оказывается возможным установить следующие важные соотношения.

Лемма 9.1 Пусть задано пространство *(X, B, g)* с нечеткой мерой и нечеткое отношение $h(x,y) : X \times Y \to [01]$ тогда выполняются неравенства:

$$\sup_{y\in Y} \int_X h(x,y) \circ g \le \int_X \sup_{y\in Y} h(x,y) \circ g, \quad (9.22);$$

$$\inf_{y\in Y} \int_X h(x,y) \circ g \ge \int_X \inf_{y\in Y} h(x,y) \circ g. \quad (9.23)$$

Доказательство. Из определения проекции нечеткого отношения *h(x,y)* следует, что:

$$\forall x, y,\ Proj_X h(x,y) = \sup_{y\in Y} h(x,y) \ge h(x,y).$$

Для нижней грани нечеткого отношения выполняются условие:

$$\forall x, y, \inf_{y\in Y} h(x,y) \le h(x,y).$$

Тогда, исходя из свойства (9.17) можем записать:

$$\forall y \in Y, \quad \int_X h(x,y) \circ g \le \int_X \sup_{y \in Y} h(x,y) \circ g$$

$$\int_X h(x,y) \circ g \ge \int_X \inf_{y \in Y} h(x,y) \circ g$$

что и требовалось доказать.
Если смягчить условие ограничения на значение нечеткой меры полагая, что для $X= R$ выполняется условие:

$$\lim_{x \to \infty} H_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda), \tag{9.24}$$

где H_λ(x) - функция F- распределения $g(\cdot)$ меры, то есть что мера всего множества ограничивается нормирующим множителем $N_\lambda = \frac{1}{\lambda} \ln(1+\lambda)$, то справедлива лемма:

Лемма 9.2. Если функция плотности нечеткой меры, с помощью которой строится мера g_λ одна и та же, то для пары $\lambda_1, \lambda_2 \in [-1,+\infty[$ такой, что $\lambda_1 \le \lambda_2$, справедливо неравенство:

$$\int_X h(x) \circ g_{\lambda_1}(\cdot) \ge \int_X h(x) \circ g_{\lambda_2}. \tag{9.25}$$

В заключении рассмотрения основных свойств нечетких интегралов приведем возможный вариант вычисления нечеткого интеграла для дискретного множества *X*.
Согласно свойства (9.15) можем записать:

$$\int_A h(x) \circ g \ge \max_i (e_i) \tag{9.26}$$

где e_i - нечеткий интеграл от функции h(x) по подмножеству $A_i \subseteq X$, если $\bigcup_i A_i = X, A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Однако, для любой совокупности подмножеств A_i условие (9.26) выполняется, что следует из свойства (9.16).
Тогда, если переопределить функцию h(x) как не возрастающую, то есть $h(x_1) \ge h(x_2) \ge \ldots > h(x_n), h(x_i) \in [01]$, то множество α-срезов h(x) будет удовлетворять при уменьшении α следующему условию: $A_i = A_{i+1} \cup \{x_i\}$, $A_{i+1}=\{x_1,\ldots,x_{i-1}\}$. Функция меры $g_i = g(A_i)$ будет функцией не убывающей (Рис.9.2).

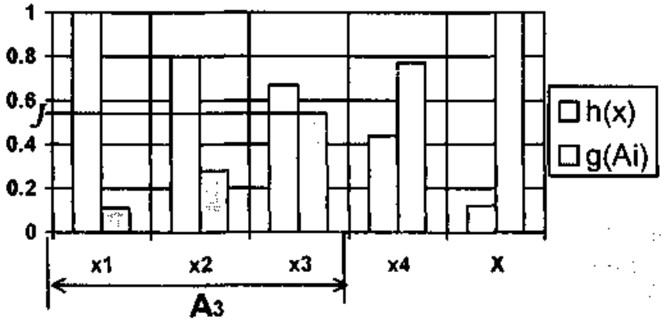


Рис. 3.2 . Определение нечеткого интеграла.

Тогда, нечеткий интеграл для каждого подмножества A_i будет удовлетворять:

$$e_i = \min(h(x_i), g(A_i)).$$

Следовательно, предельное значение последовательности нечетких интегралов e_i, равное нечеткому интегралу от функции h(x) может быть определено в виде:

$$J = \int_X h(x) \circ g = \sup_{i=1,n}(e_i) = \sup_{i=1,n}\left\{\min\left(h(x_i), g(A_i)\right)\right\} \cdot \quad (9.27)$$

Формула (9.27) может быть использована для вычисления нечеткого интеграла при дискретном множестве X.

9.3. Определение расширенной нечеткой меры

Прежде чем приступить к рассмотрению расширенной нечеткой меры дадим определение нечеткого интеграла на нечетком множестве.

Определение 9.2. Нечеткий интеграл от функции $\mathbf{h}(x)$: $X \rightarrow [01]$ на нечетком множестве $\mu_A(x): X \rightarrow [01]$ по нечеткой мере $g(\cdot)$, определенной на пространстве *(X, B)* находится как:

$$\int_{\mu_A(x)} h(x) \circ g = \int_X \left[\mu_A(x) \wedge h(x)\right] \circ g(\cdot) . \quad (9.28)$$

Таким образом, рассматривая обычное множество $E \subseteq X$ для нечеткого интеграла справедливым будет следующее выражение:

$$\int_E h(x)\circ g = \int_X \left\{\chi_E(x) \wedge h(x)\right\}\circ g, \quad (9.29)$$

где $\chi_E(x): X \to \{0,1\}$ - характеристическая функция подмножества $B \subseteq X$.

Пусть *(X, B, g)* - пространство с нечеткой мерой. Обозначим через ***F(X)*** множество всех нечетких множеств на пространстве *X*. При этом, очевидно, что $B \subset \mathbf{F}(X)$, так как обычное множество можно рассматривать как частный случай нечеткого множества, для которого функция принадлежности совпадает с характеристической функцией данного множества. В этом смысле множество ***F(X)*** является расширением множества B. Определим нечеткую меру на всех элементах множества ***F (X),***

Определение 9.3. Функция множества $\tilde{g}(\cdot)$ определяемая в виде:

$$\tilde{g}(\mu_A) = \int_X \mu_A(x)\circ g \quad (9.30)$$

для нечеткого множества $\underset{\sim}{A} = \left\{(x, \mu_A(x))\right\},\ \mu_A(x) \in F(X)$

называется расширенной нечеткой мерой на ***F (X).***

Графически определение расширенной нечеткой меры приведено на рис. 9.3.

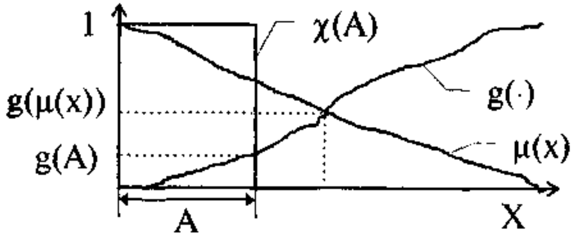


Рис. 9.3. Определение расширенной нечеткой меры.

Расширенная нечеткая мера $\tilde{g}(\mu)$ позволяет определить нечеткую меру для четких подмножеств $E \subseteq X$ с учетом ограничения заданного нечетким множеством μ.

Пусть h(x): X → [01] - произвольное нечеткое множество на пространстве *(X, B, g)* с нечеткой мерой. Расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_h(h)$ для нечеткого множества h(x) определяет нечеткую меру на *(X, B)* для всех $E \subseteq X$ и удовлетворяет следующим свойствам:

а) $\tilde{g}_h(\varnothing) = 0; \tilde{g}_h(X) = \int h(x)\circ g$, ограниченность;

б) $\forall A \subseteq B, \Rightarrow g_h(A) \le g_h(B)$; монотонность;

в) если $A_n \in B$ и $\{A_n\}$ - монотонная последовательность множеств, то

$\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{g}_h(A_n) = \tilde{g}_h(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$, непрерывность.

Доказательство. Расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_h(\cdot)$ для нечеткого множества h(x) и произвольного подмножества $E \subseteq X$ определяется как

$$g_h(E) = \int_E h(x) \circ g. \qquad (9.31)$$

Проверим выполнение свойств а, б, в.

а) $$g_h(\varnothing) = \int_\varnothing h(x) \circ g = \int_X [\chi_\varnothing \wedge h(x)] \circ g = \int_X 0 \circ g = 0.$$

$$\tilde{g}_h(X) = \int_X h(x) \circ g = M, \text{где } M = g(H_M).$$

б) Проверим выполнение свойства монотонности. Пусть $A \subseteq B$ тогда, согласно (9.16) имеем соотношение:

$$\int_A h(x) \circ g \le \int_B h(x) \circ g \Rightarrow \tilde{g}_h(A) \le \tilde{g}_h(B).$$

в) Пусть $\{A_n | A_n \in \mathrm{B}\}$ - монотонная последовательность множеств, а χ_{A_n}: $X \to \{01\}$ - характеристическая функция множества $A_n \subseteq X$. Тогда согласно (9.29) можем записать:

$$\forall A_n, \quad g_h(A_n) = \int_{A_n} h(x) \circ g = \int_X [\chi_{A_n}(x) \wedge h(x)] \circ g.$$

Определим функцию $h_n(x) = \chi_{A_n}(x) \wedge h(x)$.

Для монотонной последовательности множеств $\{A_n\}$ будем иметь монотонную последовательность B - измеримых функций $h_n(x)$. Тогда

$$\tilde{g}_h(A_n) = \int_X h_n(x) \circ g$$

и можем записать согласно свойства (9.20):

$$\lim_{n\to\infty} g_h(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n(x) \circ g = \int_X \lim_{n\to\infty} h_n(x) \circ g = \int_X \lim_{n\to\infty} [\chi_{A_n}(x) \wedge h(x)] \circ g =$$

$$\int_X \left[h(x) \wedge \lim_{h\to\infty} \chi_{A_n}(x)\right] \circ g = \int_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n} h(x) \circ g = g_h(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом, расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_h(\cdot): 2^X \to [01]$

удовлетворяет свойствам нечеткой меры (см. определение 7.1) с такой лишь разницей, что в свойстве ограниченности верхняя грань значения нечеткой меры ограничивается величиной $M \in [01]$, $M = {}_X\!\int h(x) \circ g$.
С учетом (9.27) расширенную нечеткую меру для нечеткого множества h(x) можно рассматривать как сужение нечеткой меры g(·) на подмножество E $\subseteq$ X такого, что

$$\forall x \in E \subseteq X, \qquad h(x) \geq \int_X h(x) \circ g.$$

То есть расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_h(\cdot)$ определяется на множестве нечетких подмножеств

$$F_h(X) = \left\{ h'(x) | h'(x) = h(x) \wedge \chi_A(x), \forall A \subseteq E \right\}.$$

9.4. Основная теорема о нечетком интеграле по расширенной нечеткой мере и ее следствия

Прежде чем приступать к рассмотрению вопроса об интегрировании функций вида $h(x)\colon X \to [01]$, заданных на измеримом пространстве напомним, что согласно определения 9.3 по зависимости (9.30) нечеткая расширенная мера определяется как:

$$\tilde{g}_\mu(\cdot) = \int_{(\cdot)} \mu(y) \circ g, \tag{9.32}$$

где $g\colon 2^Y \to [01]$ - нечеткая мера заданная на пространстве Y, а $\mu(y)$ - g-измеримая функция вида μ*(y):* Y→[01].
Согласно теоремы 9.3 расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_\mu(\cdot)$ обладает всеми свойствами нечеткой меры: ограниченностью, монотонностью, непрерывностью, с той лишь разницей, что $\tilde{g}_\mu(Y) \leq 1$ и может быть определена как:

$$g_\mu(Y) = \int_Y \mu(y) \circ g. \tag{9.33}$$

Теперь рассмотрим следующую теорему.
Теорема 9.4. Пусть заданы пространства с нечеткими мерами $(X, f(\cdot))$ и (Y, g(·)), связанные между собой отображением $\varphi\colon F(X) \to F(Y)$, где *F(·)* - множество всех нечетких подмножеств. Тогда, нечеткий интеграл от *f* - измеримой функции $h(x)\colon X \to [01]$ по расширенной нечеткой мере $\tilde{g}_\mu(\cdot)$, где μ*(y)* ∈ *F(Y)* на множестве *E* $\subseteq$ X определяется выражением:

$$\int_E h(x) \circ g_\mu(\cdot) = \sup_\gamma(\gamma \wedge g(M_\beta \cap \Phi_\beta(H_\alpha \cap E))), \quad (9.34)$$

где

$$\gamma = \alpha \wedge \beta, \quad \alpha, \beta \in [01], \quad H_\alpha = \{x | h(x) \geq \alpha\}$$

$$M_\rho = \{y | \mu(y) \geq \beta\}, \quad \Phi_\beta = \{y | \varphi(H_\alpha \cap E) \geq \beta\}.$$

Доказательство. В силу того, что определено отображение φ расширенную нечеткую меру можно представить в виде:

$$\tilde{g}_\mu(\cdot) = \int_{\varphi(\cdot)} \mu(y) \circ g(\cdot).$$

Подставим данное выражение в нечеткий интеграл от функции *h(x)* $\in$ *F(X).*

$$\int_E h(x) \circ g_\mu(\cdot) = \int_E h(x) \circ \int_{\varphi(\cdot)} \mu(y) \circ g(\cdot) = \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_{\varphi(H_\alpha \cap E)} \mu(x) \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$= \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_Y [\mu(x) \wedge \varphi(H_\alpha \cap E)] \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$= \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \sup_\beta [\beta \wedge g(\Phi_\beta(H_\alpha \cap E) \cap M_\beta)] \right\} =$$

$$= \sup_{\gamma = \alpha \wedge \beta} \{\gamma \wedge g(\Phi_\beta(H_\alpha \cap E) \cap M_\beta)\}$$

Что и требовалось доказать.

Данная теорема имеет ряд следствий, показывающих более общий характер нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере.

Если отображение φ: $F(X) \rightarrow F(Y)$, определяется через условную нечеткую меру $\sigma_X(\cdot | y)$, то нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере определяется соотношением (9.3), где:

$$\Phi_\beta = \left\{ y \middle| \int_{H_\alpha \cap E} 1(x) \circ \sigma(\cdot | y) \geq \beta \in [01] \right\}. \quad (9.35)$$

Доказательство следствия очевидно и оно следует из доказательства теоремы.

Следствие 2. Если отображение φ есть тождественное отображение пространства X на себя такое, что $g(\cdot) = f(\cdot)$, то нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере определяется соотношением:

$$\int\limits_E h(x)\circ g_\mu(\cdot)=\sup_\gamma(\gamma\wedge f(M_\beta\cap H_\alpha\cap E)), \quad (9.36)$$

где

$$\gamma=\alpha\wedge\beta,\qquad \alpha,\beta\in[01],\quad H_\alpha=\{x|\ h(x)\geq\alpha\}$$

$$M_\beta=\{y|\ \mu(y)\geq\beta\}.$$

Доказательство.

$$\int\limits_E h(x)\circ g_\mu(\cdot)=\int\limits_E h(x)\circ \mathcal{J}_\mu(\cdot)=\int\limits_E h(x)\circ\int\limits_X \mu(x)\circ f(\cdot)=$$

$$=\sup_\alpha\left\{\alpha\wedge\int\limits_{H_\alpha\cap E}\mu(x)\circ f(\cdot)\right\}=\sup_\alpha\left\{\alpha\wedge\sup_\beta[\beta\wedge f(H_\alpha\cap E\cap M_\beta)]\right\}=$$

$$=\sup_{\gamma=\alpha\wedge\beta}\{\gamma\wedge f(H_\alpha\cap E\cap M_\beta)\}.$$

Что и требовалось доказать.

Отметим, что в следствии 3 используются понятия и соотношения представленные в следующей главе. Данное следствие приведено здесь для сохранения общности изложения материала.

Следствие 3. Если отображение φ есть отображение задающее H-соответствие между пространствами $(X,\ f(\cdot))$ и $(Y,\ g(\cdot))$, где $H\subseteq X\times Y$, то нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере определяется через H_ω- операцию над нечеткими мерами $g(\bullet)$ и $f(\bullet)$ с бинарной операцией ω такой, что

$$C_{\alpha\beta}=[F_\alpha\cap A]\,\omega\, M_\beta,$$

и находится согласно выражения:

$$\int\limits_A h(x)\circ\tilde{g}_\mu(\cdot)=\sup_\gamma\{\gamma\wedge H_\omega\{g,f\}[C_{\alpha\beta}]\}\ , \quad (9.37)$$

где $\gamma=\alpha\wedge\beta\in[01];$

$$F_\alpha=\{x|h(x)\geq\alpha\in[01]\},$$

$$M_\beta=\{y|\mu(y)\geq\beta\in[01]\}.$$

Доказательство. Согласно теоремы 9.4. можем записать:

$$\int\limits_A h(x)\circ\tilde{g}_\mu(\cdot)=\int\limits_A h(x)\circ\int\limits_{\varphi(X)}\mu(y)\circ g,$$

где φ *(x)* есть функция $\varphi: X\to[01]$ H-соответствующая нечеткой мере $f(\bullet)$. определяемая согласно (10.28):

$$\varphi(X)(y) = \int_{E_H(y)} 1(x) \circ f(\cdot).$$

Согласно теоремы 9.3. *H*- соответствия определяет расширенную нечеткую меру порожденную характеристической функцией $\chi_{E_H(y)}$.

Исходя из сказанного выше, можем записать:

$$\int_A h(x) \circ \tilde{g}_\mu(\cdot) = \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_{\varphi[F_\alpha \cap A](y)} \mu(y) \circ g(\cdot) \right\}.$$

Согласно (10.28) будем иметь:

$$\varphi[F_\alpha \cap A](y) = \int_{E_H(y) \cap (F_\alpha \cap A)} 1(x) \circ f(\cdot) = f\left(E_H(y) \cap (F_\alpha \cap A)\right).$$

Подставим это выражение в нечеткий интеграл:

$$\int_A h(x) \circ g_\mu(\cdot) = \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_Y [\mu(y) \wedge \varphi[F_\alpha \cap A](y)] \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$\sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_Y \mu(y) \circ \int_{\varphi[F_\alpha \cap A](y)} 1(y) \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$= \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \int_Y \mu(y) \circ \int_Y \varphi[F_\alpha \cap A](y) \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$= \sup_\alpha \left\{ \alpha \wedge \sup_\beta \left[\beta \wedge \int_{M_\beta} \varphi[F_\alpha \cap A](y) \circ g(\cdot) \right] \right\} =$$

$$= \sup_{\gamma = \alpha \wedge \beta} \left\{ \gamma \wedge \int_{M_\beta} f(E_H(y) \cap (F_\alpha \cap A)) \circ g \right\} = \sup_{\gamma = \alpha \wedge \beta} \left\{ \gamma \wedge H_\omega\{g, f\}(C_{\alpha\beta}) \right\}$$

Что и требовалось доказать

Графически нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере может быть проиллюстрирован, как приведено на рис. 9.5.

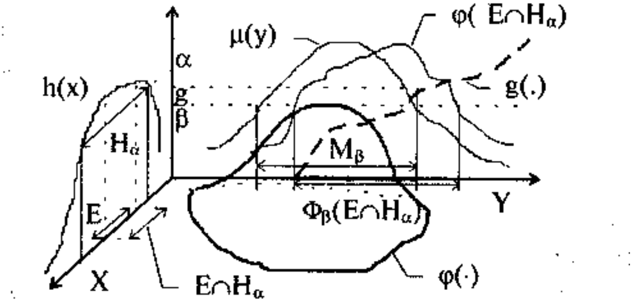


Рис. 9.5. Нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере.

Следует отметить, что предложенный в теореме 9.4 нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере очень схож с рассматриваемым в обычном интегральном исчислении интегралом Лебега - Стилтьеса. Ранее мы уже отмечали сходство (сравнимость) интеграла Лебега и нечеткого интеграла по Суджено (теорема 9.2). Далее мы немного остановимся на свойствах нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере.

9.5. Свойства нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере

Из приведенного ранее материала видно, что основные свойства нечетких интегралов во многом определяются свойствами нечеткой моры относительно которой осуществляется интегрирование. Рассмотренная нами ранее теорема 9.3 позволяет сделать вывод, что в целом, расширенная нечеткая мера обладает всеми основными свойствами нечеткой меры, а именно свойствами непрерывности, монотонности, ограниченности. Единственное отличие расширенной нечеткой меры от обычной меры, данной в определении 8.1, включается в том, что расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_\mu(\cdot)$ на всем множестве X может принимать значения меньше единицы, то есть

$$g_\mu(X) = \int_X \mu(x) \circ g(\cdot) \le 1, \quad (9.38)$$

где $\mu(x) : X \to [01]$, $g(\cdot) : 2^X \to [01]$.

Таким образом имеем верхнее ограничения на значение функции множества $\tilde{g}_\mu(\cdot)$. В дальнейшем будем считать, что функция $\tilde{g}_\mu(\cdot)$

ограничена величиной М$\in$ [01], то есть:

$$g_\mu(X) = M \in [01]. \qquad (9.39)$$

Условие (9.39) будет определять некоторые отличия свойств нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере от свойств интеграла определенных в пункте 9.2

В силу совпадения свойств обычной и расширенной нечетких мер свойства нечетких интегралов не связанные с условием (свойством) ограниченности нечеткой меры останутся без изменений в виде представленном в пункте 9.2. В этом пункте мы рассмотрим лишь те свойства нечетких интегралов, где условие ограниченности (9.39) может оказать свое воздействие.

Лемма 9.3. Нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере $\tilde{g}_\mu(\cdot)$ от постоянной функции $\forall x \in X,\ h(x) = a \in [01]$ определяется соотношением:

$$\int_X a \circ g_\mu(\cdot) = a \wedge M \cdot \qquad (9.40)$$

Доказательство.

$$\int_X a \circ g_\mu(\cdot) = \int_X a \circ \int_X \mu(x) \circ g(\cdot) = \int_X a \circ \int_{\mu(x)} 1(x) \circ g = \int_X [a \wedge \mu(x)] \circ \int_X 1(x) \circ g =$$

$$= \int_X [a \wedge \mu(x)] \circ g = a \wedge \int_X \mu(x) \circ g = a \wedge M.$$

Лемма 3.4. Для нечетких интегралов по расширенной нечеткой мере справедливы следующие свойства:

$$\int_X [a \wedge h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = a \wedge \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot), \qquad (9.41)$$

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \left\{a \vee \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot)\right\} \wedge M, \qquad (9.42)$$

где $a \in [01]$, $\mu(x)$, $h(x)$: $X \to [01]$, $g: 2^X \to [01]$.

Доказательство. Сначала рассмотрим доказитсльстпо соотношения (9.41).

$$\int_X [a \wedge h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \int_X [a \wedge h(x)] \circ \int_X \mu(x) \circ g = \int_X a \circ \int_{h(x)} \mu(x) \circ g =$$

$$= \int_X a \circ \int_X [h(x) \wedge \mu(x)] \circ g = a \wedge \int_X [h(x) \wedge \mu(x)] \circ g =$$

$$= a \wedge \int_X h(x) \circ \int_X \mu(x) \circ g = a \wedge \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot).$$

Для доказательства соотношения (9.42) рассмотрим функцию $(a \vee h(x))$. Очевидно, что при $\alpha \le a \in [01]$ α - уровень функции $(a \vee h(x))$ $G_\alpha = \{x | a \vee h(x) \ge \alpha \in [01]\} = X$. Исходя из этого можно представить следующую зависимость:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \sup_{\alpha \in [01]} \{\alpha \wedge g_\mu(G_\alpha)\} =$$

$$= \underbrace{\sup_{\alpha \in [0,a]} \{\alpha \wedge g_\mu(G_\alpha)\}}_{A} \vee \underbrace{\sup_{\alpha \in (a,1]} \{\alpha \wedge g_\mu(G_\alpha)\}}_{B};$$

Если $A \ge B$, то:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,\alpha]} \{\alpha \wedge g_\mu(G_\alpha)\} = a \wedge M;$$

Если $A < B$. тогда имеем:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \sup_{\alpha \in (a,1]} \{\alpha \wedge g_\mu(G_\alpha)\};$$

но $G_\alpha = \{x | h(x) \ge \alpha \in (a,1]\}$, а следовательно:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot).$$

Отсюда имеем:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = [a \wedge M] \vee \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot) =$$

$$= \left[a \vee \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot)\right] \wedge \left[M \vee \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot)\right]$$

Однако $M \ge \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot)$, поэтому:

$$\int_X [a \vee h(x)] \circ g_\mu(\cdot) = [a \vee \int_X h(x) \circ g_\mu(\cdot)] \wedge M.$$

Рассмотрим следующую лемму, определяющую свойства нечетких интегралов по расширенной нечеткой мере. Если $h_i(x)$ - монотонно возрастающая (убывающая) последовательность g- измеримых функций $h_i(x)$: $X \to [01]$, а $\{a_i\}$ - монотонно убывающая (возрастающая) последовательность вещественных чисел $a_i \in [01]$, то справедлива лемма.

Лемма 9.5. При указанных выше свойствах последовательностей функций $h_i(x)$ и чисел a_i для нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере справедливо свойства:

$$\int_X \bigvee_{i=1}^{\infty}[a_i \wedge h_i(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \bigvee_{i=1}^{\infty}\left[a_i \wedge \int_X h_i(x) \circ g_\mu(\cdot)\right]. \quad (9.43)$$

Доказательство. В силу монотонности свойств функций $h_i(x)$ для убывающей последовательности $h_i(x)$ справедливо соотношение $F_\alpha \subseteq E_\alpha$, где:

$$F_\alpha = \{x | h_2 \geq \alpha\}, E_\alpha = \{x | h_1 \geq \alpha\}.$$

Для простоты будем рассматривать последовательность из 2-х функций. Тогда:

$$\int_X \bigvee_{i=1}^{2}[a_i \wedge h_i(x)] \circ g_\mu(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0 a_1]}\{\alpha \wedge \circ g_\mu(E_\alpha)\} \vee \sup_{\alpha \in (a_1, a_2]}\{\alpha \wedge g_\mu(F_\alpha)\}$$

С другой стороны имеем:

$$\int_X [a_1 \wedge h_1(x)] \circ g_\mu(\cdot) \vee \int_X [a_2 \wedge h_2(x)] \circ g_\mu(\cdot) =$$

$$= \sup_{\alpha \in [0 a_1]}\{\alpha \wedge g_\mu(E_\alpha)\} \vee \sup_{\alpha \in [0 a_1]}\{\alpha \wedge g_\mu(F_\alpha)\} \vee$$

$$\vee \sup_{\alpha \in [a_1, a_2]}\{\alpha \wedge g_\mu(F_\alpha)\}.$$

Но, так как в силу монотонности $g_\mu(E_\alpha) \geq g_\mu(F_\alpha)$ имеем равенство:

$$\int_X \bigvee_{i=1}^{2}(a_i \wedge h_i(x)) \circ g_\mu(\cdot) = \int_X [a_1 \wedge h_1(x)] g_\mu(\cdot) \vee \int_X [a_2 \wedge h_2(x)] g_\mu(\cdot).$$

Для случая *n > 2* доказательство аналогично. Тогда имеем:

$$\int_X \bigvee_{i=1}^{\infty}(a_i \wedge h_i(x)) \circ g_\mu(\cdot) = \sup_i \int_X [a_i \wedge h_i(x)] \circ g_\mu(\cdot) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{\infty}\left[a_i \wedge \int_X h_i(x) \circ g_\mu(\cdot)\right].$$

Что и требовалось доказать.

Таким образом приведенные свойства нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере позволяют использовать его на практике при моделировании и расчетах с нечеткими величинами, которые представлены в виде распределения нечетких мер.

9.6. Интегрирование В - измеримых функций по нечеткозначной нечеткой мере

В пункте 8.4. нами было рассмотрено определение нечеткой меры принимающей нечеткие значения в единичном интервале для пространства *(X,B)*. Пусть $h(x)$: $X \to [01]$, В- измеримая функция. Рассмотрим возможность применения конструкции нечеткого интеграла для интегрирования таких функций.
Ранее отмечалось, что при фиксированном $\forall x \in X$ мы имеем нечеткую меру на единичном интервале L=[01]. Обозначим ее $G(\cdot|x)$, $G(\cdot|x):\ 2^{L} \to [01]$, т.е. это нечеткая мера на единичном интервале L. Для фиксированного уровня $\alpha \in L$ соответствует интервал $[0,\alpha] \subseteq L$. Тогда для $\forall x \in X$ имеем: $G([0\alpha|x) \in [01]$.
Если для $\forall x \in X$ зафиксировать степень уверенности $r \in [01]$, тогда для $\forall x \in X$ будем иметь значение $\alpha(x) \in [01]$ для которого выполняется условие:

$$G([0\alpha(x)]|x) = r \in [01]. \qquad (9.44)$$

Функция α(x) для которой выполняется условие (9.44) определяет распределение плотности нечеткой меры на *X* для фиксированного уровня $r \in [01]$ уверенности. При этом значение плотности меры удовлетворяют соотношению:

$$g^r(x) = \alpha(x) = \arg_\alpha \max_\alpha \{G([0,\alpha]|x) < r\}. \qquad (9.45)$$

Для непрерывного пространства X=R нечеткая мера множества $A \subseteq X$ при фиксированном уровне уверенности $r \in [01]$ может быть определена как:

$$g^r(A) = \frac{1}{\lambda_r}\left[\exp\left(\lambda_r \int_A g^r(x)dx\right) - 1\right], \qquad (9.46)$$

где интеграл по *A* понимается в смысле интеграла Лебега, а λ_r – есть λ-иараметр нечеткой меры, отражающей семантику индуцированной нечеткой меры на *X* при фиксированной степени $r \in [01]$.
Таким образом для $\forall\ A \subseteq X$ нечеткая мера типа 2 будет порождать

функцию F-распределения на L со значениями в единичном интервале. (рис.9.6).

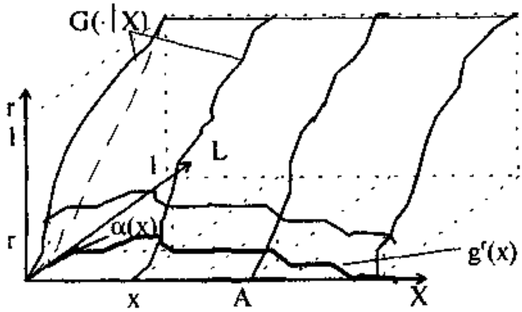


Рис. 9.6. F-распределение порождаемое нечеткой мера типа 2.

Обозначим это F-распределения как $F_A^2(\cdot)$. При этом выполняется следующее. Переобозначим функцию $g^r(A)$ (9.46) при фиксированном *A* в функцию:

$$g^r(A) = P_A(r) \colon \underset{r}{\underset{\cup}{[01]}} \to \underset{\alpha}{\underset{\cup}{[01]}}.$$

Тогда функция $F_A^2([0\alpha])$ является обратной функцией к функции P_A (r), т.е. выполняется:

$$F_A^2([0\alpha]) = (P_A(r))^{-1}, \quad (9.47)$$

где $(\bullet)^{-1}$- обратная функция к P_A (r). Исходя из сказанного определим значение нечеткого интеграла от функции *h(x)* по нечеткой мере типа 2 в виде:

$$\int_X h(x) \circ g_X^2(\cdot) = \left\{ r \,\middle|\, \sup_{\alpha \in [01]} \left(\left(\alpha \wedge g^r(H_\alpha) \right) \right\} = \right.$$

$$= \left\{ r \,\middle|\, \alpha = g^r(H_\alpha), H_\alpha = \left\{ x \middle| h(x) \geq \alpha \right\} \right\} = F_{h(x)}^2([0\alpha]). \quad (9.48)$$

Т.е. нечеткий интеграл от B - измеримой функции *h(x)* есть F -распределение на интервале *L* со значениями *r* в единичном интервале *(r* $\in$ [01]). Таким образом:

$$F^2_{h(x)}([0\alpha]) = r = \int_X h(x) \circ g^2_x(\cdot), \quad (9.49)$$

где $\alpha = g^r(H_\alpha), H_\alpha = \{x \in X | h(x) \geq \alpha\};$

Введенная ранее функция *F* - распределения $F^2(\cdot)$. сответствует отображению:

$$F^2(\cdot): \quad \underset{\alpha}{\underset{\cup}{[01]}} \to \underset{r}{\underset{\cup}{[01]}} \quad (9.50)$$

Тогда обратная ей функция $[F^2(\cdot)]^{-1}$

будет соответствовать отображению:

$$[F^2(\cdot)]^{-1}: \quad \underset{r}{\underset{\cup}{[01]}} \to \underset{\alpha}{\underset{\cup}{[01]}} \quad (9.51)$$

В пункте 8.4. мы отметили, что если задана функция $f_W(r): \underset{r}{\underset{\cup}{[01]}} \to \underset{\lambda}{\underset{\cup}{[-1,+\infty[}}$, где λ - есть параметр нормировки нечеткой меры, то существует отображение φ при котором $g^r_W(\cdot) = sem_W(\lambda)$ для фиксированного события W $\subseteq$ X. Тогда интересным является следующий результат:

$$sem_{h(x)}\left[f_W\left(F^2_{h(x)}([0,\alpha])\right)\right] = \left[F^2_{h(x)}([0,\alpha])\right]^{-1} = \alpha. \quad (9.52)$$

То есть обратная функция от функции *F* - распределения на *L,* полученная при интегрировании В - измеримой функции *h(x)* (нечеткого события *h(x))* по нечеткозначной нечеткой мере g^2 (•) определяет семантический спектр нечеткого события *h(x)* при известной функции $f_W(\cdot):[01] \to [1;+\infty[$.

В заключение отметим, что рассмотренные в данной главе вопросы, связанные с понятием нечеткого интеграла и основами нечетко-интегрального исчисления, позволяют увидеть основные механизмы обработки нечетких данных представленных с помощью формализма нечетких мер. Обоснованные свойства нечетких интегралов, позволяют корректно обрабатывать нечеткие данные при моделировании реальных задач принятия решений в условиях неопределенности. Особо следует отметить предложенный в главе нечеткий интеграл по расширенной нечеткой мере, который является аналогом интеграла

Лсбега-Стилтьеса. Полученный результат раскрывает возможности по моделированию дискретных и непрерывных процессов функционирования реальных объектов в задачах принятия решения в условиях объективной и субъективной неопределенности.

10. Преобразования пространств с нечеткими мерами

10.1. Условные нечеткие меры и их свойства

На основе приведенных ранее основных моментов теории нечетких мер и нечетких интегралов, рассмотрим различного рода преобразования пространств с нечеткими мерами, необходимые для моделирования в задачах поддержки принятия решения.
(Пусть $(X, \ B, \ g_x)$ пространство с нечеткой мерой. Если рассмотреть отображение φ: $X \rightarrow Y$, где Y некоторое произвольное пространство, то борелевская σ- алгебра В и нечеткая мера g_x индуцируют на Y σ -алгебру B^{φ} и нечеткую меру g_y соответственно. При этом, если $F \in B^{\varphi}$, то справедливо соотношение:

$$\forall F \subseteq Y, \exists! \varphi^{-1}(F) \in B, g_y(F) = g_x(\varphi^{-1}(F)); \quad (10.1)$$

То есть, если пространство Y связано с пространством X с помощью отображения φ, то на Y индуцируется нечеткая мера g_y, с помощью которой измеряется степень нечеткости на Y, связанная с нечеткой мерой на X.
Пусть $E \subseteq X$, $F \subseteq Y$. Рассмотрим все множество функций h(y) удовлетворяющих нечетко-интегральному соотношению:

$$g\left(E \cap \varphi^{-1}(F)\right) = \int_F h(y) \circ g_y(\cdot) \quad (10.2)$$

Все функции h(y) удовлетворяющие (10.2) образуют семейство функций $h: Y \rightarrow [01]$, удовлетворяющих подмножеству $E \subseteq X$ и условию $\varphi(x) = y$. Обозначим данное семейство функций через $\sigma\left(E \middle| \varphi(x) = y\right)$. Тогда, рассмотрев для всех множеств $E \in B$ семейства $\sigma\left(E \middle| \varphi(x) = y\right)$, получим некоторую меру $\sigma\left(\cdot \middle| \varphi(x) = y\right)$.

Определение 10.1. Функция множества
$\sigma\left(\cdot \middle| \varphi(x) = y\right)$: $2^X \rightarrow [01]$

для которой $\forall E \in \mathcal{B}$ выполняется условие (10.2) называется условной нечеткой мерой при условии φ (x) = y.
В дальнейшем для простоты обозначений условную нечеткую меру на X при фиксированном $y \in Y$ будем обозначать как

$$\sigma_x(\cdot|y): 2^X \to [01].$$

При $E \in \mathcal{B}$ нечеткая мера $\sigma_x(E|y)$ может быть интерпретирована как степень нечеткости суждения "один из элементов $E \subseteq X$ имеет место при заданном значении $y \in Y$". В том случае, когда в выражении (10.2) пространство Y не усекается до $F \subseteq Y$ будет иметь место следующее соотношение:

$$g_x(E) = \int_Y \sigma_x(E|y) \circ g_y. \quad \textbf{(10.3)}$$

Выражение (10.3) определяет связь нечеткой меры на X и индуцированной отображением $\varphi : X \to Y$ нечеткой меры $g_y(\cdot)$ через условную нечеткую меру $\sigma_x(\cdot|y)$. Исходя из определения условной нечеткой меры справедливы ее следующие свойства:
1) Для любого фиксированного подмножества $E \in \mathcal{B}$, условная нечеткаямера $\sigma_X(E|y)$ есть $\mathcal{B}^{(\varphi)}$ - измеримой функцией. То есть

$\forall E \in \mathcal{B}$:

$$\sigma_X(E|y): \quad Y \to [01]. \quad \textbf{(10.4)}$$

2) Для любого фиксированного элемента $y \in Y$, функция $\sigma_x(\cdot|y)$ является нечеткой мерой для пространства *(X, B),* то есть

$$\forall y \in Y, \qquad \sigma_x(\cdot|y): 2^X \to [01]. \quad (10.5)$$

Рассматривая условную нечеткую меру для подмножества $E \in \mathcal{B}$ ее можно определить согласно следующего иырпжения:

$$\sigma_X(E|y) = \int_E 1(x) \circ \sigma_X(\cdot|y), \quad (10.6)$$

где 1*(x)* определяется как функция полной неопределенности, то есть:

$$\forall x \in X, \ 1(x) = 1. \quad (10.7)$$

Выражение (10.6) может быть преобразовано согласно (9.29) к виду:

$$\sigma_X(E|y) = \int_E 1(x) \circ \sigma_X(\cdot|y) = \int_X [\chi_E(x) \wedge 1(x)] \circ \sigma_X(\cdot|y) = \qquad (10.8)$$

$$= \int_X \chi_E(x) \circ \sigma_X(\cdot|y),$$

где $\chi_E(x): X \to \{0,1\}$ - характеристическая функция множества

$E \in \mathbf{B}$.

В том случае когда вместо четкого множества $E \in B$ рассматривается произвольное нечеткое множество $\mu_E(x)$ справедливо выражение аналогичное (10.6):

$$\sigma_X(\underset{\sim}{E}|y) = \int_X \mu_{\underset{\sim}{E}}(x) \circ \sigma_X(\cdot|y), \qquad (10.9)$$

где $\underset{\sim}{E}$ - обозначает нечеткое подмножество на *X*.

Графически определение условной нечеткой меры можно представить в виде, представленном на рис. 10.1.

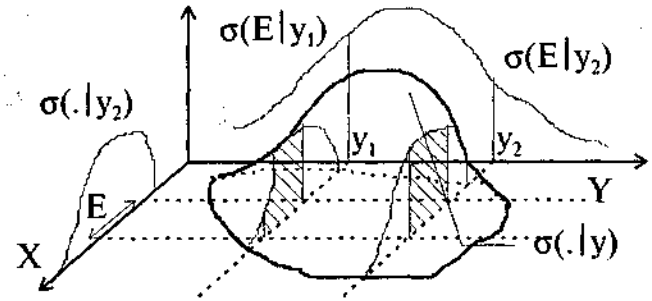


Рис. 10.1. Определение условной нечеткой меры.

До этого момента мы рассматривали лишь отображение $\varphi : X \to Y$. Если при этом существует произвольное отображение $f: X \to Y$, то существует сопряженная условная нечеткая мера на Y при фиксированных $x \in X$ такая, что при заданных $g_x(\cdot)$, $g_Y(\cdot)$, $\sigma_x(\cdot|y)$ вполняется соотношение:

$$\int_E \sigma_Y(F|x) \circ g_x = \int_F \sigma_X(E|y) \circ g_Y, \qquad (10.10)$$

где $\sigma_Y(\cdot|x)$ - сопряженная нечеткая мера. Равенство (10.10) можно рассматривать как нечеткий аналог формулы Байеса определения апостериорной вероятности. В этом смысле $g_x(\cdot)$ может рассматриваться как априорная нечеткая мера, а $g_x(\cdot|y)$ - апостериорная нечеткая мера. Учитывая соотношение (10.9), формула (10.10) может быть распространена и на нечеткие подмножества $\underset{\sim}{E}$ и $\underset{\sim}{F}$, то есть:

$$\int_{\underset{\sim}{\mu}_{E(x)}} \sigma_Y\left(\underset{\sim}{F}|x\right) \circ g_x = \int_{\underset{\sim}{h}_{F(x)}} \sigma_X\left(\underset{\sim}{E}|y\right) \circ g_Y. \qquad (10.11)$$

Возникает вопрос, каким образом определить апостериорную нечеткую меру при известных априорных нечетких мерах и сопряженной условной нечеткой мере.

Лемма 10.1. Пусть заданы два пространства $(X, \mathbf{B}, g_x)$ и $(Y, \mathbf{E}, g_Y)$ с нечеткими мерами которые связаны между собой условной нечеткой мерой $\sigma_X(\cdot|y)$. Тогда сопряженная условная нечеткая мера $\sigma_Y(\cdot|x)$ удовлетворяет ограничениям:

1. Если $g_X(\{x_i\}) > \int_F \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y$, то

$$\sigma_Y(F|x_i) = \int_F \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y \qquad (10.12)$$

2. Если $g_X(\{x_i\}) = \int_F \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y$, то,

$$\sigma_Y(F|x_i) \geq \int_F \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y, \qquad (10.13)$$

где $F \in \mathbf{E}$.

Доказательство. Согласно (10.3) $\forall x_i \in X$ справедливо соотношение:

$$g_X\left(\{x_i\}\right) = \int_Y \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y(\cdot).$$

В то же время для произвольного $F \in \mathbf{E}$ используя (10.10) можем записать:

$$\int_F \sigma_X\left(\{x_i\}|y\right) \circ g_Y = \int_{\{x_i\}} \sigma_Y\left(F|x\right) \circ g_X = \sigma_Y\left(F|x_i\right) \wedge g_X(\{x_i\}).$$

Рассматривая полученное выражение получаем два случая:

а) Если $g_X\left(\{x_i\}\right) > \sigma_Y(F|x_i)$, то это равносильно тому, что:

$$g_X(\{x_i\}) > \int_F \sigma_X(\{x_i\}|y) \circ g_Y$$, а следовательно:

$$\sigma_Y(F|x_i) = \int_F \sigma_X(\{x_i\}|y) \circ g_Y.$$

б) Если $g_X\left(\{x_i\}\right) \leq \sigma_Y(F|x_i)$, то имеем

$g_X(\{x_i\}) = \int\limits_F \sigma_X(\{x_i\}|y) \circ g_Y$, а следовательно:

$\sigma_Y(F|x_i) \geq \int\limits_F \sigma_X(\{x_i\}|y) \circ g_Y$.

Оба случая доказывают соотношения (10.12), (9.51). Что и следовало доказать.

Следствие. Используя полученные выражения для дискретных множеств X и Y соотношения (10.12) (10.13) могут быть представлены в виде:

а) Если $g_X(x_i) > \sigma_X(x_i|y_j) \wedge g_Y(y_j)$, то

$$\sigma_Y(y_i|x_i) = \sigma_X(x_i|y_j) \wedge g_Y(y_j). \quad (10.14)$$

б) Если $g_X(x_i) = \sigma_X(x_i|y_i) \wedge g_Y(y_i)$, то

$$\sigma_Y(y_i|x_i) \geq \sigma_X(x_i|y_j) \wedge g_Y(y_j). \quad (10.15)$$

При этом для вычисления сопряженной условной нечеткой меры в случае б) можно использовать соотношение:

$$\sigma_Y(y_j|x_i) = \frac{1 + \sigma_X(x_i|y_i)}{2}; \quad (10.16)$$

которое однозначноопределяет значение условной нечеткой меры**.**

10.2. Нечеткие меры на декартовых произведениях пространств

Пусть имеется два пространства с нечеткими мерами $(X,\ \mathrm{B},\ g_1)$ и $(Y,\ \mathrm{B}_Y,\ g_2)$. Подмножество $H \subseteq X \times Y$ декартового произведения пространств X и Y задает бинарное отношение между этими пространствами. Пусть $Z = X \times Y$, тогда $H \subseteq Z$. Бинарное отношение H позволяет сопоставить каждому элементу $x \in X$ его образ в Y определяемый соотношением:

$$im_H x \stackrel{def}{=} \{y \in Y \,|\, (x, y) \in H\} = F(x). \quad (10.17)$$

Аналогично (10.17), каждому $y \in Y$ сопоставляется прообраз в X в виде:

$$coim_H y \stackrel{def}{=} \{x \in X \,|\, (y, x) \in H\} = \mathrm{E}(y). \quad (10.18)$$

Используя данные соотношения, можно ввести отображение индексирования.

Определение 10.2. Для произвольного бинарного отношения $H \subseteq X \times Y$ отображение вида:

$$ind_H : X \to P(Y),$$
$$ind_H(x) = im_H(x). \qquad (10.19)$$

где *P(Y)* булеан множества *Y*, называется индексированием подмножеств множества *Y* элементами из $x \in X$, порожденным отношением *H*.

Исходя из этого определения очевидно, что произвольное отображение $\varphi: X \to P(Y)$ совпадает с индексированием, порожденным подходящим отношением $H_\varphi = \{(x, y) | \, y \in \varphi(x)\}$. Следовательно, существует биективное соответствие между множествами

$P(X \times Y)$ и $\mathrm{Map}(X, P(Y)) = \{\varphi\}$

для любых двух множеств *X* и *Y*, где обозначено: P(·) - булеан множества, а Map(·,·) - множество всех отображений из первого множества во второе.

Используя отображение индексирования легко расширить его до отображения из *P(X)* в P(*Y*). Для этого рассмотрим отображение вида:

$$\Gamma_H(E) = \bigcap_{x \in E} ind_H(x) = \bigcap_{x \in E} F(x)$$

$$\Gamma'_H(F) = \bigcap_{y \in F} ind_H(y) = \bigcap_{y \in F} E(y)$$

Веденные таким образом отображения, согласно соответствия Галуа, переводят произвольные подмножества в замкнутые и тем самым индуцируют отображение между замкнутыми подмножествами в *P(X)* и P(*Y*).

Введенные в рассмотрение выше понятия, позволяют представить произвольное отношение $H \subseteq (X \times Y)$ в виде объединения декартовых произведений подмножеств E_i и F_i; связанных между собой отображениями (10.20) и (10.21).

Лемма 10.2. Произвольное бинарное отношение $H \subseteq X \times Y$ можно представить в виде:

$$H = \bigcup_{i=1}^{\infty} [E_i \times F_i], \qquad (10.21)$$

где $E_i \in P(X), \quad F_i \in P(Y), \quad F_i = \Gamma_H(E_i)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to P(Y)$ биективно связанное с отношением H такое, что:

$$\varphi(x_i) = im_H x_i = F(x_i) \in P(Y).$$

Отображение φ есть индексирование множества Y элементами из X, порожденное отношением $H \subseteq X \times Y$. Определим отображение:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi(x_j), & i = j; \\ \varnothing, & i \neq j. \end{cases}$$

Отображение $\varphi: X \to P(Y)$ есть практически покомпонентное представление отображения φ (x), то есть

$$\varphi(x) = \left\{ \bigcup_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) \middle| \quad i = \overline{1,\infty} \right\}.$$

В силу биективности множеств $P(X \times Y)$ и $\mathrm{Map}(X,P(Y))$ отображению φ(x) соответствует отношение вида:

$$H_i = x_i \times im_H x_i$$

Тогда справедливо представление отношения H в виде:

$$H = \bigcup_{i=0}^{\infty} [x_i \times im_H x_i].$$

Для подмножества $E_i \subseteq X$ отображение (10.20) ставит в соответствие подмножество $F_i = \Gamma_H(E_i)$. Однако, отображение $\Gamma_H(\cdot)$, являясь элементом соответствия Галуа, обращает включения, то есть если $E_i \subsetneq F_j$, то $\Gamma_H(E_i) \supsetneq \Gamma_H(E_j)$ и следовательно $\forall x_k \in E_i, \quad F_i = \Gamma_H(E_i) \subseteq F(x_k)$.

Тогда $\forall x_k \in E_i, \quad [F_i \times E_i] \subseteq [x_k \times im_H x_k]$, причем, найдется такое E_i, что будет выполняться равенство отношений. Следовательно справедливо:

$$H = \bigcup_{i=0}^{\infty} [E_i \times F_i], \quad F_i = \Gamma_H(E_i).$$

Используя полученный результат можно определить нечеткую меру на декартовом произведении пространств с заданными на них нечеткими мерами. Нечеткая мера декартового произведения двух множеств определяется операцией *min*. Следовательно нечеткая мера произвольного отношения H будет.

Определение 10.3. Нечеткая мера произвольного отношения $H \subseteq X \times Y$ заданного на декартовом произведении пространств (X, B_x, g_1) и (Y, B_y, g_2) определяется соотношением:

$$g(H) = \bigvee_{i=1}^{\infty} \{ g_1(E_i) \wedge g_2(F_i) \}, \quad (10.23)$$

где $F_i = \Gamma_H(E_i)$, а $\Gamma_H(\cdot)$ - отображение вида (10.20) между $E_i \subseteq X$, и $F_i \subseteq Y$. Нечеткая мера произвольного отношения $H \subseteq X \times Y$ заданного на декартовом произведении представляется в виде поверхности, как показано на рис. 10.2.

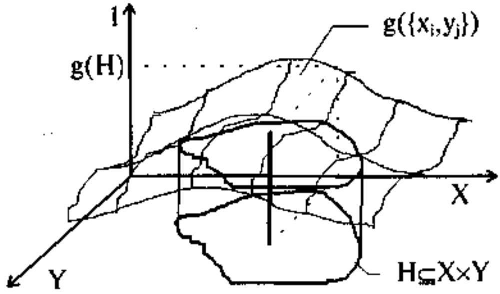


Рис. 10.2. Нечеткая мера на декартовом произведении пространств.

Определение 10.3 позволяет связать меры g_1 и g_2 с мерой на декартовом произведении. Однако, непосредственное использование соответствия Галуа для практического определения нечеткой меры подмножества $H \subseteq X \times Y$ затруднительно. Можно показать, что нечеткая мера g(H) Однозначно определяется через нечеткий интеграл Суджено (9.4).

Лемма 10.3. Для подмножества $H \subseteq X \times Y$ нечеткая мера может быть определена через нечеткий интеграл следующим образом:

$$g(H) = \int_Y g_1(E(y)) \circ g_2(\cdot) = \int_X g_2(F(x)) \circ g_1(\cdot), \quad (10.24),$$

где $g_1 : 2^x \to [01], g_2 : 2^Y \to [01]$.

Доказательство. В силу (10.17), (10.18) можем отметить, что $F(x) \in P(Y)$, а $E(y) \in P(x)$.

Отсюда следует, что $g_1(E(y))$ - является B_Y - измеримой функцией. Аналогично $g_2(E(x))$ является B_x - измеримой функцией. В силу этого интеграл (10.24) существуют.

Для выполнения равенства в (10.24) достаточно доказать, что любой из интегралов соответствует нечеткой мере отношения *H* определенной в

(10.23). Для второго интеграла ситуация будет аналогичной. Интеграл Суджено для первого из интегралов в (10.24) определяется выражением:

$$\int_Y g_1(E(y)) \circ g_2(\cdot) = \sup_{\alpha\in[01]} \{\alpha \wedge g_2(F_\alpha)\},$$

$$F_\alpha = \{y \mid g_1(E(y)) \geq \alpha, \alpha \in [01]\}$$

Рассмотрим более детально определение α - уровневого множества F_α. Если $\alpha = g_1(E_n)$, то условие $g_1(E(y)) \geq g_1(E_n)$ выполняется в случае если $E_n \subseteq E(y)$, что следует из условия монотонности нечеткой меры. Тогда α - уровневое множество F_α можно переопределить в виде:

$$F_\alpha = \{y \mid \quad E(y) \supseteq E_n\}.$$

Иначе, данное соотношение можно переписать как:

$$F_\alpha = \left\{y \middle| \bigcap_{y\in Y} E(y) = E_n\right\}.$$

Однако, $\bigcap_{y\in Y} E(y) = \Gamma'_H(F_\alpha)$, где $\Gamma'_H(\cdot)$ есть отображение (10.21). Следовательно α - уровневое множество F_α является прообразом множества $E_n \subseteq X$ относительно отображения $\Gamma'_H(\cdot)$ соответствия Галуа и притом максимальным. В силу условия монотонности нечеткой меры $\forall\ F \subseteq F_\alpha$, $g_2(F) \leq g_2(F_\alpha)$. Тогда $g_2(F_\alpha)$ являются максимальным значением меры $g_2(\cdot)$ для подмножества соответствующего E_n, а следовательно и выбранному α - уровню для функции $g_1(E(y))$. Исходя из сказанного выше справедливо, что $F_\alpha = F_n = \Gamma'_H(E_n)$. В силу однозначного соответствия $\alpha = g_1(E_n)$ каждому E_n соответствует α, а следовательно получаем:

$$\int_Y g_1(E(y)) \circ g_2(\cdot) = \sup_\alpha\{\alpha \wedge g_2(F_\alpha)\} =$$

$$\sup_{E_n}\{g_1(E_n) \wedge g_2(\Gamma'_H(E_n))\} = \bigvee_n\{g_1(E_n) \wedge g_2(F_n)\},$$

Что соответствует определению 10.3. Для второго интеграла (10.24) риссуждения и результат аналогичны. Следовательно лемма доказана.
Для дальнейшего рассмотрения материала приведем без доказательства теорему Суджено-Фубини.

Теорема 10.1. Пусть $(X,\ \mathbf{B}_X,\ g_y)$ и $(Y,\ \mathbf{B}_Y,\ g_x)$ два пространства с нечеткими мерами, и пусть $g_z = g_x \times g_y$ - нечеткая мера заданная на $Z{=}X{\times}Y$. Тогда для g_z -измеримой функции $h(x,y)\colon\ X\ \times\ Y\to[01]$ справедливо соотношение:

$$\int_Z h(x,y)\circ g_z = \int_X\left[\int_Y h(x,y)\circ g_Y\right]\circ g_x\,. \qquad (10.25)$$

Данная теорема является аналогом теоремы Фубини для обычных интегралов.

Отметим, что доказанная выше лемма 10.3 определяет нечеткую меру на четком отношении $H \subseteq X \times Y$. Однако в том случае, когда на $X \times Y$ задано нечеткое отношение, то оно определяет расширенную нечеткую меру на X× *Y*.

Теорема 4.2. Пусть $h(x,y)\ :\ X{\times}Y\to[01]$ - нечеткое отношение, а на X и Y заданы нечеткие меры g_1 и g_2 соответственно. Тогда нечеткая мера g на пространстве $X{\times}Y$ является расширенной нечеткой мерой, порожденной нечетким отношением h(x,y) и определяется как:

$$\tilde{g}(h)= \int_{X\times Y} h(x,y)\circ g_H(\cdot)\ , \qquad (10.26)\ ;$$

где $g_H(\cdot)=\int_Y g_1(E(y))\circ g_2(\cdot)$, а E(y) - определяется соотношением (10.18).

Доказательство. Нечеткое отношение *h(x,y)* может быть представлено через свои α -срезы в виде:

$$h(x,y) = \bigvee_i\left(\alpha_i \wedge \chi_{H_{\alpha_i}}(x,y)\right),$$

где $i=\overline{1,\infty}$, $\alpha\in[01]$, $\chi_{H_{\alpha_i}}(x,y)$, - характеристическая функция множества $H_\alpha \subseteq X \times Y$ α -уровня. Тогда для фиксированного $\alpha \in [01]$ выполняется условие (10.24) леммы 10.3 и можно записать:

$$g_{H_\alpha} = \int_Y g_1\left(E_\alpha(y)\right)\circ g_2(\cdot) = \int_X g_2\left(F_\alpha(x)\right)\circ g_1(\cdot),$$

где при этом если $\alpha_i \le \alpha_j$ то $E_{\alpha_i} \supseteq E_{\alpha_j}, F_{\alpha_i} \supseteq F_{\alpha_j}$. Для второго интеграла формально имеем:

$$\forall x \in X,\quad g_2(F_\alpha(x)) = \int_Y \chi_{F_\alpha(x)}(y)\circ g_2,$$

где $\chi_{F_\alpha(x)}(y)$- характеристическая функция на *Y* для любого фиксированного $x\ \in\ X$. Рассмотрев совокупность всех таких функций для всех $x\ \in\ X$ получим характеристическую функцию отношения H_α:

$\chi_{H_\alpha}(x,y) = \chi_{F_\alpha(x)}(y)$. Следовательно, подставив это выражение в зависимость для $g_2(F_\alpha(x))$ получим: ,

$$g_2(F_\alpha(x)) = \int_Y \chi_{H_\alpha}(x,y) \circ g_2.$$

Тогда нечеткая мера α -уровня определяется соотношением:

$$g_{H_\alpha} = \int_X \left[\int_Y \chi_{H_\alpha}(x,y) \circ g_2 \right] \circ g_1.$$

Если теперь рассмотреть все α -уровни нечеткого отношения *h(x,y)*, то нечеткая мера *g(h)* будет определяться соотношением:

$$g_h(\cdot) = \vee_i \left\{ \alpha_i \wedge g_{H_{\alpha_i}}(\cdot) \right\} = \vee_i \left\{ \alpha_i \wedge \int_X \left[\int_Y \chi_{H_{\alpha i}}(x,y) \circ g_2(\cdot) \right] \circ g_1(\cdot) \right\}.$$

Используя свойства нечеткого интеграла (9.12) (9.13) может преобразовать это выражение к виду:

$$g_h(\cdot) = \vee_i \left[\int_X \left[\int_Y \left(\alpha_i \wedge \chi_{H_{\alpha_i}}(x,y) \right) \circ g_2(\cdot) \right] \circ g_1(\cdot), \right.$$

а гласно свойства (9.21) получим:

$$g_h(\cdot) = \int_X \left[\int_Y \left\{ \vee_i \left(\alpha_i \wedge \chi_{H_{\alpha i}}(x,y) \right) \right\} \circ g_2(\cdot) \right] \circ g_1(\cdot) =$$

$$= \int_X \left[\int_Y h(x,y) \circ g_2(\cdot) \right] \circ g_1(\cdot).$$

Тогда согласно теоремы Суджено-Фубини имеем:

$$\tilde{g}_h(\cdot) = \int_{X \times Y} h(x,y) \circ g_H(\cdot) = g_h(\cdot).$$

То есть нечеткая мера на нечетком отношении пространств есть не что иное как расширенная нечеткая мера на $X \times Y$ порожденная нечетким отношением *h(x,y).* Что и требовалось доказать.

10.3. *H*-соответствия. Нечеткие меры доверия и правдоподобия как *H*-соответствия

Будемполагать, что на пространстве (X, B) задала нечеткая мера $g: 2^X \to [01]$.

Определение 10.4. Если на *X* задано отношение $H \subseteq X \times X'$, $X' \equiv X$, то функция $\mu(\cdot): X \to [01]$ называется *H*-соответствием по мере *g*, если выполняется условие:

$$\mu(x) = g(E_H(x)), \quad (10.27)$$

где $E_H(x) = \{x' | (x, x') \in H \subseteq X \times X'\}$.

Практически отношение $H \subseteq X \times X'$ при известной нечеткой мере *g* задает функцию $\mu(\cdot)$ *H* - соответствующую *g*, устанавливая отображение $\varphi_H: g \to F(X)$, F(X) - множество всех нечетких подмножеств множества *X*. Соотношение (10.27) может быть представлено через нечеткий интеграл Суджено в виде:

$$\mu(x) = \int_{X'} \chi_{E_H(x)}(x') \circ g(\cdot) = \int_{E_H(x)} 1(x') \circ g(\cdot), \quad (10.28)$$

где $\chi_{E_H(x)}(x')$ - характеристическая функция множества $E_H(x) \subseteq X'$ индексированного значением $x \in X$, $1(x')$ - функция неопределенности: ;

$\forall x' \in X', 1(x') = 1.$

Графически Н-соответствие может быть проиллюстрировано в виде представленном на рис. 10.3.

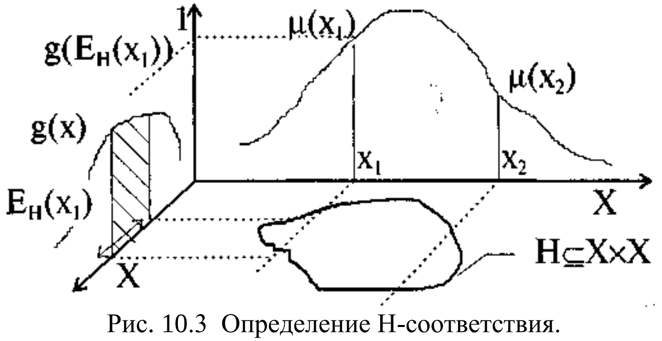


Рис. 10.3 Определение Н-соответствия.

В том случае когда соответствие нечеткой мере g устанавливается нечетким отношением $h(x,x')$: $X \times X' \to [01]$ *H*- соответствующая функция μ *(x)* определяется соотношением:

$$\mu(x) = \int_{X'} h_x(x') \circ g(\cdot), \quad (10.29)$$

где $h_x(x') = h(x, x')$.

Следовательно, отображение $\varphi_н$, определяемое заданным отношением $H \subseteq X \times X$ позволяет определить функцию принадлежности (степени нечеткости) H- соответствующую нечеткой мере $g{:}2^X \to [01]$. Кроме того, при определенных видах отображения φ можно получить значение функции $\mu(x)$ удовлетворяющей условиям плотности нечеткой меры H - соответствующей нечеткой мере g.

Рассмотрим следующую теорему, определяющую преобразование распределения вероятности в распределение возможности на X как H - соответствие.

Теорема 10.3 Мера возможности, определяемая соотношением:

$$\mu(x) = \sum_{x' :\, p(x') \le p(x)} p(x'), \tag{10.30}$$

является нечеткой мерой на X H - соответствующей мере вероятности $P_X(\cdot){:}\ 2^X \to [01]$ с функцией плотности вероятности $p(x){:}\ X \to [01]$ если отношение H задается характеристической функцией вида:

$$\chi_H(x, x') = \begin{cases} 1, & p(x) \ge p(x') \\ 0, & p(x) < p(x') \end{cases} \tag{10.31}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим выражение (10.30). Для меры вероятности $P_X(\cdot)$ справедливо соотношение:

$$P_X(A) = \sum_{x \in A} p(x).$$

Тогда (10.30) можно переписать в виде:

$$\mu(x) = \sum_{x' \in A_x} p(x'),$$

где $A_X = \{x' | p(x) \ge p(x')\}$.

Следовательно представляя множество A_x его характеоистической функцией, можем записать:

$$\mu(x) = \sum_{x' \in A_X} p(x') = \sum_{x' \in X'} \chi_{A_X}(x') \cdot p(x') = P_X(A) =$$

$$\int_{X'} \chi_{A_X}(x') \circ P_X(\cdot) = \int_{A_X} 1(x') \circ P_X(\cdot).$$

Данное выражение соответствует выражению (10.28) в случае когда $\forall x \in X,\ A_X = E_H(x)$, где $E_H(x)$ определяется согласно (10.18). Данное условие будет выполняться когда отношение Н задается характеристической функцией вида:

$$\chi_H(x,x') = \begin{cases} 1, & p(x) \ge p(x') \\ 0, & p(x) < p(x') \end{cases}$$

Что и требовалось доказать.

Приведенная теорема показывает, что известные соотношения связывающие нечеткие меры вероятности и возможности являются частным случаем полученного соотношения для Н-соответствия между функциями распределения нечетких мер. Более того, указанная конструкция Н-соответствия нечетких мер на пространстве *X* позволяет до некоторой степени обобщить результаты и предложения Шейфера о порождении мер на основе так называемой базовой вероятности *m(·)* определяемой выражениями (8.4):

$$m: 2^X \to [0\,1],$$
$$\sum_{A \subseteq X} m(A) = 1.$$

Напомним, что множества $A_i \subseteq X$ для которого $m(A_i) > 0$ называются фокальными элементами. Согласно определений 8.3, 8.5 базовая вероятность *m(·)* позволяет определить меру доверия и правдоподобия согласно следующих соотношений:

$$\begin{aligned} Bel(A) &= \sum_{B \subseteq A} m(B), \\ Pl(A) &= \sum_{B \cap A \ne \varnothing} m(B). \end{aligned} \qquad \textbf{(10.32)}$$

Функция *m(·)* задает аддитивное распределение уверенности на множестве фокальных элементов, что не всегда оправдано. В более общем случае следует предположить, что мера *m(·)* обладает свойствами нечеткой меры (определение 8.1) заданной на степенном множестве $P(X) = 2^X$. В этом случае можно использовать предлагаемый подход для построения функций распределения нечеткости Н-соответствующих заданной "базовой" нечеткой мере $g: 2^X \to [0\,1]$.

Рассмотрим эту конструкцию более подробно. Пусть задано пространство *(X,* В) и нечеткая мера $g: 2^X \to [0\,1]$. Зададим на пространстве *X* отношение $H \subseteq X \times X'$ такое, что $\forall x_i, x_j \in X,\quad x_i \ne x_j \Rightarrow coim_H x_i \ne coim_H(x_j)$, то есть для

$$\forall E(x_i), E(x_j) \subseteq X \Rightarrow E(x_i) \neq E(x_j) \quad (10.33)$$

Таким образом отношение H порождает множество подмножеств $\{E(x)\} \subseteq X', \quad E(x) \in P(X')$ индексированные элементами этогоже множества X $(X \equiv X')$. При таком задании отношения H существует функциональное отношение между множеством X и его степенным множеством $2^X = P(X')$, а следовательно на P(X') индуцируется нечеткая мера $\varphi_{P(x)}: PP(X') \to [01]$, где $PP(X')$ множество всех подмножеств множества P(X'), которая однозначно соответствует нечеткой мере g(·). То есть выполняется условие:

$$\varphi_{P(x')}(E(x)) = g_X(x) \quad (10.34)$$

А кроме того справедливо соотношение:

$$\varphi_{P(x')}(\{E(x)\}) = \int_{\{x\}} \mathrm{l}(x) \circ g(\cdot), \quad (10.35)$$

где $\{E(x)\} \subseteq PP'(X'), \quad \{x\} \subseteq X.$

В случае выполнения условия (10.33) множества $E(x) \in P(X')$ могут рассматриваться как фокальные элементы на X = X' индексированные элементами x $\in X$, а построенная согласно (10.34), (10.35) мера $\varphi_{P(x')}(\cdot)$ играет ту же роль, что и функция *m(·)* определенная согласно (8.4) базовой вероятности в схеме Шейфера. Тогда имеется возможность построить на основании базовой нечеткой меры g(·), выдерживая логику построения мер по Шейферу, меры доверия и правдоподобия *H*- соответствующие мере g(·), а именно:

$$Bel_H(A) = \int_{\{x|E(x)\subseteq A\}} \mathrm{l}(x) \circ g(\cdot), \quad (10.36)$$

$$Pl_H(A) = \int_{\{x|E(x)\cap A \neq \varnothing\}} \mathrm{l}(x) \circ g(\cdot), \quad (10.37)$$

где $A \subseteq X' \equiv X$.

Указанные зависимости являются обобщениями конструкций мер доверия и правдоподобия (7.32). Используя приведенные выше рассуждения легко доказывается следующий лемма.

Лемма 10.4. Если $g(\cdot): 2^X \to [01]$ есть вероятностная мера и для отношения *H* выполняются условия (10.33), то мера правдоподобия и доверия Н-соответствующие мере g(·) удовлетворяют соотношениям (10.32).

Доказательство. Пусть

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & E(x) \subseteq A; \\ 0, & E(x) \supset A. \end{cases}$$

Тогда $\chi(x)$ есть характеристическая функция множества $\{x|\ E(x) \subseteq A\}$ и согласно (10.36) справедливо соотношение:

$$Bel_H(A) = \int_X \chi(x) \circ g(\cdot) = g_x\left(\{x|E(x) \subseteq A\}\right) = \sum_{\{x|E(X) \subseteq A\}} g_X(x).$$

Но, в силу (10.34) и (10.35) существует однозначное соответствие между мерой g(·) и $\varphi_{P(X)}(\cdot)$ для которой $\varphi_{P(X)}(E(x)) = g(x)$ и следовательно мера $\varphi_{P(X)}(\cdot)$ является вероятностной и удовлетворяет (8.4). Тогда получаем:

$$Bel_H(A) = \sum_{B \subseteq A} \varphi_{P(X)}(B),$$

где $B = E(x) \subseteq X$. Множества *B* играют роль фокальных элементов.

Полученное выражение совпадает с выражением (10.32) для *Bel(A).* Для меры правдоподобия рассуждения аналогичны. Следовательно лемма доказана.

В заключении этого параграфа отметим, что определение Н-соответствия между нечеткими мерами, заданными на пространстве *(X,* В) могут быть распространены и на случай произвольных бинарных отношений $H \subseteq X \times Y$. В этом случае отображение $\varphi_н$ определяет преобразование нечеткой меры на *X* в нечеткую меру на Y, Н - соответствующую мере на *X:*

$$\varphi_H : g_X(\cdot) \to \mu_Y(\cdot),$$

где $\mu_Y(\cdot) : 2^Y \to [01]$ - есть функция *Н*-соответствия:

$$\mu_Y(y) = g_X(E_H(y)).$$

Фактически рассмотрев семейство *М* всех Н-соответствий можно записать

$$M \subseteq F\ (Y),$$

где *F(Y)* - множество функций распределения нечеткости заданных на пространстве *Y.* Обозначив $\mu_Y^{H_i}(y)$ функцию Н-соответствия можно определить нечеткое отношение $T: M\times Y \to [01]$ с функцией определяемой соотношением:

$$T(y,H)=\mu_Y^{H_i}(y). \quad (10.38)$$

В этом случае, исходя из результата доказанного в лемме 10.3, нечеткую меру произвольного отношения $H_i \in M$ можно определить как:

$$g(H_i)=\int_Y T(y,H_i)\circ g_Y(\cdot) \cdot \quad (10.39)$$

Таким, образом, используя Н-соответствия можно определить нечеткую меру отношения $H\subseteq X\times Y$.

10.4. Н-операции над нечеткими мерами

В предыдущем пункте было отмечено, что Н-соответствие задает отображение, которое переводит одну нечеткую меру в другую заданную ; либо на том же пространстве *X*, либо на пространстве $Y\neq X$, что зависит от характера заданного отношения Н. В том случае когда на *X* и Y заданы свои нечеткие меры, то интересно рассмотреть случай композиции этих мер, с результатом зафиксированным на множестве Z, которое может быть либо $Z=X$, либо *Z*= *Y*, либо $Z=H\times Y$.

Пусть, как и раньше зафиксированы два пространства (X, B_X, g) (Y, B_Y, g_2) с нечеткими мерами.

Лемма10.5. Нечеткая мера $g_H(\cdot)$ заданная на множестве $X \times Y$, $(H\subseteq X\times Y)$ есть функция, задающая отображение вида:

$$g_H(\cdot): P(X)\times P(Y)\to[01], \quad (10.40)$$

где *P(X)* - степенное множество (множество всех подмножеств) множества X, *P(Y)* - то же для множества Y.

Доказательство. Нечеткая мера $g_i(\cdot), i=\overline{1.2}$ задается как функция множества $g_1(\cdot):2^X\to[01],(2^X=P(X))\cdot$ Согласно определения 10.3. ыражения (10.23) мера $g_H(\cdot)$ может быть представлена в виде:

$$g(H)=\bigvee_{i=1}^{\infty}\{g_1(E_i)\wedge g_2(F_i)\},$$

где $F_i \in B_Y$, $E_i \in B_X$. Согласно этого выражения для *g(H)* существуют такие подмножества $E^*\in B_X$ и $F^*\in B_Y$, что справедливо:

$$g(H)=g_1(E^*)\wedge g_2(F^*).$$

но $E^* \in P(X)$, а $F^* \in P(Y)$, следовательно для любого отношения $H \subseteq X \times Y$ мера *g(H)* есть функция удовлетворяющая соотношению (10.40). Что и требовалось доказать.

Лемма 10.5. позволяет рассмотреть ее расширение на случай когда одно из множеств *X* или *Y* представляет из себя декартово произведение других множеств S. Тогда существуют некоторое отношение $R \subseteq [X \times Z] \times Y$ для которого нечеткая мера

$$g_R(\cdot):[P(X)\times P(Z)]\times P(Y)\to[01]. \qquad (10.41)$$

Если на декартовом произведении булеанов произвольных множеств $X_S, s=\overline{1,N_s}$ задать отображение $\omega: P(X_1)\times\ldots\times X(X_{N_s})\to P(X)$

представляющее собой N_s -арную операцию, то мы имеем возможность рассмотреть многоосновную алгебру заданную на семействе булеанов множеств X_s. Рассмотрим этот момент подробнее. Пусть $P=\{P(X_S)|\, s\in S\}$ - произвольное семейство булеанов множеств X_s, индексированных элементами из *S* множества сортов. Обозначим через $O_P(P)$ множество всех операций вида:

$$\omega: P(X_{S_1})\times\ldots\times P(X_{S_N})\to P(X_S). \qquad (10.42)$$

Тем самым определено отображение

$$t: O_P(P)\to S\times S. \qquad (10.43)$$

Если $\Omega = \{\omega\}$ - множество символов операций то исходя из (10.42) определяется сигнатура алгебры над множеством сортов S как отображение:

$$\text{type}: \Omega\to S\times S. \qquad (10.44)$$

Теперь дадим определение многоосновной (много сортной) алгебры над булеанами множеств $P(X_S)$.

Определение 10.5. Семейство P булеанов множеств X_s называется много сортной универсальной алгеброй сигнатуры Ω, если задано такое отображение $\delta:\ \Omega\ \to\ O_P(P)$, которое делает следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "type"] \arrow[dr, "\delta"'] & S\times S \\
& O_P(P) \arrow[u, "t"']
\end{tikzcd}$$

в том смысле, что $type = t\circ\delta$, где“ $\circ$ ”- операция композиции.

В том случае, когда множество сортов оснований Ω-алгебры вырождается до одного сорта (например, операции ω заданы на булеане $P(X)$, $\omega: P^h(X)\to P(X)$) мы рассматриваем одноосновную алгебру с сигнатурой Ω.

Отметим, что если на *P(X)* задана бинарная операция $\omega: P(X)\times P(X)\to P(X)$, то множество *P(X)* называется группоидом, а действующая в *P(X)* бинарная операция ω - законом внутренней композиции.

Определение 10.6. Бинарной Н-операцией называется оператор, ставящий в соответствие нечетким мерам

$g_1: 2^X \to [01]$ и $g_2: 2^Y \to [01]$

заданным соответственно на пространствах *X* и *Y*, нечеткую меру $g: 2^Z \to [01]$, такую, что выполняется:

$$\forall C \subseteq Z,\ g(C) = g_H(H \cap \omega^{-1}(C)),$$

где $g_H(\bullet)$ определяется согласно (10.23), $H \subseteq X\times Y$

$\omega^{-1}(C) \in P(X\times Y),\ \omega: P(X)\times P(Y) \to P(Z)$ - бинарная операция в трехосновной алгебре реализующая такую функцию, что:

$$A\times B \subseteq A'\times B' \in P(X)\times P(Y) \Rightarrow C \subseteq C' \in P(Z).$$

Если $X\equiv Y\equiv Z$, ω есть бинарная операция заданная на X. В качестве такой операции может выступать операция min, max, или арифметические операции исчисления интервальной математики. Если в качестве операции ω используется операция max, то нечеткая мера $g(\cdot)$ есть результат Н-объединения нечетких мер g_1 и g_2. Для Н-операции введем следующие обозначения:

$$g(\cdot) = H\{g_1 \omega g_2\} = H_\omega(g_1, g_2). \quad (10.45)$$

Графически Н-операция над нечеткими мерами может быть представлена в виде рис 10.4.

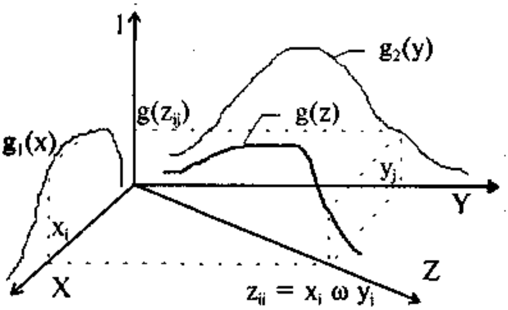


Рис.10.4 . Н-операция над нечеткими мерами.

В том случае когда ω определяет бинарную операцию в одноосновной алгебре Н-операция представляет собой оператор вида:

$$H_\omega : F(X) \times F(X) \to F(X), \qquad (10.46)$$

где *F(X)* - множество всех распределений нечетких мер на пространстве *X,* и выступает в роли закона нечеткой внутренней композиции.

Определение 10.7. Упорядоченная пара состоящая из *F(X)* и закона внутренней нечеткой композиции H_ω на *F(X)* называется нечетким группоидом $(F(X), H_\omega)$ для нечетких мер.

Исходя из определения 10.6. результирующая нечеткая мера g(·) H_ω- операции может быть определена согласно следующей теоремы.

Теорема 10.4. Нечеткая мера подмножества C $\subseteq$ Z являющаяся результатов H_ω - операции над нечеткими мерами $g_1 : 2^X \to [01]$, и $g_2 : 2^Y \to [01]$, удовлетворяет соотношению:

$$g(C) = H_\omega(g_1, g_2) = \int_B g_1(E(y) \cap A) \circ g_2 = \qquad (10.47)$$

$$= \int_A g_2(F(x) \cap B) \circ g_1$$

где $y \in Y,\ x \in X,\ C \subseteq Z,\ H \subseteq X \times Y,\ C = \omega(A, B),\ A \subseteq X,\ B \subseteq Y,$
$E(y), F(x)$ - определяются по (10.17), (10.18).

Доказательство. Согласно определения (10.6) нечеткая мера *g(C)* определяется исходя из выражения: $g(C) = g_H(H \cap \omega^{-1}(C)).$

Так как $\omega^{-1}(C) \in P(X \times Y)$, то на $X \times Y$ существует отношение $Q \subseteq X \times Y$, такое, что $Q = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$. Тогда $E^Q(y) = \{X | (x, y) \in Q\}$, а следовательно
$\forall y \notin B, E^Q(y) = \varnothing$, и $\forall y \in B, E^Q(y) = A.$

Тогда, можем записать $g(c) = g_H(H \cap Q)$. Обозначим $H' = H \cap Q$.

Нечеткая мера g_H, согласно (10.24) определяется выражением:

$$g(c) = \int_Y g_1(E^{H'}(y)) \circ g_2 = \int_{B \cup (Y \setminus B)} g_1(E^{H'}(y)) \circ g_2 =$$

$$\int_Y \{[\chi_B(y) \vee \chi_{\bar{B}}] \wedge g_1(E^{H'}(y))\} \circ g_2,$$

где

$\chi_B, \chi_{\bar{B}}$

- характеристические функции множеств *B* и *B* = Y *B*.

Раскрывая квадратные скобки в подынтегральном выражении имеем:

$$g(C)=\int_Y\left\{\left(\chi_B(y)\wedge g_1(E^{H'}(y))\right)\vee\left(\chi_B(y)\wedge g_1(E^{H'}(y))\right)\right\}\circ g_2.$$

Рассмотрим более детально выражение под интегралом.

$$g_1(E^{H'}(y))=g_1(E^H(y)\cap E^Q(y))=\begin{cases}g_1(E^H(y)\cap A), y\notin B\\ g_1(E^H(y)\cap\varnothing)=0, y\in B.\end{cases}$$

Тогда $\chi_B(y)\wedge g_1(E^{H'}(y))=0$, а следовательно:

$$g(C)=\int_Y\left\{\chi_B(y)\wedge g_1(E^{H'}(y))\right\}\circ g_2=\int_B g_1(E^{H'}(y))\circ g_2=$$

$$=\int_B g_1(E^{H'}(y)\cap A)\circ g_2.$$

Что и требовалось доказать. Для второго интеграла в (10.47) рассуждения аналогичны. Следовательно теорема доказана.

Из теоремы 10.4. можно рассмотреть следующие важные следствия.

Следствие 1.

Если пространства с нечеткими мерами $(X,\ g_1)$ и $(Y,\ g_2)$ связаны отношением $H\subseteq X\times Y$, а на *P(X)* задана унарная операция $\omega: P(X)\to P(Z)$ со значением в Z, то H_ω - операция над нечеткими мерами g_1, и g_2 определяет меру g на Z согласно зависимости:

$$g(C)=\int_A g_2(F(x))\circ g_1=\int_Y g_1(E(y)\cap A)\circ g_2. \quad (10.48)$$

Где $C=\omega(A)\subseteq Z$.

Доказательство следствия следует из доказательства теоремы 10.4. при замене множества *B* на все пространство *Y*.

Следствие 2.

Если g_1 и g_2 две нечеткие меры на *X*, а *ω* бинарная операция на X, удовлетворяющая соотношению:

$$\omega(A,B)=\begin{cases}\varnothing, \omega(A,B), B\neq B;\\ A, A=B\end{cases}$$

то результирующая H_ω - операции нечеткая мера есть мера на *X*, определяемая соотношением:

$$g(A) = \int_A g_2(F(x) \cap A) \circ g_1 = \int_A g_1(E(x) \cap A) \circ g_2. \quad (10.49)$$

Доказательство.
Согласно определения H_ω - операции имеем $g(A) = g_H(H \cap Q_A)$, где $Q_A \subseteq X \times X$ - отношение порожденное бинарной операцией ω на *P(X)*. Данное отношение определяется характеристической функцией:

$$\chi_{Q_A(x_1,x_2)} = \begin{cases} 1, & x_1, x_2 \in A; \\ 0, & (x_1 \notin A) \vee (x_2 \notin A). \end{cases}$$

Следовательно:

$$g(A) = \int_A g_1(E^H(x_2) \cap E^{Q_A}(x_2)) \circ g_2,$$

$$E^{Q_A}(x_2) = \{x_1 | x_2 \in A\} = A.$$

Отсюда следует доказательство следствия 2.
После того, как нами была определена возможность нахождения нечеткой меры результирующей H_ω - операцию через нечеткие интегралы мы можем рассмотреть основные свойства нечеткого группоида ($F(X), H_\omega$) для нечетких мер.

Доказательство теоремы 10.4. показывают, что H_ω -операция заданная над фиксированной Ω - алгеброй удовлетворяет операции коммутативности:

$$H\{g_1 \omega g_2\} = H\{g_1 \omega g_2\}, \quad (10.50)$$

а следовательно нечеткий группоид $(F(X), \ H_\omega)$ является коммутативным. Рассмотрим свойство ассоциативности H_ω- операции.
Теорема 10.5.
Для нечеткого группоида *(F(X),* H_ω *)* закон нечеткой внутренней композиции в виде H_ω - операции над фиксированной Ω - алгеброй с ассоциативной бинарной операцией $\omega: P(X) \times P(X) \to P(X)$ в P(X) является ассоциативным, то есть

$$H_\omega\{g_1, H_\omega\{g_2, g_3\}\} = H_\omega\{H_\omega\{g_1, g_2\}, g_3\}, \quad (10.51)$$

а следовательно и нечеткий группоид $(F(X), H_\omega)$ является ассоциативным.
Доказательство.
Пусть для простоты дальнейшего рассмотрения будут определены пространства $X \equiv Y \equiv Z$ с фиксированными нечеткими мерами g_1, g_2, g_{3i}

на них соответственно. Кроме того, обозначим $g_{i,j}(\cdot)$ - нечеткую меру полученную в результате H_ω - операции над нечеткими мерами g_i; ,g_j, а $g(\cdot)$ - нечеткую меру, результирующую после двух последовательных H_ω - операций.

В дальнейшем будем полагать, что бинарная операция $\omega\colon P(X)\times P(X)\to P(X)$ является ассоциативной. Обозначим $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, $C\subseteq Z$. Для ω считаем, что

$(A\ \omega\ B)=D$, $(B\ \omega\ C)=P$, $K=(D\ \omega\ C)=(A\ \omega\ P)$. Тогда имеем:

$$H_\omega\big(g_1(A)\omega g_2(B)\big)=g_{12}(D)\cdot$$

Согласно (10.47) можем записать:

$$g_{12}(D)=\int_A g_2(F(x)\cap B)\circ g_1\circ\int_B g_1(E(y)\cap A)\circ g_2,$$

где $x\in X, y\in Y, X\equiv Y\supseteq D$. Тогда, для произвольного $K\subseteq Z\equiv X\equiv Y'$для результирующей нечеткой меры $g(\cdot)$ справедливо соотношение:

$$g(K)=H_\omega\{g_{12}(D),g_3(C)\}.$$

Нам необходимо доказать, что

$$g(K)=H_\omega\{g_1(A),g_{23}(P)\},$$

где $g_{23}(P)=H_\omega\{g_2(B),g_3(C)\}$.

Для $g(K)$ можем записать:

$$g(K)=\int_D g_3(F(z)\cap C)\circ g_{12}=\int_Z[g_3(F(z)\cap C)\wedge\chi_D]\circ\int_Z 1(z)\circ g_{12}(\cdot)=$$

$$=\int_Z(F(z)\cap C)\circ\int_Z\chi_D\circ g_{12}(\cdot)=\int_Z g_3(F(z)\cap C)\circ g_{12}(D)=$$

$$=\int_Z g_3(F(z)\cap C)\circ\int_B g_1(E(y)\cap A)\circ g_2=\int_Z g_1(E(y)\cap A)\circ\underbrace{\int_B g_3(F(z)\cap C)\circ g_2}_{g_{23}(P)}=$$

$$=\int_Z g_1(E(y)\cap A)\circ g_{23}(P)=\int_P g_1(E(y)\cap A)\circ g_{23}(\cdot)=H_\omega\{g_1(A),g_{23}(P)\}=$$

$$=H_\omega\{g_1(A),H_\omega\{g_2(B),g_3(C)\}\}.$$

Что и требовалось доказать.

Из доказательства теоремы 10.5. можно сделать вывод о том, что если в Ω-алгебре бинарная операция ω является ассоциативной, то есть группоид $(P(X),\omega)$ является ассоциативным, то фиксированная над этой алгеброй H_ω -операция является ассоциативной, а следовательно и нечеткий группоид для нечетких мер $(F(X), H_\omega)$ является ассоциативным.

Интересным с практической точки зрения является вопрос существования дистрибутивных H_ω -операций в *F(X).* Раскрывая этот вопрос рассмотрим теорему о дистрибутивности H_ω -операций.

Теорема 10.6.

Пусть в *P(X)* задана Ω -алгебра с сигнатурой $\Omega = \{\omega_1(2), \omega_2(2),\}$ где ω_1 и ω_2 бинарные операции, и ω_2 дистрибутивна относительно ω_1. И пусть в *F{X)* определена бинарная H_ω - операция $H^1_{\omega_1}$ с фиксированной в Ω -алгебре операцией ω_1. Тогда:

1. Существует такая H_ω -операция в $F(X)$ $H^2_{\omega_1}$ с фиксированной в Ω -алгебре операцией которая дистрибутивна к $H^1_{\omega_1}$ операции, то есть выполняются:

$$H^1_{\omega_1}\left\{g_1, H^2_{\omega_1}(g_2, g_3)\right\} = H^2_{\omega_1}\left\{H^1_{\omega_1}(g_1, g_2), H^1_{\omega_1}(g_1, g_3)\right\}. \tag{10.52}$$

2. Существует H_ω -операция $H^1_{\omega_2}$ с фиксированной в Ω -алгебре операций ω_2 дистрибутивная к операции $H^1_{\omega_1}$ которая заданна на *F(X),* то есть

$$H^1_{\omega_1}\left\{g_1, H^1_{\omega_2}(g_2, g_3)\right\} = H^1_{\omega_2}\left\{H^1_{\omega_1}(g_1, g_2), H^1_{\omega_1}(g_1, g_3)\right\}. \tag{10.53}$$

Доказательство.

Как и в доказательстве теоремы 10.5 сохраним обозначения для результирующих нечетких мер. Для подмножеств из *P(X)* приведем следующие соотношения:

$$X \equiv Y \equiv Z, A \subseteq X, B \subseteq Y, C \subseteq Z$$

Для доказательства предположения теоремы 10.6 обозначим:

$$(\mathrm{B}\ \omega_l\ \mathrm{C}) = \mathrm{P}, (\mathrm{A}\ \omega_l\ \mathrm{B}) = \mathrm{L}, (\mathrm{A}\ \omega_l\ \mathrm{C}) = \mathrm{D}, (\mathrm{A}\ \omega_l\ \mathrm{P}) = (\mathrm{L}\ \omega_l\ \mathrm{D}) = \mathrm{K}.$$

Нечеткая результирующая мера множества *К* для выражения слева в соотношении (10.52) может быть представлена в виде:

$$g(K) = \int_P g_1(F_1(x) \cap A) \circ g_{23},$$

где нечеткая мера $g_{23}(\cdot)$ для подмножества *Р* будет определиться выражением:

$$g_{23}(P)=\int_C g_2(F_2(x)\bigcap B)\circ g_3 .$$

Отметим, что индексы i множеств $F_i(x)$ определяют номер отношения фиксированного на $X\times Y$. Преобразуем эту величину:

$$g(K)=\int_X\left[\chi_p(x)\wedge g_1(F_1(x)\bigcap A)\right]\circ\int_X 1(x)\circ g_{23}=\int_X g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ g_{23}(P)=$$

$$=\int_X g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ\underbrace{\int_C g_2(F_2(x)\bigcap B)\circ g_3}_{g_{23}(P)}=\int_X\left[g_1(F_1(x)\bigcap A)\wedge g_1(F_1(x)\bigcap A)\right]\circ$$

$$\circ\int_C g_2(F_2(x)\bigcap B)\circ g_3=\int_X\left[g_1(F_1(x)\bigcap A)\wedge g_2(F_2(x)\bigcap B)\right]\circ\underbrace{\int_C g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ g_3}_{g_{13}(D)}=$$

$$=\int_D\left[g_1(F_1(x)\bigcap A)\wedge g_2(F_2(x)\bigcap B)\right]\circ g_{13}(\cdot).$$

Рассмотрим более подробно подынтегральное выражение. Обозначим его как функцию $f(x)=g_1(F_1(x)\bigcap A)\wedge g_2(F_2(x)\bigcap B)$.

Согласно условия теоремы подмножества $F_i(x)$ являются фиксированными для $H^1_{\omega_1}$-операции. Рассмотрим вспомогательное соотношение:

$$\int_{F_2(x)\bigcap B} g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ g_2=M\in[01];$$

Тогда существует такое $x^*\in X$, что выполняется согласно (9.10) соотношение:

$$M=g_1(F_1(x^*)\bigcap A)=g_2(H_\alpha\bigcap F_2(x^*)\bigcap),$$

где $H_\alpha\subseteq X$,- множество α-уровня функции $g_1(F_1(X)\bigcap A)$ на уровне $\alpha=g_1(F_1(x^*)\bigcap A)$. Тогда, если $H_\alpha\subseteq F_2(x^*)$, то существует такое отношение H_2 для которого справедливо:

$$g_1(F_1(x)\bigcap A)\wedge g_2(F_2(x)\bigcap B)=\int_{F_2(X)\bigcap B} g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ g_2=$$

$$=\int_X\chi_{F_2(x)}\circ\int_B g_1(F_1(x)\bigcap A)\circ g_2=\int_X\chi_{F_2(x)}\circ g_{12}(L)=$$

$$=\int_X\chi_{F_2(x)}\circ\int_X\chi_L(x)\circ g_{12}=\int_X\left[\chi_{F_2(x)}\wedge\chi_L\right]\circ g_{12}=g_{12}(F_2(x)\bigcap L).$$

Подставив это выражение в соотношение для $g(K)$ получим:

$$g(K)=\int_D g_{12}(F_2(x)\bigcap L)\circ g_{13}(\cdot)=H^2_{\omega_1}\{g_{12},g_{13}\}=H^2_{\omega_1}\left\{H^1_{\omega_1}\{g_1,g_2\},H^1_{\omega_1}\{g_1,g_3\}\right\}.$$

Таким образом, первое утверждение теоремы является доказанным. Для доказательства второго утверждения мы можем воспользоваться следующими соотношениями в Ω-алгебре

$$(B\ \omega_2\ C) = P,\ (A\ \omega_1\ B) = L,\ (A\ \omega_1\ C) = D,\ (A\ \omega_1\ P) = (L\ \omega_2\ D) = K.$$

Тогда, для *g(K),* исходя из рассуждений приведенных выше, можем записать выражение:

$$g(K) = \int_X [g_1(F_1(x)\cap A) \wedge g_2(F_1(x)\cap B)] \circ \int_C g_1(F_1(x)\cap A) \circ g_3 \cdot$$

Для выражения в квадратных скобках справедливо (исходя из рассуждений доказательства по пункту 1 теоремы) соотношение:

$$\left[g_1(F_1(x)\cap A) \wedge g_2(F_1(x)\cap B)\right] = g_{12}(F_1(x)\cap L),$$

где $L = A\omega_1 B$.Тогда с учетом дистрибутивности операций ω_1 и ω_2 в Ω -алгебре можем записать:

$$g(K) = H^1_{\omega_1}\left\{H^1_{\omega_2}\{g_1, g_2\}, H^1_{\omega_2}\{g_1, g_3\}\right\},$$

что и требовалось доказать в теореме.
Используя основные свойства H_ω - операции и ее определения через нечеткие интегралы согласно теоремы 10.4 и ее следствий мы можем определить расширенную нечеткую меру. При этом еще раз подчеркнем необходимость отмеченной в определении 10.6 функциональной зависимости операции ω в трехосновной алгебре на которой определена H_ω - операция.

Теорема 10.7.

Расширенная нечеткая мера подмножества $C \subseteq Z$, определяемая функцией $\mu(z) : Z \to [01]$ и нечеткой мерой *g,* результирующей H_ω- операцию нечетких мер g_{1i} и g_2, заданных на пространствах *X, Y* соответственно находится из соотношения:

$$\tilde{g}(\mu)[C] = \sup_{\alpha\in[01]} \int_{A_\alpha} \left[\alpha \wedge g_2(F(y)\cap B_\alpha)\right] \circ g_1, \qquad (10.54)$$

где: *F(y)* определяется из (10.18), $A_\alpha \omega B_\alpha = M_\alpha \cap C,$

$$M_\alpha = \left\{x \middle| \mu(x) \ge \alpha \in [01]\right\},\ B_\alpha \subseteq Y, \quad A_\alpha \subseteq X \cdot$$

Доказательство.

Расширенная нечеткая мера $\tilde{g}$ согласно определения (9.30) определяется через нечеткую меру $g(\cdot)$ на Z. Однако, исходя из условия теоремы $g(\cdot) = H_\omega\{g_1 \omega g_2\}$. Тогда можем записать:

$$g_\mu(c) = \int\limits_C \mu(z) \circ H_\omega\{g_1 \omega g_2\} = \sup_{\alpha \in [01]} \{\alpha \wedge g(M_\alpha \cap C)\} =$$

$$= \sup_\alpha \{\alpha \wedge H_\omega\{g_1 \omega g_2\}[M_\alpha \cap C]\}$$

Если $M_\alpha \cap C = A_\alpha \omega B_\alpha$ тогда согласно теоремы (10.4) мы можем записать:

$$\tilde{g}_\mu(c) = \sup_\alpha \left[\alpha \wedge \int\limits_{A_\alpha} g_2(F(x) \cap B_\alpha) \circ g_1\right] = \sup_\alpha \int\limits_{A_\alpha} [\alpha \wedge g_2(F(x) \cap B_\alpha)] \circ g_1$$

Что и требовалось доказать.

В том случае, когда ω определяет унарную операцию вида $\omega : P(X) \to P(Z)$ имеет место следствие теоремы 10.7.

Следствие 1.

Если ω - есть унарная операция такая, что $\forall A \subseteq X$, $\omega(A) = M \cap C \subseteq Z$, то расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_\mu$ (C) подмножества $C \subseteq Z$ определяется через нечеткую меру на X $g_1(A)$ в виде:

$$g_\mu(C) = \sup_\alpha \int\limits_X [\alpha \wedge g_2(F(x))] \circ g_1(A) \cdot \qquad (10.55)$$

Доказательство следствия непосредственно следует из доказательства теоремы 10.7. В том случае когда унарная операция является тождественным отображением X в $X = Z$ следствие 1 приводит к следующему результату.

Слелствие 2. Пусть $X \equiv Z$ и ω - унарная операция тождественного преобразования. Тогда расширенная нечеткая мера подмножества $C \subseteq Z$ определяется соотношением:

$$\tilde{g}_\mu(C) = \sup_{\alpha \in [01]} \left[\alpha \wedge \int\limits_{M_\alpha \cap C} g_2(F(x)) \circ g_1(\cdot)\right] = \sup_{\alpha \in [01]} \left[\alpha \wedge \tilde{g}_{1_{F2(F(\cdot)\cdot)}}(M_\alpha \cap C)\right] \qquad (10.56)$$

Доказательство следствия очевидно следует из доказательства теоремы 10.7.Следствие 2 устанавливает взаимосвязь расширенных нечетких мер, которая порождена H_ω - операцией над нечеткими мерами.

Пусть задана $H_{\omega 1}$ - операция такая, что ω_1 есть унарная операция, вида $\omega_1 : P(X) \to P(Z)$ (Имеется ввиду, что $H_{\omega 1}$ есть операция над нечеткими мерами $g_1 : 2^X \to [01]$, $g_2 : 2^Y \to [01]$ с результирующей мерой

$g:2^Z \rightarrow [01].$) Тогда согласно (10.28) может быть определена мера $g:2^Z \rightarrow [01]$. Интересной оказывается возможность задания сопряженной $H_{\omega 2}$- операции над нечеткими мерами g_1 и g_2, где ω_2 есть унарная операция.

Лемма 10.6

Пусть $g_{\omega 1}:2^Z \rightarrow [01]$ есть результирующая нечеткая мера $H_{\omega 1}$ операции над нечеткими мерами g_1 и g_2, заданными на X и Y соответственно $\omega_1:P(X) \rightarrow P(Z)$. Тогда существует такая унарная операция ω_2: $P(Y) \rightarrow P(Z)$ и такое отображение f: $P(X) \rightarrow P(Y)$, что для результирующей $H_{\omega 2}$-операции меры $g_{\omega 2}$ справедливо:

$$\forall C \subseteq Z,\ g_{\omega 1}(C) = g_{\omega 2}(C). \qquad (10.57)$$

или

$$\int_A g_2(F(x)) \circ g_1 = \int_B g_1(E(y)) \circ g_2, \qquad (104.58)$$

где $\omega_1(A) = \omega_2(B) = C \subseteq Z.,B \subseteq Y, A \subseteq X.$

Доказательство.

Для доказательства леммы используем тот факт, что если заданы две функции монотонно убывающие и имеющие одинаковое начальное значение, то всегда можно задать такие аргументы этих функций, что значения их будут равны (рис. 10.5).

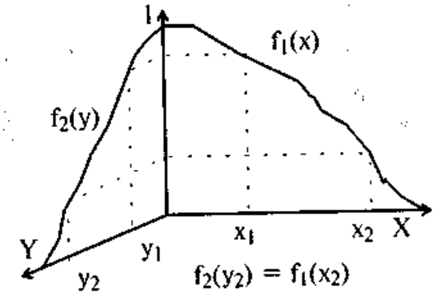


Рис. 10.5. К доказательству леммы 10.6.

Исходя из условия и доказательства леммы 10.3 (10.24) имеем $g_{\omega_1}(\cdot) = g_{\omega 2}(\cdot)$ при $A=X$, $B=Y$. Согласно, свойства нечеткого интеграла для $A_i \subseteq A_{i+1}$ выполняются:

$$\int_{A_i} g_2(F(x)) \circ g_1 \leq \int_{A_{i+1}} g_2(F(x)) \circ g_1 .$$

Следовательно, функция $g_{\omega_1}(\cdot)$ есть убывающая функция для вложенной последовательности подмножеств A_i. Аналогично, функция $g_{\omega 2}(\cdot)$ также является убывающей для последовательности подмножеств $B_i \subseteq B_{j+1} \subseteq .. \subseteq B_{j+n}$, при $n \to \infty$.

Тогда, исходя из выше приведенной посылки и рис. 10.1. следует что для любого $A_i \subseteq X$ можно найти такое $B_j \subseteq Y$, что будет выполняться условие (10.58). Следовательно существует отображение $f: P(x) \to P(Y)$ удовлетворяющие лемме 10.6.

Определенные в этом параграфе H_ω- операции над нечеткими мерами позволяют рассмотреть нечеткий интеграл Суджено от функции $\mu\ (x)\ :\ X \to [01]$ по нечеткой мере g_x (•) как частный случай H_ω - операции над нечеткой мерой g и нечеткой мерой возможности соответствующей функции $\mu(x)$. В этой связи рассмотрим теорему устанавливающую связь между расширенной нечеткоймерой, соответствующего ей интеграла Суджено и H_ω - операций над нечеткими мерами.

Теорема 10.8.

Расширенная нечеткая мера $\tilde{g}_\mu(A)$ подмножества $A \subseteq X$, порожденная нормированной функцией $\mu\ (x)\ :\ X \to [01]$ и нечеткой мерой $g_x\ (\cdot)$: $2^X \to [01]$, равна нечеткой мере $\lambda(A)$ подмножества A вида

$$\lambda(A) = \begin{cases} H_\omega(\pi, g)[A], & A \neq \varnothing; \\ 0, & A = \varnothing, \end{cases} \qquad (10.59)$$

где $H_\omega\ (\pi,g)$ - результирующая нечеткая мера полученная в результате H_ω - операции между нечеткой мерой $g_x\ (\cdot)$ и нечеткой мерой возможности $\pi(\cdot)$ с функцией плотности нечеткой меры равной $\mu(x)$, а H_ω - операция определяется отношением $H \subseteq X \times X$ с характеристической функцией вида:

$$\chi_H(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \mu(x_1) \geq \mu(x_2), \quad x_1, x_2 \in X \\ 0, & \mu(x_1) < \mu(x_2). \end{cases} \qquad (10.60)$$

и бинарной операцией ω:

$$\forall A, B \subseteq X, \quad \omega(A, B) = \begin{cases} \varnothing, & A \neq B; \\ A, & A = B. \end{cases} \qquad (10.61)$$

При этом справедливо соотношение:

$$\int_A \mu(x) \circ g_x = g_\mu(A) = \lambda(A) = \int_A \pi(E_H(y) \bigcap A) \circ g_x(\cdot) = \\ = \sup_{M_\alpha} \{ \pi(\bar{M}_\alpha \bigcap A) \wedge g_x(M_\alpha \bigcap A) \}, \quad (10.62)$$

где

$$M_\alpha = \{ x | \mu(x) \geq \alpha \in [01] \}, \quad \bar{M}_\alpha = (X \setminus M_\alpha) \bigcup CovM_\alpha$$

$CovM_\alpha$ - множество граничных точек множества M_α, $E_H(y)$ определяется согласно (10.17).

Доказательство.

Согласно теоремы 9.3. функция μ*(x)* определяет расширенную нечеткую меру $\tilde{g}_\mu(\cdot)$ через нечеткий интеграл Суджено. Для дальнейшего доказательства теоремы рассмотрим H_ω - операцию с характеристиками, указанными в условии теоремы над нечеткими мерами $g_x(\cdot)$ и мерой возможности $\pi_x(\cdot)$ с плотностью меры, соответствующей функции μ*(x)*. Согласно алгебры с операцией ω, заданной как (10.61), множество $A \subseteq cX$ образуется в случае $\omega(A, A) = A$. Следовательно отношение $H \subseteq X \times X$ должно быть рассмотрено, согласно теоремы 10.4, на усеченном декартовом произведении $(X \times X) \cap (A \times A)$. В этом случае справедливо:

$$\lambda(A) = \int_A \pi(E_H(y)) \bigcap A) \circ g_x(\cdot), y \in X.$$

Обозначим через *H'*– отношение $H' = H \cap Q$, где $Q \subseteq X \times X$,

$Q = \{(x, y) | x \in A, y \in A\}$. Тогда:

$$\lambda(A) = \int_A \pi(E_{H'}(y)) \circ g_x.$$

Согласно определения (10.3.) нечеткая мера декартового произведения мер определяется по (10.23). Но, для усеченного отношения *H'* справедливо выражение:

$$\lambda(A) = \sup_n(\pi(E_H \bigcap A) \wedge g_x(E_H \bigcap A)),$$

где $E_n = \bigcap_n E_H(y) = \Gamma'_H(F_n)$, $\Gamma'_H(\cdot)$- оператор преобразования (10.21).

Отношение $H \subseteq X \times X$, заданное как (10.60) для переупорядоченной по убыванию функции *μ(x)*, может быть представлено в виде рис. 10.6, где заштрихованная часть есть область с единичной характеристической функцией $\chi_H(x_1, x_2) = 1$.

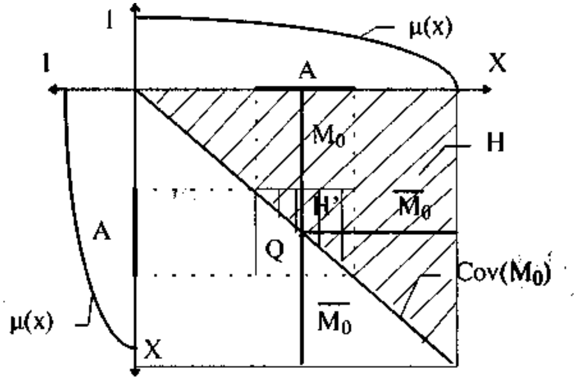


Рис. 10.6. К доказательству теоремы 10.8.

В силу того, что мера возможности $\pi_x(x)$ для подмножества E_n определяется в виде: $\pi_X(E_n) = \max\limits_{x\in E_n} \mu(x)$, а также в силу доказательства леммы 10.3 справедливо:

$$F_n = \{y | y \in X, E_H(y) \supseteq E_n\},$$

а также:

$$F_n = M_\alpha \{y | \mu(y) \geq \alpha = \pi(E_n)\}.$$

Тогда, согласно заданной характеристической функции (10.60) можем записать:

$$E_n = \bigcap_y E_H(y) = \{x \in X | \forall y \in M_\alpha, \mu(y) \geq \mu(x)\}.$$

Это условие можно переписать в виде:

$$E_n = \left\{x \in X \,\middle|\, \min_{y\in M_\alpha} \mu(y) \geq \mu(x)\right\} =$$

$$\left\{x \,\middle|\, X \setminus M_\alpha \cup \underbrace{\left(x \,\middle|\, \min_{y\in M_\alpha}(\mu(y)) = \mu(x)\right)}_{CovM_\alpha}\right\} = \{x \in X | x \in \overline{M}_\alpha\} \Rightarrow E_n = \overline{M}_\alpha.$$

Подставив данное соотношение в формулу для $\lambda(A)$ получим:

$$\int_A \pi(E_H(y) \cap A) \circ g = \sup_\alpha (\pi(\overline{M}_\alpha \cap A) \wedge g_x(\overline{M}_\alpha \cap A)).$$

Графическое представление этого соотношение изображено на рис. 10.6. Для доказательства тождества

$$\int_A \mu(x) \circ g = H_\omega(\pi(A), g(A)) = \int_A \pi(E_H(y) \bigcap A) \circ g,$$

достаточно доказать, что

$$\mu(y) = \pi(E_H(y) \bigcap A) = \pi(\bar{M}_\alpha \bigcap A):$$

Для меры возможности $\pi(x)$ справедливо:

$$\pi(E_H(y) \bigcap A) = \max_{x \in E_H(y) \bigcap A} \mu(x),$$

Но $E_H(y) \bigcap A = \left\{ x \in A \middle| \mu(y) \geq \mu(x) \right\}$.

Учитывая отношение *H* оказывается справедливым следующее (см. рис.10.2)

$$\max_{x \in E_H(y)} \mu(x) = \max_{x \in A} \mu(x) = \mu(y)$$

или

$$\max_{x \in E_H(y) \bigcap A} \mu(x) = \max_{x \in E_H(y)} \mu(x) = \mu(y).$$

Отсюда следует, что теорема доказана

В заключении отметим, что понятие *H*-операции над нечеткими мерами открывает возможности по обработке нечеткой числовой информации в аналитических задачах поддержки принятия решении. *H*-операции были использованы при создании специального программного обеспечения для обработки нечеткой числовой информации. В частности FC v. 2.1 (Fuzzy Calculator), ExPro-2000 v 1 0 (Expert Professional), FE v.2.0 (Fuzzy Excel). Применение данного программного обеспечения позволяет на практике применять возможности Fuzzy-технологии для проведения моделирования и расчетов в условиях неопределенности.

10.5. Нечетко-интегральные зависимости

В данном пункте мы рассмотрим ряд зависимостей между нечеткими величинами (функциями принадлежности, нечеткими мерами и т.д.), связанными через нечеткие интегралы. Данные зависимости могут оказаться весьма полезными при решении практических задач. С этой целью рассмотрим ряд лемм.

Лемма 10.7

Пусть заданы три пространства с фиксированными на них нечеткими мерами (X, g_1), (Y, g_2), (Z, g_3) и задано отношение $H_1 \subseteq X\times Z$. Тогда существует такое отношение $H_2 \subseteq Y\times Z$, что результирующие нечеткие меры равны: $\lambda(H_1) = q(H_2)$, или

$$\int_Z g_1(E_{H_1}(z)) \circ g_3 = \int_Z g_2(E_{H_2}(z)) \circ g_3; \qquad (10.63)$$

Доказательство.

Рассмотрим подынтегральную функцию $g_{1t}(\cdot)$. В силу определения 10.4. эта функция является *H*- соответствием по мере g_1, и определяется соотношением (10.28).

$$g_1(E_{H_1}(z)) = \int_{E_{H_1}(z)} 1(x) \circ g_1(\cdot).$$

Аналогичным образом может быть представлена и функция $g_2(E_{H_2}(z))$. Если для любого $z \in Z$ $g_1(E_{H_1}(z)) = g_2(E_{H_2}(z))$, то (10.63) является справедливым. При фиксированном отношении H_1 $\forall z \in Z$, $g_1(E_{H_1}(z)) \in [01]$. Тогда в силу монотонности функции нечеткой меры на множестве *P(Y)* может быть определено такое множество $A \in P(Y)$, что

$$\int_{E_{H_1}(z)} 1(x) \circ g_1 = \int_A 1(y) \circ g_2.$$

Если теперь положить $A = E_{H_2}(z)$, то для всех $z \in Z$, множества $E_{H_2}(z)$ восстанавливают однозначно отношение $H_2 \subseteq Y\times Z$. При этом выполняется равенство $g_1(E_{H_1}(z)) = g_2(E_{H_2}(z))$, а следовательно существует для меры g_2 отношение H_2 для которого справедливо соотношение (10.63). Что и требовалось доказать.

В данной лемме интегральная зависимость между нечеткими мерами g_1, g_2 и соответствующими им отношениями H_1\ и H_2 определялись при жестком равенстве подынтегральных функций. Однако, подынтегральные функции могут быть и не равными между собой, а в то же время интегралы от этих функций будут иметь одинаковое значение. Рассмотрим лемму.

Лемма 10.8

Пусть (X, B, g_1) - пространство с нечеткой мерой, а f -измеримая функция, определенная на *(X, B)* со значениями в измеримом пространстве (Y, ξ). g_2 - нечеткая мера, индуцированная на (Y, ξ) функцией

$$f \quad (g_2(A) = g_1(f^{-1}(A)), \quad A \in \xi),$$

тогда существует g_2 –интегрируемая функция $\mu(y)$ сопряженная g_1 - интегрируемой функции $h(x)$ для каждого $A \in B$, в том смысле что:

$$\int_A \mu(y) \circ g_2(\cdot) = \int_{f^{-1}(A)} h(x) \circ g_1 \cdot \tag{10.64}$$

Доказательство.

Для доказательства рассмотрим второй интеграл соотношения (10.64):

$$\int_{f^{-1}(A)} h(x) \circ g_1 = \sup_\alpha (\alpha \wedge g_1(H_\alpha \cap f^{-1}(A))) \cdot$$

Согласно равенства (10.2) существует такая функция $t(y)$: $Y \to [01]$ которая удовлетворяет равенству:

$$g_1(H_\alpha \cap f^{-1}(A)) = \int_A t(y) \circ g_2 = \sup_{\beta \in [01]} \{\beta \wedge g_2(A \cap T_\beta)\},$$

$$T_\beta = \{y | t(y) \geq \beta\},$$

и кроме того, существует такое $\beta^* \in [01]$, что

$$g_1(H_\alpha \cap f^{-1}(A)) = g_2(A \cap T_{\beta^*}) = \int_{A \cap T_\beta} 1(y) \circ g_2 \cdot$$

Для возрастающего $\alpha \in [01]$ $g_1(H_\alpha \cap f^{-1}(A))$ - есть функция не возрастающая. Тогда с увеличением α для сохранения выше приведенного равенства необходимо уменьшение множество T_β . Если теперь рассмотреть значение второго интеграла (10.64) в виде:

$$\alpha^* = g_1(H_{\alpha^*} \cap f^{-1}(A)),$$

то любая последовательность множеств T_β индексированных значениями α а для которой

$$\int_{T_{\beta^*} \cap A} 1(y) \circ g_2 = \beta^* = \alpha^*$$

задает семейство вложенных подмножеств Y, определяющих соответственно функцию $\mu(y)$:$Y \to [01]$.Таким образом, отсюда следует, что существует функция $\mu(y)$ для которой соотношение (10.64) удовлетворяется.

Функцию $\mu(y)$ по аналогии с условным математическим ожиданием случайной величины можно назвать условным нечетким ожиданием $h(x)$ относительно функции f. В силу, того что функция $\mu(y)$ в общем случае не единственна, то любую функцию на Y, удовлетворяющую соотношению (10.64), можно назвать вариантом условного нечеткого ожидания функции $h(x)$ (нечеткой величины $h(x)$). Для леммы 10.8 существует следствие.

Следствие 1.

Пусть задано пространство $(X,\ \mathcal{B},\ g_1)$. Если пространство Y совпадает с X, а ξ есть σ - подалгебра В и f- есть тождественное отображение на X, то g_2 есть сужение меры g_1 на ξ . Тогда условным нечетким ожиданием функции $h(x)$ относительно ξ является любая ξ -измеримая функция $\mu(y)$, которая для $\forall A \in \xi$ удовлетворяет равенству

$$\int_A h(x) \circ g_1 = \int_A \mu(y) \circ g_2, \quad y, x \in X \cdot \tag{10.65}$$

Доказательство следствия непосредственно вытекает из доказательства леммы 10.8.

Нечетко-интегральные зависимости можно наблюдать и в более сложных случаях. В частности для двойных нечетких интегралов можно рассмотреть зависимость между функциями заданными на различных пространствах.

Пусть заданы два пространства с нечеткими мерами (X, g_1) и (Y, g_2) и задано нечеткое отношение: $h(x) : X \times Y \rightarrow [01]$. И пусть на X определена g_1 - измеримая функция $\varphi(x) \ : X \rightarrow [01]$. Тогда можем рассмотреть следующую лемму.

Лемма 10.9.

Для фиксированной функции $\varphi(x)$ существует такая g_2 -измеримая функция $l(y) : Y \rightarrow [01]$ для которой выполняется следующее соотношение:

$$\int_{\varphi(x)} \left[\int_Y h(x,y) \circ g_2 \right] \circ g_1 = \int_X \left[\int_{l(y)} h(x,y) \circ g_2 \right] \circ g_1 \cdot \tag{10.66}$$

Доказательство.

Пусть $X \times Y = Z$. Тогда каждой паре (x, y) соответствует $z \in Z$. Для функций $\varphi(x)$ и $l(y)$ определим цилиндрические продолжения как функции

$$\forall y \in Y, \quad \bar{\varphi}(x,y) = \varphi(x),$$
$$\forall x \in X, \quad \bar{l}(x,y) = l(y).$$

Тогда соотношение (10.66) можем переписать в виде:

$$\int_z [\overline{\varphi}(x,y) \wedge h(x,y)] \circ g_z = \int_z [\bar{l}(x,y) \wedge h(x,y)] \circ g_z,$$

где $g_Z = g_1 \times g_2$. Согласно теоремы 10. 2 можем записать

$$\int_Z \varphi(x,y) \circ \int_Z h(x,y) \circ g_Z = \int_Z \varphi(x,y) \circ g_h(),$$

и тогда

$$\int_z \overline{\varphi}(x,y) \circ \tilde{g}_h() = \int_z \bar{l}(x,y) \circ \tilde{g}_l()$$

В этом случае существование *l(x,y)* для функции φ*(x,y)* следует из следствия леммы 10. 8. А так как цилиндрические продолжения однозначно определяются исходными функциями можно сделать вывод, что для функции φ(x) существует *l(y)* такая, что выполняется равенство (10. 66)

В заключение главы отметим, что в приведенном выше материале рассматриваются вопросы обработки нечетких данных на основе нечетко-интегрального исчисления. В целом полученные результаты обобщают существующие понятия нечетко-интирального исчисления. Кроме этого приведены новые понятия, соотношения и зависимости, которые расширяют возможности по описанию преобразований пространств с нечеткими мерами и тем самым позволяют повысить адекватность и эффективность моделирования процессов принятия решений в условиях неопределенности.

Для более систематического представления приведенных результатов ниже в таблицах 10.1 и 10. 2 даны основные понятия и соотношения нечетко-интегрального исчисления, которые непосредственно используются для моделирования и расчетов с неопределенными, нечеткими величинами

Таблица 10.1.

Основные понятия

№	Наименов	Определение	Свойства
1	Нечеткий интеграл по НМ (НИ Суджено)	НИ от h(x) $X\to[01]$, по НМ g $2^X \to [01]$ на $A \subseteq X$ определяется $\int_A h(x)\circ g() = \sup_{\alpha\subset[01]}\{\alpha \wedge g(A\cap H_\alpha)\}$, $H_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$,	Сходимость, ограниченность монотонность, непрерывность, вынос за знак интеграла постоянных функций
2	Расширенная НМ	Расширенная НМ есть НМ на множестве нечетких подмножеств и определяется $g(\mu_A) = \int_X \mu_A(x)\circ g$	Ограниченность, монотонность, непрерывность
3	Условная НМ	Семейство НМ на X $\sigma_c(\ \mid y)2^\lambda \to [01]$ индексированных $\forall y \in y$, $\varphi(x) = y$ для которого выполняется $g_X(E) = \int_Y \sigma_X(E \mid y)\circ g_Y$	$\forall E \subseteq X$ $\sigma_X E\mid y)\cdot\ Y\to[01]$ 2 $\forall y \in Y$, $\sigma_x(\ \mid y)2^X \to [01]$
4	*H*-соответствие	Функция $\mu()\ X \to [01]$ называется *H*-соответствием по мере g, если выполняется $\mu(x) = g(E_H(x))$ $E_H(x) = \{x' \mid (x,x') \in H \subseteq X\times X'\}$	В зависимости от НМ g и отношения *H* определяет все классы НМ
5	НМ на отношении $H = X\times Y$	Для пространств (X,g_1) (Y,g_2) НМ на $H \subseteq X\times Y$ есть $g(H) = \bigvee_{i=1}^{\infty}\{g_1(E_i)\wedge g_2(F_i)\}$, $= \int_Y g_1(E(y))\circ g_2()$ $= \int_X g_2(F(x))\circ g_1()$, где $E_i \subseteq X$, $F_i = \Gamma_H(E_i) \subseteq Y$, а $\Gamma_H()$ - отображение соответствия Галуа	Ограничен , монотонность, непрерывность

№	Наименов.	Определение	Свойства
6.	H-операции	Для (X,g_1) и (Y, g_2) бинарная H-операция над НМ есть оператор, задающий нм на Z такую НМ g, что $\forall C \subseteq Z$. $g(C) = H_\omega\{g_1, g_2\} =$ $= g_H(H \cap \omega^{-1}(C))$ где $H \subseteq X\times Y$ $\forall H_i \subseteq H_j \subseteq X\times Y \Rightarrow C_i \subseteq C'_i \in Z$. $\omega\ P(X)\times P(Y) \to P(Z)$.	1. $(F(X), H_\omega)$ группоид. 2. H_ω - коммутативна. 3. H_ω - ассоциативна. 4. H_ω - дистрибутивна
7.	Нечеткий интеграл по расширенной НМ	Пространства $(X, f(\cdot))$ и $(Y, g(\cdot))$, связанны отображением φ: $F(X)\to F(Y)$, НИ от $h(x)$:$X\to[01]$ по расширенной НМ $g(\mu)$, где $\mu(Y) \in F(Y)$ на $E \subseteq X$ есть: $\int_E h(x)\circ g(\mu) = \sup_\gamma(\gamma \wedge$ $\wedge\, g(M_\beta \cap \Phi_\beta(H_\alpha \cap E)))$, где $\gamma = \alpha\wedge\beta, H_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$ $M_\beta = \{y \mid \mu(y) \geq \beta\}$, $\Phi_\beta = \{y \mid \varphi(H_\alpha \cap E) \geq \beta\}$.	Свойства аналогичны свойствам НИ Суджено за исключением свойств, связанных с условием ограниченности расширенной НМ

Ниже приведены некоторые ключевые соотношения нечетко-интегрального исчисления.

Таблица 10.2.

Соотношения нечетко-интегрального исчисления.

№	Наимен	Основное выражение	Следствия
1.	Соотношение НИ и интеграла Лебега	$-\left(\frac{1-\inf h}{2}\right)^2 \leq \int_X h\,dP - \int_X h\circ P \leq \left(\frac{\sup h}{2}\right)^2$	$\left|\int_X h\,dP - \int_X h\circ P\right| \leq \frac{1}{4}$
2.	Аналог формулы Байеса	$\int_{\mu_F(x)} \sigma_Y(F\mid x)\circ g_X = \int_{h_F(x)} \sigma_X(E\mid y)\circ g_Y$	Если E⊆X, F⊆Y четкие, то соотношение выполняется

№	Наимен.	Основное выражение	Следствия
3	Теорема Судженo-Фубини	$\int_Z h(x,y)\circ g_z = \int_X \left[\int_Y h(x,y)\circ g_Y\right]\circ g_X$ $g_z = g_1 \times g_1$	–
4	Опрделение НМ через Н-соответствия	$Bel_H(A) = \int_{\{x \mid E(x)\subseteq A\}} 1(x)\circ g(\cdot)$ $Pl_H(A) = \int_{\{x \mid E(x)\cap A\neq\varnothing\}} 1(x)\circ g(\cdot)$	Если g = Pr, $H\subseteq X\times X$ для которого $E_H(x_i) \neq E_H(x_j)$ имеем НМ Nes(.), Pos(.) соответств.
5	Расширенная НМ по НМ, результирующей Н-операцию	$g(\mu)[C] = \sup_{\alpha\in[01]} \int_{A_\alpha} [\alpha \wedge g_2(F(y)\cap B_\alpha)]\circ g_1$ $A_\alpha \omega B_\alpha = M_\alpha \cap C,$	Даны следствия для случаев 1. ω-унарная операц. 2. ω - унарная, тождеств операция
6	Сопряженные Н-операции	$\forall H^1_{\omega 1}\ \exists H^2_{\omega 1}$ - дистрибутивная; $\exists H^1_{\omega 2}$ - дистрибутивная;	–
7	Связь понятий НИ-исчисления	$\int_A \mu(x)\circ g_x = \widetilde{g}_\mu(A) = H_\omega(\pi, g)[A\neq\varnothing]$ $= \int_A \pi(E_H(y)\cap A)\circ g_x(\cdot) =$ $= \sup_{M_\alpha}\{\pi(\overline{M}_\alpha \cap A)\wedge g_x(M_\alpha\cap A)\}$ $\overline{M}_\alpha = (X\setminus M_\alpha)\cup CovM_\alpha$	–
8	Связь двойных НИ	$\forall\varphi(x), \exists l(y)$ $\int_{\varphi(x)}\left[\int_Y h(x,y)\circ g_2\right]\circ g_1 = \int_X\left[\int_{l(y)} h(x,y)\circ g_2\right]\circ g_1$	–

11. Моделирование нечетких процессов

11.1. Моделирование нечетких процессов на основе нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере

Практическое решение аналитических задач предусматривает необходимость моделирования процессов функционирования сложных объектов, их развития. Данные процессы могут быть представлены в виде динамической системы. Однако, анализ показал, что в силу ряда причин, рассмотренных ранее, при моделировании сложных объектов необходимо всесторонний учет влияния факторов неопределенности, что приводит к наличию нечетких данных в описании задач. При этом данные объекты могут быть представлены в виде нечетких динамических систем (НДС). В ряде работ рассматриваются следующее определение НДС

Определение 11. 1

НДС есть система представляющаяся кортежем

$$\langle \Omega, U, T, Y, \rho, \gamma, \mu_\rho, \mu_\gamma \rangle, \qquad (11.1)$$

где Ω - пространство состояний, U - пространство управлений, T - время (дискретное или непрерывное), Y - пространство выходных значений, $\rho \ \ (\Omega \times T) \times U \times T \to \Omega$ - отображение, описывающее реакцию НДС и формализующееся функцией вида

$$\mu_\rho(\omega_0, t_0, u, t, \omega) \ \ (\Omega \times T) \times U \times T \times \Omega \to [0 1], \qquad (11\ 2)$$

$\gamma \ \ \Omega \times T \to Y$ - нечеткое выходное отображение с функцией:

$$\mu_\gamma \ \ \Omega \times T \times Y \to [0 1], \qquad (11.\ 3)$$

как правило характеризующее некоторое нечеткое наблюдение Исходя из определения 11.1 видно, что состояние НДС в каждый момент времени $t \in T$ описывается некоторым распределением нечеткости $\mu_t(\omega) \in F(\Omega)$ (например: распределением меры вероятности, нечетким множеством, произвольной нечеткой мерой), где $F(\Omega)$ - множество всех функций распределения нечеткости на Ω. Детальный анализ существующих подходов к формализации нечетких данных показал, что наиболее приемлемым является подход основанный на использовании теории нечетких мер. Данный подход позволяет с единых позиций представить разнородные данные о функционировании моделируемых объектов, до некоторой степени обобщить другие подходы (теории вероятности, ошибок, интервальных средних, нечетких множеств субъективных вероятностей и т.д.) к формализации данных в условиях неопределенности.

Для НДС, с помощью которой моделируется тот или иной объект управления в аналитической задаче поддержки принятия решений, последовательность $\{\mu_t\ (\omega)\}$ образует в пространстве $F(\Omega)$ некоторый процесс, который называется нечетким процессом (НП).

Определение 11.2.

Нечетким процессом (НП) называется процесс, состояние которого в каждый момент времени $t \in T$ описывается некоторым распределением нечеткости $\mu_t(\omega) \in F(\Omega)$ на пространстве состояний процесса Ω.

Таким образом понимая под НП процесс, удовлетворяющий определению 11.2 определение НДС может быть представлено в виде:

Определение 11.3.

Под нечеткой динамической системой понимается система, динамика которой описывается нечетким процессом.

Описание систем, моделируемых в виде НДС оказывается весьма полезным, а иногда и единственно возможным в ряде конкретных прикладных задач. В частности, целесообразно использование НДС для описания реальных объектов возникает при решении задач прогнозирования, принятия решений в крупномасштабных системах, представления конфликтных систем и в других слабоструктурированных задачах.

Для представления НДС наибольшее распространение получили описания, основанные на теории нечетких множеств в виде нечетких композиционных уравнений, нечетких разностных уравнений, матрично-табличных представлений, ориентированных на описание НДС в дискретном времени.

Предложено описание непрерывной динамики НДС в виде нечетких дифференциальных включений, то есть дифференциальных включений в правой части соотношения которых стоит нечеткое множество. Такой подход к представлению НП еще до конца не исследован и требует дополнительного изучения. Однако, в силу того, что изменение функции принадлежности по времени для фиксированного $\omega \in \Omega$ не всегда является дифференцируемой функцией использование подхода нечетких дифференциальных включений является ограничительным и приемлемым лишь для определенного класса НП.

В приведенных выше подходах нечеткие данные не представлялись с помощью нечетких мер, что ограничивало возможность решения конкретных прикладных задач. Для описания и моделирования

реальных процессов при управлении сложными объектами на основе использования нечетких данных, представленных распределениями нечетких мер, необходимо применение нечетко-интегрального исчисления, которое позволяет определить требуемые зависимости между нечеткими мерами при преобразовании соответствующих пространств, что было рассмотрено в предыдущих главах.
В.П.Бочарниковым предложено описание НП при помощи нечетко-интегральных уравнений для дискретного времени. В этом случае динамика НДС описывается следующим образом. Если на пространстве состояний Ω определена нечеткая мера $g(\cdot)$: $2^{\Omega}\rightarrow[01]$, описывающая некоторые ограничения на Ω для НДС, $\mu_i(\omega)$: $\Omega\rightarrow[01]$ состояние НДС в *i*-й момент времени, а преобразование состояния системы на *i* + 1 шаге определяется оператором $h_{i+1}(\omega,\omega)$:$\Omega\times\Omega\rightarrow[01]$, то состояние НДС на *i* + 1 шаге будет описываться уравнением: ,

$$\mu_{i+1}(\omega)=\int\limits_{\mu_i(\omega)} h_{i+1}(\omega,\omega)\circ g(\cdot)\cdot \qquad (11.4)$$

Представленные в ряде работ описания НП ориентируются в основном на случай нечеткой функции четкого аргумента, то есть неопределенность состояния процесса определяется неопределенностью связанной с пространством состояний, а наблюдение времени является четким. Однако, практика показывает, что неопределенность состояния НП, который описывает динамику НДС, может быть вызвана и неопределенностью времени наблюдения процесса. Исходя из этого в наиболее общем случае НП целесообразно рассматривать как нечеткую функцию нечеткого аргумента. При этом описание НП непосредственно может быть представлено при непрерывном изменении нечеткого аргумента (то есть при непрерывном изменении нечеткого времени). Для описания нечеткости процесса по времени на Т целесообразно рассматривать некоторую нечеткую меру $F_t(\cdot)$: 2^{1} $\rightarrow$ $[01]$. Обозначим Г(*t*) произвольный временной интервал, определяющийся функцией $\Gamma(t)$: T $\rightarrow$ $[01]$.

Отметим, что частным случаем является четкий временной интервал F(t) = [0,t]. В дальнейшем будем полагать, что временное пространство Т и пространство состояний Ω для НДС связаны через условную нечеткую меру $\sigma_\omega(\ |t)$, те есть справедливо следующее соотношение:

$$g(\cdot)=\int\limits_T \sigma_\omega(\cdot|t)\circ F_t(\cdot)\cdot \qquad (11.5)$$

Исходя из этого вытекает следующая лемма для представления временных интервалов.

Лемма 11.1

Произвольный четкий или нечеткий временной интервал $\Gamma \in F(T)$ имеет нечеткое изображение в Ω, а непрерывная последовательность интервалов $\{\Gamma_n\}$ порождает в пространстве Ω непрерывный НП $f(\omega|t)$, соответствующий данной последовательности.

Доказательство.

Пространства Ω и *T* связаны через условную нечеткую меру $\sigma_\omega(\ |t)$. Согласно свойства нечеткого интеграла (9.11) справедливо представление: ,

$$\sigma_\omega(\cdot|t) = \int_\Omega 1(\omega) \circ \sigma_\omega(\cdot|t),$$

где $\forall \omega \in \Omega,\ 1(\omega) = 1$. Тогда, для произвольного нечеткого множества *f*(ω), исходя из (10.9), справедливо.

$$\sigma_\omega(f(\omega)|t) = \int_{f(\omega)} 1(\omega) \circ \sigma_\omega(\cdot|t) = \int_\Omega f(\omega) \circ \sigma_\omega(\cdot|t).$$

Отметим, что функция $\sigma_\omega(f(\omega)|t)$ есть функция распределения нечеткости на *T*, то есть $\sigma_\omega(f(\omega)|t)\cdot\ T \to [01]$, а следовательно эта функция может быть сопоставлена с некоторым временным интервалом $\Gamma(t)\cdot\ T \to [01]$. Таким образом для произвольного временного интервала Γ(*t*) на пространстве $(T,\ F_t(\ ))$ существует некоторое условное нечеткое ожидание μ*(t)* такое, что:

$$\forall A \subseteq \mathrm{T},\quad \int_A \Gamma(t) \circ F_t(\ ) = \int_A \mu(t) \circ F_t(\cdot).$$

Следовательно, если $\mu(t) = \sigma_\omega(f(\omega)|t)$, то существует нечеткое изображение *f*(ω) на Ω для временного интервала Γ(*t*), то есть для любого Γ *(t)* можно поставить в соответствие нечеткое множество $f_\Gamma(\omega)$.

Теперь рассмотрим последовательности временных интервалов Пусть $\{\Gamma_n\}$ есть монотонно возрастающая последовательность временных интервалов и пусть Γ(*t*) есть предел этой последовательности в момент времени $t \in T$, $\Gamma(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n$, то есть $\{\Gamma_n\}$ есть непрерывный НП на *T*.

Покажем, что в этом случае образованная в Ω последовательность также является непрерывным НП. Рассмотрим:

$$\int_T \Gamma(t) \circ F_t(\cdot) = \int_T \lim_{n\to\infty} \Gamma_n \circ F_t(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \int_T \Gamma_n \circ F_t(\cdot).$$

Однако, для Γ_n существует *такой* $f_n(\omega)$, что выполняется:

$$\int_{\Gamma} \Gamma(t) \circ F_t(\cdot) = \lim_{n\to\infty} \int_T \sigma_n(f_n(\omega)|t) \circ F_t(\cdot) = \int_T \lim_{n\to\infty} \sigma_\omega(f_n(\omega)|t) \circ F_t(\cdot) =$$

$$= \int_T \left[\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \circ \sigma_\omega(\cdot|t) \right] \circ F_t(\cdot) = \int_T \sigma_\omega \left[\lim_{n\to\infty} f_n(\omega)|t \right] \circ F_t(\cdot).$$

Однако имеем:

$$\int_T \Gamma(t) \circ F_t(\cdot) = \int_T \sigma(f_t(\omega)|t) \circ F_t(\cdot).$$

Следовательно существует предел последовательности $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f_t(\omega)$, то есть непрерывная монотонная последовательность временных интервалов $\{\Gamma_n\}$ порождает в Ω НП $f_n(\omega)$ такой, что для $\Gamma(t)$ существует $f_t(\omega)$. Что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 11.1 открывает возможность представления непрерывного НП, описывающего динамику НДС в аналитических задачах СМО, на основе нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере.

Теорема 11.1.

Пусть преобразование состояния НДС описывается нечетким отношением вида: $h'(\omega,\omega|t):(\Omega\times \mathrm{T})\times\Omega \to [01]$. Тогда НП, описывающий динамику НДС через каждый интервал времени $\Gamma(t) \in F(T)$ может быть описан нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_T h(\omega|t) \circ \tilde{g}(f_\Gamma(\omega)), \qquad (11.6)$$

где $h(\omega|t) = \int_{\mu_{t_0}(\omega)} h'(\omega,\omega|t) \circ g(\cdot)$ - оператор преобразования состояния НДС с учетом начальных условий $\mu_{t_0(\omega)}$, $\Gamma(t)$ - интервал времени, $g(\cdot)$: $2^\Omega \to [01]$ - нечеткая мера на Ω, $f_\Gamma(\omega)$: $\Omega \to [01]$ - НП на Ω, порожденный возрастающей последовательностью временных интервалов.

<u>**Доказательство**</u>.

Допустим, что на T определена нечеткая мера $F_1(\cdot)$, задающая нечеткость динамики НДС по времени. Тогда состояние НП можно представить в виде:

$$\mu_\Gamma(\omega)=\int_{\Gamma(t)} h(\omega|t)\circ F_t(\cdot)=\int_{\Gamma(t)} h(\omega|t)\circ\int_T 1(t)\circ F_t(\cdot)=$$

$$=\int_T[h(\omega|t)\wedge\Gamma(t)]\circ\int_T 1(t)\circ F_t(\cdot)=\int_T h(\omega|t)\circ\int_{\Gamma(t)} 1(t)\circ F_t(\cdot)=$$

$$=\int_T h(\omega|t)\circ\int_T \Gamma(t)\circ F_t(\cdot).$$

Согласно леммы 11.1, расширенная нечеткая мера, порожденная временным интервалом Г(t), может быть заменена расширенной нечеткой мерой порожденной условным нечетким ожиданием $\sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)$, то есть:

$$\int_T \Gamma(t)\circ F_t(t)=\int_\Gamma \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)\circ F_t(\cdot).$$

Тогда:

$$\mu_\Gamma(\omega)=\int_T h(\omega|t)\circ\int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)\circ F_t(\cdot).$$

Обозначим через $\psi_t(\cdot|\omega)$ - условную нечеткую меру, связывающую пространства Ω и T, и двойственную (сопряженную) мере $\sigma_\omega(\cdot|t)$. Тогда справедливо соотношение:

$$\int_{v(t)} \sigma_\omega(f(\omega)|t)\circ F_t(\cdot)=\int_{f(\omega)} \psi_t(v(t)|\omega)\circ g(\cdot),$$

где $v(t):T\to[01]$. В силу этого можем записать:

$$\mu_\Gamma(\omega)=\sup_{\alpha_\omega}\left\{\alpha_\omega\wedge\int_{H_\alpha(t)} \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)\circ F_t(\cdot)\right\}=$$

$$=\sup_{\alpha_\omega}\left\{\alpha_\omega\wedge\int_{f_\Gamma(\omega)} \psi_t(H_\alpha(t)|\omega)\circ g(\cdot)\right\}=\sup_{\alpha_\omega}\left\{\alpha_\omega\wedge\int_{\psi_t(H_\alpha(t)|\omega)} f_\Gamma(\omega)\circ g(\cdot)\right\},$$

где $H_\alpha(t)=\left\{t\middle|h(\omega|t)\geq\alpha_\omega\in[01]\right\}$ - множество α-уровня при фиксированном $\omega\in\Omega$. В силу того, что

$$\Psi_t(H_\alpha(t)|\omega)=\int_{H_\alpha(t)} 1(t)\circ\Psi_t(\cdot|\omega),$$ имеем следующее

представление:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \sup_{\alpha_\omega}\left\{\alpha_\omega \wedge \sup_\beta\left(\beta \wedge g\left(F_\beta \cap \Phi_\beta\left(H_\alpha^\omega(t)\right)\right)\right)\right\} =$$

$$= \sup_{\gamma_\omega}\left\{\gamma_\omega \wedge g\left(F_\beta \cap \Phi_\beta\left(H_\alpha^\omega(t)\right)\right)\right\},$$

$$\beta \in [01], \quad \gamma_\omega = \alpha_\omega \wedge \beta, \quad F_\beta = \left\{\omega \middle| f_\Gamma(\omega) \geq \beta\right\},$$

$$\Phi_\beta\left(H_\alpha^\omega(t)\right) = \left\{\omega \middle| \int_{H_\alpha^\omega(t)} 1(t) \circ \Psi_t(|\omega) \geq \beta\right\}.$$

Таким образом, полученное выражение соответствует выражению (9. 34) нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере и следствию 1 теоремы 9. 4 Исходя из этого можем записать

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_T h(\omega|t) \circ g(f_\Gamma(\omega))$$

Что и требовалось доказать

Таким образом, при помощи уравнения (11. 6) может быть описан непрерывный НП и определено его нечеткое состояние через интересующий нас нечеткий интервал времени. Полученный результат открывает возможности по моделированию динамики сложных объектов, рассматриваемых в аналитических задачах. Далее будут рассмотрены некоторые особенности НП описываемых уравнением (11. 6), а также показано, что представление НП через интеграл по расширенной нечеткой мерой является наиболее общим для представления НП

11.2. Особенность непрерывных нечетких процессов. Нечетко-дифференциальное представление нечетких процессов

Прежде чем мы перейдем к рассмотрению нечетко-дифференциальной записи НП остановимся немного на уравнении (11. 6) и попробуем отследить некоторые особенности НП описываемых таким уравнением В доказательстве теоремы 11. 1 присутствует эквивалентная запись для состояния НП в виде

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_T h(\omega|t) \circ \int_T \Gamma(t) \circ F(t).$$

Последовательность $\Gamma_i\,(t)$ образует в T непрерывный возрастающий процесс $(\Gamma_{i+1}(t) \geq \Gamma_i(t))$. Согласно леммы 10. 8 существует такая функция *s(t)* на *T* что

$$\int_T \Gamma(t) \circ F(t) = \int_T s(t) \circ F(t) = S. \quad (11.7)$$

При этом *s(t)* может быть отлична от Γ(*t*) (Рис. 11.1)

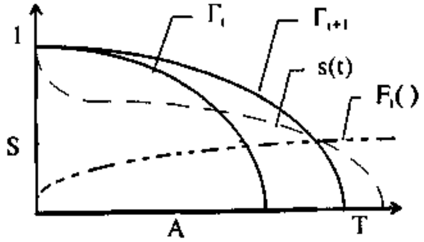


Рис. 11.1. К представлению нечетких временных интервалов

Соотношение (11. 7) для функции *s(t)* будет выполняться если $\forall t \in A \subseteq T, \quad s(t) \geq S$ Таким образом если приравнять $s(t)=\sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)$ можно наблюдать следующее. С увеличением времени $t \in T$ величина *S* интеграла от функции Γ(*t*) увеличивается, а следовательно увеличивается интервал $A \subseteq T$, где функция $\sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)$ принимает значение не менее $S \in [01]$. С увеличением Γ *(t)* значение интеграла определяющего $\mu_\Gamma(\omega)$ будет увеличиваться. Так как функция $h(\omega|t)$ описывает степень приращения значения функции принадлежности μ(ω*)* по времени, то в силу наличия вышеупомянутого свойства функции $\sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t)$ мы будем наблюдать следующий эффект. Функция $\mu_\Gamma(\omega)$ с увеличением Γ(*t*) будут иметь возрастающий по времени уровень неопределенности α(*t*) на фоне которого будет наблюдаться НП. То есть НП $\mu_\Gamma(\omega)$ может быть представлен в виде двух составляющих изменяющихся по времени:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \alpha_\Gamma(\omega) \vee \mu'_\Gamma(\omega), \quad (11.8)$$

где $\alpha_\Gamma(\omega)$ - есть постоянная на Ω функция уровня неопределенности возрастающая по Γ и являющаяся "диффузионной" составляющий НП; $\mu'_\Gamma(\omega)$ - НП отражающий "содержание" изменения состояния процесса и играющий роль "переносной" составляющей НП. Термины "диффузионной" и "переносной" составляющих заимствованы из представления стохастических процессов.

Теперь представим, что НП $f_\Gamma(\omega)$ задан на пространстве Ω и удовлетворяет условиям необходимым для представления НП через уравнение (11.6). По аналогии с представлением стохастических процессов определяемых интегралом Ито в виде стохастических дифференциальных уравнений мы можем рассмотреть символическую запись "приращений" составляющих описания НП через, так называемые, нечеткие дифференциалы. Будем полагать, что через интервал времени Г(t) приращение времени определяется состоянием нечеткого процесса $f_{\Gamma}(\omega)$. Пусть $fd(\cdot)$ - есть обозначение нечеткого дифференциала. Тогда нечеткое приращение по времени будет представляться символической записью $fd\, f_{\Gamma}(\omega)$.По аналогии с выше отмеченным, нечеткий дифференциал состояния НП будет записываться в виде $fd\ \mu(\omega)$. Тогда символическая запись уравнения (11.6) в виде нечеткого дифференциального уравнения примет вид:

$$fd\, \mu(\omega) = h(\omega|t)\ \ fd\, f(\omega). \qquad (11.9)$$

Уравнение (11.9) является символической записью, как и стохастические дифференциальные уравнения, и отражает тот момент, что состояние НП может быть найдено при вычислении нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мерс порожденной НП $f_{\Gamma}(\omega)$, отражающим неопределенность процесса по времени.
Запись уравнения НП через нечеткие дифференциалы (11.9) несколько упрощает запись уравнений динамики НДС. В дальнейшем мы будем использовать как интегральной записью уравнений динамики (11.6) так и его дифференциальным аналогом (11.9).

11.3. Дискретные нечеткие процессы. Композиционные нечеткие уравнения, как частный случай дискретных нечетко-интегральных уравнений

В ряде практических задач необходимо рассмотрение дискретных НП. Прежде чем мы будем рассматривать нечетко-интегральное представление дискретных НП целесообразно остановиться на алгебраической структуре множества нечетких временных интервалов. Временной интервал T наблюдения НП можно отождествить с множеством неотрицательных действительных чисел R_+. При этом произвольный момент времени $t \in T$ представляется неотрицательным действительным числом. В случае, когда мы хотим отразить. нечеткость момента времени и определенного им интервала времени наблюдения НП целесообразно использование нечетких неотрицательных действительных чисел.

Определение 11.4.
Нечеткое неотрицательное действительное число определяется как отображение $\rho : R_+ \to [01]$,удовлетворяющее условиям:
$\rho(0) = 0, \quad max\{\rho(r) \mid r \in R_+\} = 1$, (ограниченность),
$\forall r \in R_+ : \rho(r) = max\{\rho(r) \mid r' \in R_+, r' < r\}$, (непрерывность слева).
Таким образом, нечеткий момент времени $t \in F(T)$ мы отождествляем с нечетким неотрицательным действительным числом. При этом $t \in F(T)$ может быть интерпретировано следующим образом. Функция *ρ(t*) соответствующая t, $\rho(t): T \to [01]$ понимается как степень нечеткости принадлежности моменту времени *t* четкому интервалу [0, *t* [. Исходя из этого можно видеть, что функция *ρ(t)* есть неубывающая функция. А если установить однозначное соответствие между *t* и *[0,t [,* то функция *ρ* (*t*) будет удовлетворять свойствам нечеткой меры заданной на *T*. Если теперь использовать однозначность соответствия момента времени *t* и определенного им интервала *[0,t [* для случая нечеткого момента времени $\underline{t}$ мы можем определить нечеткий интервал $\Gamma(t) \in F(T)$ фиксированный этим $\underline{t}$. Функция Γ(*t*) отражает степень нечеткости того, что интервал [0, *t* [не покрывает нечеткий момент времени $\underline{t}$ определяемый функцией *ρ (t).*
Исходя из этого функция Γ(*t)* может быть определена по функции *ρ (t)* момента времени $\underline{t}$ как ее дополнение. При этом если *ρ (t)* есть нечеткая мера удовлетворяющая правилу нормировки по Суджено, то справедливо:

$$\Gamma(t) = \frac{1 - \rho(t)}{1 + \lambda\rho(t)} \in [01] \cdot \qquad (11.10)$$

В том случае, когда *ρ (t)* есть мера возможности (функция принадлежности) функция Γ(*t)* может быть восстановлена как:

$$\Gamma(t) = 1 - \rho(t). \qquad (11.11)$$

Пусть *H(R₊)* - множество всех неотрицательных действительных чисел. На *H(R₊)* возможно задание частичного порядка:

$$\rho \underset{\sim}{<} \varphi \Leftrightarrow \forall r \in R_+ : \varphi(r) \leq \rho(r), \qquad (11.12)$$

легко видеть, что
$\{H(R_+) <\}$

является решеткой. Следовательно множество всех нечеткихмоментов времени *H(T)* обладает свойством решетки Если обозначить G(*T*) множество всех нечетких интервалов Γ(*T*), то между G(*T*) и *H(T)* существует изоморфизм, а следовательно G(T) также как и $H(T)$ обладает свойством решетки.

На $H(R_+)$ может быть определена естественная алгебраическая операция задаваемая соотношением:

$$\{\rho \oplus \varphi\}(r) = \max\{\rho(p) \wedge \varphi(s) | p, s \in R_+, s + p = r\}. \quad (11.13)$$

Тогда $(H(R_+), \underset{\sim}{<}, \oplus)$ образует частично упорядоченную коммутативную полугруппу. Аналогично (11.13) на множестве G(T) возможно задание алгебраической операции $\oplus$ и тогда G(T), будет наделена структурой частично упорядоченной коммутативной полугруппы. При этом справедливо:

$$\Gamma_1 \prec \Gamma_2 \Leftrightarrow \forall t \in T : \Gamma_1(t) \le \Gamma_2(t).$$

$$\{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2\}(t) = \max\{\Gamma_1(p) \wedge \Gamma_2(s) | \, s, p \in T, s + p = t\}.$$

Определим в G(T) возрастающую последовательность нечетких интервалов $\{\Gamma_i(t) | i = 1, I\}$ определяемую рекуррентно:

$$\Gamma_i(t) = \Gamma_{i-1}(t) \oplus \Delta\Gamma(t), \quad (11.16)$$

При этом $\Delta\Gamma(t)$ можно трактовать как нечеткую дискрету по времени, а $\Gamma_i(t)$ последовательность нечетких дискретных интервалов времени через которые наблюдается НП.

В соответствии со структурой множества $\{\Gamma_i(t) | i = 1, I\}$ мы можем определить нечеткий дискретный процесс (НДП), как частный случай непрерывного НП, определенного уравнением (11.6).

Теорема 11.2

Пусть непрерывный НП, описывающий динамику НДС, представлен нечетко-интегральным уравнением (11.6). Тогда НДП относительно последовагепьюсти моментов времени i будет описываться дискретным нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\mu_{i+1}(\omega) = \int_\Omega h_i(\omega, \omega) \circ \tilde{g}(\mu_i(\omega)). \quad (11.17)$$

где $\tilde{g}(\mu_i(\omega))$ - расширенная нечикая мера, а $h_i(\omega, \omega)$ нечеткое отношение на пространстве состояний Ω в i - й дискретный момент времени, отражающее динамические характеристики НП.

Доказательство.

Пусть в i - й дискретный момент времени НП наблюдался в течении $\Gamma_i(t)$ нечеткого временного интервала. При этом в конце $\Gamma_i(t)$ НП имел состояние $\mu_i(\omega)$: $\Omega \to [01]$. В (i/+1)-й момент времени интервал наблюдения НП будет определяться функцией $\Gamma_{i+1}(t)$ задаваемой в виде:

$$\Gamma_i(t) = \Gamma_{i-1}(t) \oplus \Delta_i\Gamma(t),$$

где $\Delta_i\Gamma(t)$ - есть нечеткий временной интервал определяющий дискретность наблюдения НП в i- й момент времени. Таким образом, на $\Delta_i\Gamma(t)$ состояние $\mu_i(\omega)$ можно расценивать как начальное условие уравнения (11.6). Тогда справедливо:

$$\mu_{\Gamma_{i+1}(t)}(\omega) = \int_{\Gamma}\left[\int_{\mu_i(\omega)} h'(\omega,\omega|t) \circ g(\cdot)\right] \circ g(f_{\Delta_i\Gamma(t)}(\omega)).$$

Согласно свойств расширенной нечеткой меры и теоремы Судженo-Фубини можем записать:

$$\mu_{i+1}(\omega) = \int_{\mu_i(\omega)}\left[\int_T h'(\omega,\omega|t) \circ g(f_{\Delta\Gamma(t)}(\omega))\right] \circ g(\cdot).$$

Внутренний интеграл можно расценивать как интегральный оператор преобразования состояния НДС на нечетком интервале $\Delta_i\Gamma(t)$, то есть:

$$\int_T h'(\omega,\omega|t) \circ g(f_{\Delta_i\Gamma(t)}(\omega)) = h_i(\omega,\omega): \quad \Omega\times\Omega \to [01]\cdot$$

Тогда выражение для состояния $\mu_{i+1}(\omega)$ принимает вид:

$$\mu_{i+1}(\omega) = \int_{\mu_i(\omega)} h(\omega,\omega) \circ g(\cdot) = \int_{\mu_i(\omega)} h(\omega,\omega) \circ \int_{\Omega} 1(\omega) \circ g(\cdot) =$$

$$= \int_{\Omega} h_i(\omega,\omega) \circ \int_{\Omega} \mu_i(\omega) \circ g(\cdot) = \int_{\Omega} h_i(\omega,\omega) \circ g(\mu_i(\omega)).$$

Что и требовалось доказать.

Следует отметить, что если за нечеткий интервал $\Gamma_i(t)$ интегральный оператор преобразования системы был $h_i(\omega,\omega)$, а за $\Gamma_{i+1}(t)$: $h_{i+1}(\omega,\omega)$= $h_i(\omega,\omega)$ для всех $i \in I$, то ДНП будет стационарным. В этом случае ДНП будет описываться стационарным дискретным нечетко-интегральным уравнением:

$$\mu_{i+1}(\omega) = \int_{\Omega} h(\omega,\omega) \circ g(\mu_i(\omega))\cdot \qquad (11.18)$$

Полученное дискретное нечетко-интегральное уравнение описывающее ДНП включает в себя, как частный случай, известное нечеткое *max-min* композиционное уравнение, нашедшее широкое распространение в решении практических задач управления нечеткими системами. Напомним, что нечеткое *max-min* композиционное уравнение имеет вид:

$$\mu_{i+1}(\omega') = \max_{\omega\in\Omega} \min\{h(\omega,\omega'),(\mu_i(\omega)\}. \qquad (11.19)$$

где $h(\omega,\omega')$: $\Omega\times\Omega\to[01]$ - стационарное нечеткое отношение реализующее оператор преобразование состояние НДС.

Теорема 11.3.

Нечеткое *max-min* композиционное уравнение (11.19) является частным случаем дискретного нечетко-интегрального уравнения (11.18), если Ω - множество равновозможных состояний НДС, т.е. $\forall\omega\in\Omega, g(\omega)=1$.

Доказательство.

Рассмотрим более подробно расширенную нечеткую меру в уравнении (11.30) для $A \subseteq \Omega$ *:*

$$g_{\mu_t(\omega)}(A)=\int_A \mu_t(\omega)\circ g(\cdot).$$

Так как согласно условия теоремы g(·) есть мера возможности такая, что $\forall\omega\in\Omega, g(\omega)=1$,то данное выражение можно представить в виде:

$$\int_A \mu_t(\omega)\circ g(\cdot)=\sup_{\alpha\in[01]}\{\alpha\wedge g(M_\alpha\cap A)\}=\sup_{\alpha\in[01]}\left\{\alpha\wedge\max_{\omega\in M_\alpha\cap A} g(\omega)\right\},$$

где $M_\alpha=\{\omega|\mu_t(\omega)\geq\alpha\in[01]\}$. Тогда, если $M_\alpha\cap A\neq\varnothing$, то $g(M_\alpha\cap A)=1$ и следовательно:

$$\tilde{g}_{\mu_t(\omega)}(A)=\int_A \mu_t(\omega)\circ g(\cdot)=\max_{\omega\in A}\mu_t(\omega).$$

Отсюда исходный интеграл можно представить в виде:

$$\mu_{t+1}(\omega)=\int_\Omega h(\omega,\omega)\circ g_{\mu_t(\omega)}(\cdot)=\max_{E\subseteq\Omega}\left\{\min_{\omega\in E}h(\omega,\omega')\wedge\max_{\omega\in E}\mu_t(\omega)\right\},$$

где

$$\min_{\omega\in E}h(\omega\omega')$$

определяет α - уровень нечеткого множества $h(\omega,\omega')$ при

фиксированном ω'∈Ω . Следует отметить, что для вложенной последовательности множеств $E_1\subseteq E_2\subseteq...\subseteq E_i\subseteq...,\quad\forall i\ E_i\subseteq\Omega$ функция $\min_{\omega\in E}h(\omega,\omega')$ при фиксированном ω'∈Ω является не возрастающей,

то есть если: $E_i\subseteq E_j\subseteq\Omega$, то:

$$\min_{\omega\in E_i}h(\omega,\omega')\geq\min_{\omega\in E_j}h(\omega,\omega').$$

Следовательно, максимум по $E \subseteq \Omega$ в выражении для $\mu_{i+1}(\omega)$ достигается при рассмотрении всех одноточечных подмножеств $E_j=\{\omega_j\}$. Отсюда получаем:

$$\mu_{i+1}(\omega') = \max_{E_j \subseteq \Omega}\left\{\min_{\omega \in E_j} h(\omega,\omega') \wedge \max_{\omega \in E_j} \mu_i(\omega)\right\} = \max_{\omega_j \in \Omega}\left\{h(\omega_j,\omega') \wedge \mu_i(\omega_j)\right\}.$$

Полученное выражение есть ничто иное, как *min-max* композиционное уравнение (11.19) определяющее динамику дискретной НДС. Что и требовалось доказать.

Таким образом, из доказательства теоремы 11.3. следует, что полученное нечетко-интегральное уравнение (11.30) для ДНП охватывает известное и широко используемое *min-max* композиционное уравнение как частный случай для распределения нечеткой меры возможности на пространстве состояний НДС. Этот факт позволяет использовать дискретное нечетко-интегральное уравнение (11 18), моделирующие более широкий спектр неопределенностей НП от возможности до необходимости появления того или иного состояния НДС. При этом использование g_λ-мер позволяет учитывать различные семантические модальности неопределенности в НДС. Исходя из этого следует, что использование уравнений типа (11.17) является более гибким инструментом моделирования НДС в аналитических задачах, чем широко применяемые композиционные уравнения типа (11.19).

11.4. Нечетко-интегральные уравнения непрерывных управляемых нечетких процессов

В предыдущих параграфах мы рассматривали НП в непрерывном и дискретном времени, которые не учитывали возможное воздействие управляющих факторов. При этом предполагалось, что оператор НДС, определяющий ее динамику, описывается нечетким отношением

$$h(\omega,\omega | t): (\Omega \times \mathrm{T}) \times \Omega \to [01],$$

не зависящим от внешних факторов, в том числе и от управляемых. Такие НП могут характеризоваться как свободные НП. В настоящем параграфе мы будем рассматривать динамику НДС при воздействии на нее управляющих факторов или короче - управления. Моделирование управляемых НДС наиболее актуально при решении задач оптимизации управления, которые являются ключевыми для принятия решений.

Пусть на НДС в каждый момент времени $t \in T$ действует управляющее воздействие $u \in U$, где U - множество всех возможных управлений. Тогда управление можно рассматривать как функцию времени u(t). В том случае, когда мы хотим рассматривать нечеткое управление, данная нечеткость может выражаться либо как нечеткость на пространстве управлений U, либо как нечеткость на временном пространстве T. Последнее характерно для случая, когда точно неизвестно начало действия управляющих факторов на НДС. Например, случай нечеткого запаздывания управления. Таким образом, наиболее общим случаем является управление как нечеткая функция нечеткого аргумента. Исходя из сказанного управление может быть представлено как НП характеризующийся функцией вида;

$$c(u|t): U\times T\rightarrow[01]. \tag{11.20}$$

Теперь рассмотрим следующую теорему о представлении управляемого НП через нечетко-интегральное уравнение по расширенной нечеткой мере.

Теорема 11.4.

Пусть на НДС действует управление $c(u|t): U\times T\rightarrow[01]$ и оператор преобразования состояния НДС с учетом начальных условий $\mu_0(\omega)$ описывается нечетким отношением $h(u,\omega|t): (\Omega\times U)\times T\rightarrow[01]$. Тогда динамика непрерывной НДС с учетом процесса управления описывается нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\mu_\Gamma(\omega)=\int\limits_{c(u|t)} h(\omega,u|t)\circ g_{H_{Ut}}\left(f_\Gamma(\omega)\right), \tag{11.21}$$

где $\Gamma(t): T\rightarrow[01]$ - нечеткий временной интервал наблюдения НП, $f_\Gamma(\omega)$ - соответствующий $\Gamma(t)$ НП на Ω,

$$\tilde{g}_{H_{Ut}}\left(f_\Gamma(\omega)\right)=\int\limits_{H\{v_u,\Psi(\cdot|\omega)\}} f_\Gamma(\omega)\circ g(\ ) -$$

расширенная нечеткая мера, $H\{v_u,\psi_t(\cdot|\omega)\}$ - H-операция над нечеткими мерами: $v_u(\cdot)$ - ограничения на управления и $\psi_t(\ |\omega)$, которая порождена отношением $H\subseteq U\times T$ возникающим при β-уровнях нечеткого отношения $h(\omega,u|t)\wedge c(u|t)$ и фиксированном $\omega\in\Omega$.

Доказательство.

Состояние НДС через интервал времени $\Gamma(t)$ может быть определен согласно теоремы 11.1. следующим нечетко-интегральным уравнением:

$$\mu_\Gamma(u\omega) = \int_{\Gamma(t)} h(u,\omega|t) \circ F_t(\cdot) =$$

$$= \int_T h(u,\omega|t) \circ \int_{\Gamma(t)} 1(t) \circ F_t(\cdot) = \int_T h(u,\omega|t) \circ \int_T \Gamma(t) \circ F_t(\cdot),$$

где $\mu_\Gamma(u, \omega)$ - состояние НДС зависящие от принятого на интервале Г(*t*) управления. Согласно леммы 11.1 можем записать:

$$\int_T \Gamma(t) \circ F_t(t) = \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)/t) \circ F_t(\cdot),$$

f_Γ (ω) - соответствующий Г(*t*) НП на Ω , а $\sigma_\omega(\ |t)$ - условная нечеткая мера связывающая пространства Г и Ω. Следовательно:

$$\mu_\Gamma(u,\omega) = \int_T h(u,\omega) \circ \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(\cdot).$$

Для фиксированной на Г(t) последовательности управлений c(u,t) ограниченных на U нечеткой мерой $v_u(\ ): 2^U \to [01]$, состояние НП μ_Γ (ω) будет определяться соотношением:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_{c(ut)} \left[\int_T h(u,\omega,t) \circ \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(t) \right] \circ v_u(\cdot).$$

Согласно теоремы Суджено-Фубини можем записать:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_T \left[\int_{c(ut)} h(u,\omega,t) \circ v_u(\ ) \right] \circ \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(t) =$$

$$= \int_T \left[\int_U [h_\omega(u,t) \wedge c(u,t)] \circ v_u(\cdot) \right] \circ \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(t).$$

Согласно теоремы 10. 2 можем рассмотреть эквивалентное выше приведенному выражение:

$$\mu_\Gamma(\omega) = \int_{T\times U} \{h_\omega(u,t) \wedge c(u,t)\} \circ \left\langle v_u(\cdot) \times \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(\cdot) \right\rangle,$$

где $h_\omega(ut) = h(u\omega|t)$, а

$$\left\langle v_u(\cdot) \times \int_T \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(\cdot) \right\rangle = P_H(\cdot).$$

декартово произведение нечетких мер заданных на U и на T, при этом $H \subseteq U \times T$, $P_H(\cdot): 2^{U\times T} \to [01]$. Согласно определения 10.3 можем записать:

$$P_H(H) = \sup_{E_i \subseteq U}\left\{v_u(E_i) \wedge \int_{\Gamma_H(E_i)} \sigma_\omega(f_\Gamma(\omega)|t) \circ F_t(\cdot)\right\},$$

где $E_i \subseteq U, \Gamma_H(E_i) \subseteq T$, $\Gamma_H(\ )$ - отображение (10.20), входящее в соответствие Галуа. Пусть $\psi_t(\ |t)$ - условная нечеткая мера двойственная мере $\sigma_\omega(\ |t)$. Тогда, приведенное выше выражение может быть переписано в следующем виде.

$$P_H(H) = \sup_{E_i \subseteq U}\left\{v_u(E_i) \wedge \int_{\psi(\Gamma_H(E_i)|\omega)} f_\Gamma(\omega) \circ g_\omega(\cdot)\right\}.$$

В силу того, что для фиксированного $E_i \subseteq U$, $v_u(E_i) = \text{coust}$ и исходя из свойств соответствия Галуа согласно (9.21), (9.43) можем записать:

$$P_H(H) = \sup_{E_i \subseteq U}\left\{v_u(E_i) \wedge \int_\Omega \psi_t(\Gamma_H(E_i)|\omega) \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot)\right\} =$$

$$= \int_\Omega \sup_{E_i}\left\{v_u(E_i) \wedge \psi_t(\Gamma_H(E_i)|\omega)\right\} \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot) =$$

$$= \int_\Omega \sup_{E_i}\left\{v_u(E_i) \wedge \int_T \chi_{\Gamma_H(E_i)}(t) \circ \psi_t(\cdot|\omega)\right\} \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot) =$$

$$= \int_\Omega \left\{\int_T \sup_{E_i}\{v_u(E_i) \wedge \chi_{\Gamma_H(E_i)}(t)\} \circ \psi_t(\cdot|\omega)\right\} \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot).$$

Так как справедливо, что $\sup_{E_i}\{v_u(E_i) \wedge \chi_{\Gamma_H(E_i)}(t)\} = v_u(E(t))$,

где $E(t) = \{u \mid (u, t) \in H \subseteq U \times T\}$, то имеем:

$$P_H(H) = \int_\Omega \left\{\int_T v_u(E(t)) \circ \psi_t(\cdot|\omega)\right\} \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot).$$

Согласно леммы 10.3 внутренний интеграл есть нечеткая мера декартового произведения мер $v_u(\ )$ и $\psi_t(\cdot|\omega)$ на отношении $H \subseteq U \times T$, и в случае определения алгебры на $U \times T \times Z$, где $Z = \omega(H)$, еегь H -операцией над данными мерами и мы можем записать:

$$\int_T v_u(E(t)) \circ \psi_t(\cdot|\omega) = H\{v_u, \psi_t(\cdot|\omega)\}$$

Таким образом нечеткая мера $P_H(H)$ определяется соотношением:

$$P_H(H) = \int_\Omega H\{v_u, \psi_t(\cdot|\omega)\} \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot).$$

Тогда, согласно приведенным выше выражениям, состояние НДС через интервал времени Г (t) может быть определено как:

$$\mu_\Gamma(\omega)=\int_{T\times U}\{h_\omega(u,t)\wedge c(u,t)\}\circ P_H(\cdot)=$$

$$=\int_{T\times U}\{h_\omega(u,t)\wedge c(u,t)\}\circ\int_\Omega H\{v_u,\Psi_t(\cdot|\omega)\}\circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot)=$$

$$=\int_{c(u,t)}h(\omega,u|t)\circ\int_{H\{v_u,\Psi_t(|\omega)\}}f_\Gamma(\omega)\circ g(\cdot)=$$

$$=\int_{c(u,t)}h(\omega,u|t)\circ g_{H_{UT}}(f_\Gamma(\omega)).$$

Что и требовалось доказать.
Теорема 11.4 позволяет описывать динамику управляемых НП для НДС, моделирующих реальные объекты в аналитических задачах поддержки принятия решений. Отметим, что практически нечетко-интегральные уравнения описывающие управляемые и неуправляемые НП сходны между собой и являются уравнениями с интегралом по расширенной нечеткой мере. Отличием является то, что для управляемого НП связь между пространствами Ω и Т учитывает влияние на НП управляющих факторов как через последовательность управлений c(u,t), так и через учет нечетких ограничений на управление $v_u(\ ).\ 2^U\to[01]$.

В заключении данной главы отметим, что как и для не управляемых НП в случае наличия управления возможно рассмотреть нечетко-дифференциальную запись уравнений в следующем виде:

$$f d\mu(\omega)=\left[h(\omega,u|t)\wedge\bar{c}(\omega,u,t)\right]f d f_1^{\,u}(\omega),\qquad(11.22)$$

где $\forall\omega\in\Omega,\ \bar{c}(\omega,u,t)=c(u,t)$ - цилиндрическое расширение функции c(u,t);

$$f_\Gamma^{\,u}(\omega)=f_\Gamma(\omega)\wedge H\{v_u,\Psi(\cdot|\omega)\}-\qquad(11.23)$$

есть функция, учитывающая временную неопределенность (аналог броуновского движения в стохастических дифференциальных уравнениях) НП с учетом влияния управляющих факторов из множества U.
В заключении главы преведем ее основные результаты в виде табл. 11.1.

Таблица 11.1.

Описания различных видов НП.

Вид НП	Математическая модель	Дополнительные данные
Непрерывный неуправляемый НП	$\mu_\Gamma(\omega) = \int_T h(\omega \mid t) \circ g(f_\Gamma(\omega))$, где $h(\omega \mid t) = \int_{\mu_{t_0}(\omega)} h'(\omega, \omega \mid t) \circ g()$ оператор преобразования состояния НП с учетом НУ $\mu_{t_0(\omega)}$, $\Gamma(t)$ - интервал времени, $g(\ )$- НМ на Ω, $f_t(\omega)$: $\Omega \to [01]$ - НП на Ω, порожденный возрастающей послед. временных интервалов.	Дифференциальная запись $fd\,\mu(\omega) = h(\omega \mid t)\ fd\,f(\omega)$, где $fd(.)$ - обозначение нечеткого дифференциала (аналог стохастического дифференциала)
Непрерывный управляемый НП	$\mu_\Gamma(\omega) = \int_{\tilde{h}(u\,t)} h(\omega, u \mid t) \circ g_{H_{UT}}(f_\Gamma(\omega))$ где $h(u,\omega \mid t)$ - аналог. п.1 табл.6, $c(u \mid t)$ - нечеткое управление, $f_t(\omega)$ - аналогично п.1 табл 6, $g_{H_{UT}}(f_\Gamma(\omega)) = \int_{H\{v_u\ \Psi_t(\cdot \mid \omega)\}} f_\Gamma(\omega) \circ g()$ расширенная нм, $h\{v_u, \psi_t(\ \mid \omega)\}$ - H-операция над НМ: $v_u(\cdot)$ - огранич. на упр. и $\psi_t(\ \mid \omega)$, на отношении $h \subseteq \{(u,t) \mid h(\omega,u \mid t) \wedge c(u \mid t) \geq \beta$, $\omega = \text{const}.\}$	Дифференциальная запись $fd\,\mu(\omega) = [h(\omega,u \mid t) \wedge c(\omega,u,t)]$ $fd\,f_\Gamma^u(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega,\ c(\omega,u,t) = c(u,t)$ $f_\Gamma^u(\omega) = f_t(\omega) \wedge H\{v_u, \Psi(\omega)\}$ аналог броуновского движения в стохастических дифференциальных уравнениях

Вид НП	Математическая модель	Дополнительные данные
Дискретный неуправляемый НП	$\mu_{i+1}(\omega) = \int_\Omega h_i(\omega, \omega) \circ g(\mu_i(\omega))$. где $g(\mu_i(\omega))$ - расширенная НМ, а $h_i(\omega, \omega)$ - нечеткое отношение на Ω в i - й дискретный момент времени, отражающий динамич хар-ки НП.	max-min композиционное уравнение есть частный случай модели дискретного неуправляемого НП
Дискретный управляемый НП	$\mu_{i+1}(\omega) = \int_{\Omega \times U} h_i(\omega, \omega, u) \circ$ $\circ \langle g(\mu_i) \times v_u(c_i) \rangle$. $h_i(\omega, \omega, u)$ - аналогично п.2, $\langle \times \rangle$ - декартово произведение НМ.	Аналогично п.3 табл.5.1

12. РЕШЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ НЕЧЕТКИХ ПРОЦЕССОВ

12.1. Понятие нечеткого изображения. Оценка статического состояния нечеткого процесса

Для представления нечеткой информации в реальных системах обработки оказывается полезным использование дискретного пространства состояний Ω. Это связано с удобством представления сигналов в вычислительных машинах, сокращение операций по обработке информации и другими моментами.
В том случае когда исходная информация носит четкий характер или представляется непрерывным распределением нечеткости (например непрерывной функции принадлежности (ФП) на пространстве состояний, то для перехода к дискретному представлению используется отображение в нечеткие изображения.
Под нечетким изображением понимается в общем случае следующее. Входной информации *u* в виде точного значения или в виде распределения нечеткости ставится в соответствие вектор $u[\eta]$, называющийся нечетким изображением, элементы которого выражают нечеткую меру соответствия входной информации *u* некоторой совокупности заданных априорно нечетких мер $Q(\Omega)\subseteq F(\Omega)$, где F(Ω) -множество всех возможных распределений нечеткости на Ω . Каждая мера $q : 2^{\Omega} \rightarrow [01]$ может определять некоторую нечеткую переменную.

Определение 12.1.

Под нечеткой переменной понимается тройка $\langle \eta, \Omega, q_{\eta} \rangle$, где: η - наименование нечеткой переменной; Ω - область ее определения или универсальное множество;

$q_{\eta}: 2^{\Omega} \rightarrow [01]$

распределение нечеткой меры на Ω, соответствующее понятию η.
Для получения нечеткого изображения информации и семейство *Q*(Ω) определяется конечным множеством мер $q(\cdot)$ таких, что:

$$(\forall \omega \in \Omega),\ \exists\, i \in N,\ \ q_{\eta_i}(\omega) > 0, \qquad (12.1)$$

где $N = \mathrm{Card}\ Q(\Omega)$. То есть семейство *Q*(Ω) обеспечивает некоторое покрытие пространства Ω и для множества $W = \{\eta\}$ наименований нечетких переменных определяет условную нечеткую меру $q_\Omega(\cdot|\eta)$.
Нечеткая или четкая входная информация *u* может быть аппроксимирована в виде некоторой функции $\mu_u(\omega)\colon\ \Omega \to [0\,1]$ на пространстве состояний. Тогда вектор нечеткого изображения может быть определен как:

$$u[\eta] = \int_\Omega \mu_u(\omega) \circ q_\Omega(\,|\eta). \qquad (12.2)$$

Если обозначить как *U*(*W*) множество всех возможных векторов $u[\eta_i]$ для фиксированного семейства мер *Q*(Ω), то интегральная зависимость (12.2) определяет отображение вида:

$$F[\eta]\colon F(\Omega) \to U(W). \qquad (12.3.)$$

Введенное таким образом понятие нечеткого изображения сходно с лингвистическими переменными. Если множество W - есть термножество нечеткой переменной, а $u[\eta_i]$, $i \in \overline{1, N}$ есть мера возможности принадлежности входной информации к нечеткому понятию $\eta_i \in W$, то нечеткое изображение $u[\eta_i]$ есть нечеткое множество заданное на множестве термов лингвистической переменной. При этом для функции принадлежности термов η_i лингвистической переменной накладываются дополнительные к (12.1) ограничения. В силу этого нечеткое изображение есть более широкое понятие, чем лингвистическая переменная, так как включает ее как частный случай.
Если входная информация *u* есть некоторый вектор пришаков, описывающих некоторое понятие с *N* шкальными оценками, то возникает проблема оценивания нечеткого изображения $u[\eta]$ информации *u* по всему вектору признаков (характеристик). То есть необходимо нахождение такого вектора $u[\eta]$, который адекватно описал бы отнесение входной информации о векторе признаков (характеристик) к множеству шкальных оценок рассматриваемого понятия.
Отметим, что если множество нечетких переменных η_i, $i \in \overline{1, N}$ для каждой переменой входного вектора *u* одно и тоже, то задача оценки нечеткого изображения сходна с задачей многокритериального оценивания объектов.
Если мы опишем состояние НП в фиксированный момент времени $t \in T$ в виде нечеткого изображения, то пространство состояний НДС будет

уже не Ω, а W. В том случае, когда исходная информация определена набором характеристик $\{u_j\}$ $j=\overline{1,N_j}$, каждая из которых фиксирована на своем пространстве значений Ω_j, то задача оценки нечеткого изображения $u[\eta]$, $\eta \in W$ сводится к нахождению оператора:

$$F[\eta] : F(\Omega_1)\times\ldots\times F(\Omega_j) \to U(W). \quad (12.4)$$

Таким образом, нахождение оператора (12.4) позволяет найти оценку статического состояния НП в случае «сложной» входной информации *U*.

Рассмотрим формальное решение этой задачи. Пусть состояние НП описывается на пространстве $W = \{\eta_i\}$, $i=\overline{1,N}$. Для оценки статического состояния НП на пространстве Ω_j компонент вектора *u* входной информации должны быть определены семейства Q (Ω_j) нечетких мер соответствующих $W\ \forall j\ Card\ Q(\Omega_j) = N$.

Обозначим $q_j(\ |\eta)$ - условную нечеткую меру, порожденную семейством Q (Ω_j). Все семейство условных нечетких мер $\{q_j(\cdot|\eta)\}$ для всех компонент вектора и входной информации будем обозначать как $q(\cdot|\eta,\ u_j)$, где $u_j \in$ U, j - й компонент вектора, а U - множество всех компонент. Тогда, нечеткое изображение статического состояния НП будет определяться соотношением:

$$u[\eta] = \int_U \left\{ \int_{\Omega_j} \mu_j(\omega) \circ q(\cdot\,|\,\eta, u_j) \right\} \circ g_U(\cdot), \qquad (12.5)$$

где $\mu_j(\omega)$- функция принадлежности j-й компоненты вектора входной информации, а $g_U(\cdot)$ - мера важности учета j- й компоненты для оценки по $\eta \in W$. В более общем случае $g_U(\cdot)$ может иметь свое значение для каждого состояния $\eta \in W$. В этом случае $g_U(\cdot|\eta)$- является условной нечеткой мерой и тогда имеем:

$$u[\eta] = \int_U \left\{ \int_{\Omega_j} \mu_j(\omega) \circ q(\cdot|\eta, u_j) \right\} \circ g_U(\cdot|\eta), \qquad (12.6)$$

где внешний интеграл берётся для соответствующих компонен $\eta \in W$. Интегральные операторы (12.5) и (12.6) являются соответствующими операторами вида F[η] (12.4)

Таким образом для скалярных и векторных величин преобразования в нечеткие изображения выполняются в соответствии с табл. 12.1.

Таблица 12.1.

Определение нечеткого изображения.

Вид входной информации	Отображение	Выражение для определения
Скалярная величина $U \in \Omega$ - четкая инф.; $\mu_u(\omega)$: $\Omega \to [01]$ - нечеткая инф.	$\Phi[\eta] : F(\Omega_1) \to F(W)$. $\eta_i \in W$ - множество наименований нечетких переменных	$u[\eta] = \int_\Omega \mu_u(\omega) \circ q_\Omega(\cdot\|\eta)$. $q_\Omega(\cdot\|\eta)$ - условная НМ, индексированная элементами множества w
Векторная величина $U = \{\mu_u^j(\omega)\} \in$ $\in F(\Omega_1)\times...\times F(\Omega_j)$	$\Phi[\eta]$: $F(\Omega_1)\times...\times$ $\times...\times F(\Omega_j) \to F(W)$.	$u[\eta] = \int_U \left\{ \int_{\Omega_j} \mu_u^j(\omega) \circ q(\eta, u_j) \right\} \circ g_U()$, $g_u(\cdot)$ - мера важности учета j - й компоненты для оценки по $\eta \in W$

12.2. Фильтрация статического состояния нечеткого процесса на основе квантификации

В данном пункте будем полагать, что рассматривается состояние НП, представленное нечетким изображением $\mu(\omega)$: $\Omega \to [01]$ на пространстве дискретных состояний процесса. В том случае, когда Ω имеет большую мощность возникает необходимость выделения некоторого подмножества S(ω) наиболее значимых состояний НП по информации о распределении μ(ω). При этом, для математическою моделирования лингвистических термов, определяющих мощность значимых состояний процесса типа "большинство", "по меньшей мере половина" и т.д. могут применяться нечеткие квантификаторы.

Нечеткий квантификатор Q на пространстве Ω есть распределение степеней нечеткости на множестве целых чисел $\{0, 1, .., q, ...\} = R^+$.

Нечеткий квантификатор Q может быть задан как нечеткое кардинальное число $|\mu(\omega)|$ множества μ(ω) с конечным носителем:

$$\forall n \in R^+, \quad \varphi_{|\mu(\omega)|}(n) = \sup\{\alpha, |M_\alpha| \geq n\},$$

где $\alpha \in [01]$, $M_\alpha = \{\omega | \mu(\omega) \geq \alpha\}$.В этом случае имеем:

$$\varphi_{|\mu(\omega)|}(0) = 1, \quad \forall i \geq 0, \; \varphi_{|\mu(\omega)|}(i) \geq \varphi_{|\mu(\omega)|}(i+1).$$

Функция φ(·) моделирует семантическое высказывание " μ(ω) содержит по меньшей мере *i* элементов". Если же наоборот, мы определяем нечеткий квантификатор Q как " μ(ω) содержит более *p* элементов", то функция Q(i) определяет собой степень необходимости того, что $i \geq$ p:

$$Q(i) = \inf_{i<j}\left\{1-\varphi_{|\mu(\omega)|}(j)\right\} = 1-\varphi_{|\mu(\omega)|}(i+1). \quad (12.8)$$

Для определения наиболее значимого подмножества элементов (возможно нечеткого) определяющего по информации μ(ω) уточненное состояние НП необходимо найти такое подмножество S*(ω) $\in$ F(Ω) для которого выполняется:

$$S^*(\omega) = \arg\max_{S(\omega)} Val\left(S\middle|Q,\mu(\omega)\right), \quad (12.9)$$

где $Val(S|Q,\mu(\omega))$- есть нечеткая мера истины того, что S содержит Q элементов со свойством μ(ω). Данную меру будем определять из условий:

- в S(ω) должно содержаться около Q элементов;
- в S(ω) содержаться не более "0" элементов не удовлетворяющих свойству μ(ω).

Для моделирования первого условия будем использовать абсолютный квантификатор $Q^1(r)$:

$$Q^1(r) = Q^1\left(\sum_{i=1}^{q} m(\omega_i)\right): R^+ \to [01], \quad (12.10)$$

где $m(\omega) = \min(S(\omega),\mu(\omega))$.

Для определения второго условия запишем функцию:

$g(\omega) = \min(S(\omega), 1-\mu(\omega))$.

и для нее найдем квантификатор Q^2 "более 0 элементов":

$$Q^2(0) = 1-\varphi_{|\mu(\omega)|}(0+1) = 1-\sup\left\{\alpha\middle\| G_\alpha\right| \geq 0\} = 1-\max_{\omega\in\Omega} g(\omega) =$$
$$= 1-\max_{\omega\in\Omega}\left[S(\omega)\wedge\left(1-\mu(\omega)\right)\right].$$

(12.11)

Тогда мера $Val(\,)$ определяется соотношением:

$$Val\left(S\middle|Q,\mu(\omega)\right) = Q^1 \wedge Q^2 = Q^1(r)\wedge\left\{1-\max_{\omega\in\Omega}\left[S(\omega)\wedge\left(1-\mu(\omega)\right)\right]\right\} =$$
$$= Q^1(r)\wedge\max_{\omega\in\Omega}\left[\bar{S}(\omega)\wedge\left(1-\mu(\omega)\right)\right] = Q^1(r)\wedge\min_{\omega\in\Omega}\left[S(\omega)\wedge\mu(\omega)\right] =$$
$$= Q^1(r)\wedge\min_{\omega\in\Omega}\left[S(\omega)\vee\mu(\omega)\right].$$

Окончательно имеем:

$$Val(S|Q,\mu(\omega)) = Q^1\left(\sum_{i=1}^{q}\min(S(\omega_i),\mu(\omega_i))\right)\wedge\min_{\omega\in\Omega}[S(\omega)\vee\mu(\omega)]. \quad (12.12)$$

На основании выражений (12.9), (12.12) можно выделить подмножество $S(\omega)\in F(\Omega)$ состоящее из Q элементов, определяющих состояние НП. Данные выражения дают возможность фильтрации статического состояния процесса с целью снижения размерности описания состояния, уточнения состояния и т.д. В заключении отметим, что в случае необходимости определения для выделенного состояния S(ω)) некоторой нечеткой пропорции вида, "по меньшей мере x %" целесообразно использование пропорционального квантификатора в виде нечеткого числа из интервала [01] такое, что: $\forall x \le y,\ Q(x)\le Q(y),\ \ Q(1)=1.$ При этом, квантификатор определяется как функция:

$$Q\left(\frac{|\mu(\omega)|}{q}\right):[01]\to[01],\quad q = Card\Omega.$$

Для иллюстрации фильтра статического состояния НП рассмотрим следующий пример.

Пример 12.1.

Пусть в i-й дискретный момент времени наблюдения НП реализовалось состояние $R_i(\omega)$, описываемое на дискретном пространстве Ω , *Card* Ω. = 4 следующим вектором $R_i(\omega) = (0.5/\omega_1, 0.8/\omega_2, 03/\omega_3, 07/\omega_4),$ (Рис. 12.1.)

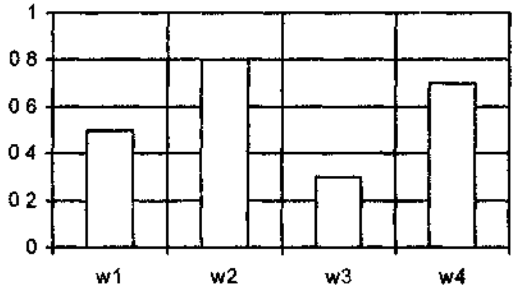


Рис. 12. 1. Состояние $R_i(\omega)$.

Необходимо отфильтровать данное состояние с целью выделения уточненного состояния $S_i(\omega)$ содержащее "около двух элементов" множества Ω . (Рис. 12.2).

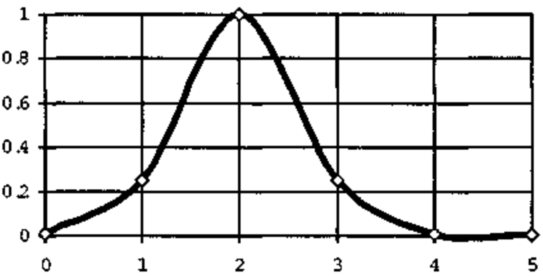


Рис. 12.2. Фильтрующая функция.

Для определения $S_i(\omega)$ будем использовать соотношение (12.12). Для этого определим сначала значение квантификатора $Q_i(r)$ для следующих подмножеств (для примера используем не все элементы множества $P(\Omega)$, а лишь те, которые возможно претендуют на состояние $S_i(\omega)$):

$$s^1 = \{\omega_2\}, s^2 = \{\omega_1, \omega_2\}, s^3 = \{\omega_1, \omega_3\}, s^4 = \{\omega_1, \omega_4\}$$
$$s^5 = \{\omega_2, \omega_3\}, s_6 = \{\omega_2, \omega_4\}, s^7 = \{\omega_3, \omega_4\}, s^8 = \{\omega_1 \omega_2 \omega_3\}.$$

График зависимости $Q^i(r)$ для $S^j \subseteq \Omega$ представлен на рис. 12..3.

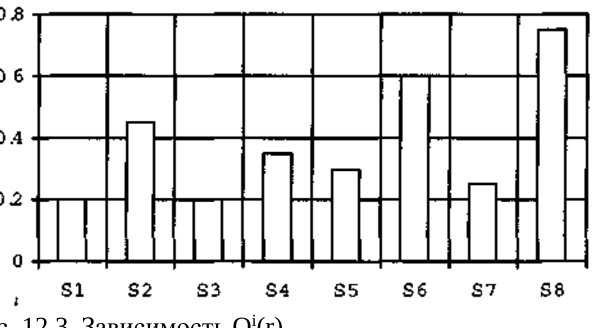


Рис. 12.3. Зависимость $Q^i(r)$

В результате расчета второй составляющей выражения (12. 12) имеем результат, представленный на рис. 12.4

,

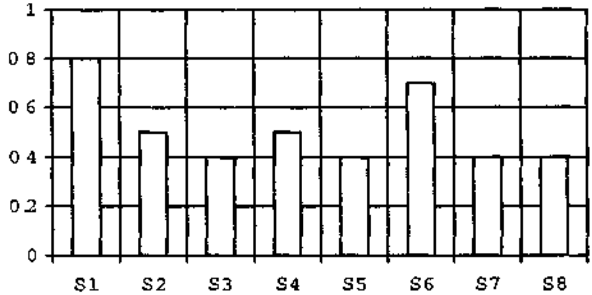


Рис. 12.4. Зависимость $Q^2(r)$.

Тогда мера $Val(S/Q,P)$ имеет значения рис. 12. 5

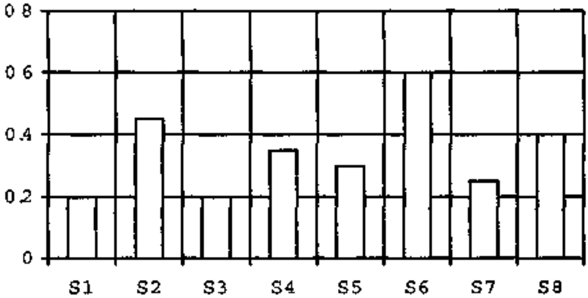


Рис. 12.5. Значение $Val(S/Q,P)$

Таким образом, отфильтрованным состоянием $S_i(\omega)$ является состояние $S_i(\omega) = R_i(\omega) \wedge S^6(\omega)$ представленное на рис. 12.6.

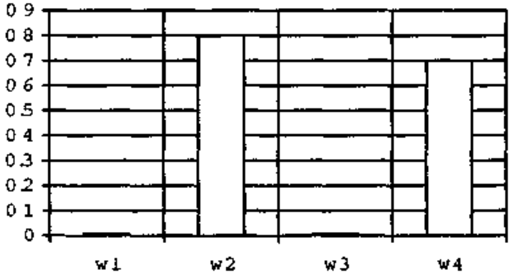


Рис. 12. 6. Фильтрованное состояние $S_i(\omega)$

Как видно из примера в результате фильтрации осуществляется "отсечка" мало значащих состояний на Ω определенных в i-й момент времени наблюдения НП.

Резюмируя приведенное выше фильтрация статического состояния на основе квантификации может быть представлена в виде алгоритма (Табл. 12.2).

Таблица 12.2.

Фильтрация статического состояния.

Задача	Критерий	Решение
Найти оценку $S(\omega)$ состояния НП $\mu(\omega):\Omega\to[01]$ содержащую около q элементов и максимально удовлетворяющих $\mu(\omega)$	$Val(S\vert Q,\mu(\omega)) = Q_1(S)\wedge Q_2(S)\to\max\limits_{S}$ $Val(.)$ - НМ истины удовлетвор. оценки $S(\omega)$ условию задачи. Q_1: $S(\omega)$ содержит q элементов. Q_2: $S(\omega)$ содержит не более «0» элементов не удовл. $\mu(\omega)$.	$S^*(\omega) = \arg\max\limits_{S(\omega)} Val(S\vert Q,\mu(\omega))$, $Q_1 = q\left(\sum\limits_{i=1}^{q}\min(S(\omega_i),\mu(\omega_i))\right)$ $Q_2 = \min\limits_{\omega\in\Omega}[S(\bar{\omega})\vee\mu(\omega)]$.

12.3. Фильтрация нечетких процессов. Нечеткий наблюдатель

Ранее, в предыдущем параграфе, мы рассмотрели возможность уточнения нечеткого состояния НП за счет фильтрации одного состояния ("статическая" фильтрация), предполагающей выявление наиболее значимого подмножества состояний НП. Однако при этом не учитывалась предыдущая информация о НП, то есть не учитывались динамические особенности процесса. В данном параграфе будет рассматриваться возможность динамической фильтрации НП.

Из приведенного ранее материала известно, что НП формально может быть описан нечетко-интегральным (нечетко-дифференциальным) уравнением вида:

$$s_u(\omega) = \int_T h'(\omega,t)\circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot), \tag{12.13}$$

где $h'(\omega t):\Omega\times T\to[01]$ - нечеткое отношение для НДС, описывающее ее динамику при фиксированном начальном состоянии $s_u^0(\omega)$: $\Omega\to[01]$. Предполагаем, что данное нечеткое отношение нам неизвестно. $g(\cdot)$: $2^\Omega\to[01]$ - нечеткая мера на Ω, $f_\Gamma(\omega)$- НП -

аналогичный винеровскому процессу, задающий неопределенность НП по времени. Пусть имеется модель НП описывающая динамику НДС следующим уравнением:

$$s_{u}(\omega) = \int_T h(\omega,t) \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot), \qquad (12.14)$$

где $h(\omega,t)$ - нечеткое отношение модели (переходная характеристика НП) вообще то, отличающееся от $h'(\omega,t)$ истинного НП. Для истинного НП уравнение (12.13) условно можно переписать в виде:

$$s_u(\omega) = \eta * \int_T h(\omega,t) \circ g_{f_\Gamma(\omega)}(\cdot), \qquad (12.15)$$

где η - некоторая составляющая НП, определяющая его вариацию, связанную с погрешностями объекта наблюдения, а (*) - неизвестный оператор, связывающий η и уравнения модели.

Истинное пространство состояний Ω. с заданной на нем нечеткой мерой g(·) связано с пространством наблюдений $\Omega' \equiv \Omega$ через условную нечеткую меру $R_s(\cdot|p)$. Отображение пространства Ω в пространство наблюдений Ω ' определенное мерой $R_s(\cdot|p)$ индуцирует в Ω' нечеткую меру *P,* связанную с мерой g соотношением:

$$P(\cdot) = \int_\Omega R_p(\cdot|s) \circ g \cdot \qquad (12.16)$$

В силу того, что существует связь пространств Ω и Ω' истинному состоянию НП $s_u(\omega)$ в Ω ' соответствует образ, определенный уравнением:

$$p_u(\omega) = \int_\Omega s_u(\omega) \circ R_s(\cdot|p) = R_s(s_u(\omega)|p) \cdot \qquad (12.17)$$

Однако, наблюдение НП осуществляется с некоторыми шумами ξ; такими**,** что в результате вместо $p_u(\omega)$ имеем некоторое состояние вида:

$$p_t(\omega) = p_u(\omega) * \xi = \xi * R_s(s_u(\omega)|p), \qquad (12.18)$$

где (*) - неизвестный оператор, определяющий характер влияющих погрешностей ξ . В соответствие с описанным выше, структурная схема истинного НП вместе с контуром наблюдения может быть представлена как на рис. 12.7.

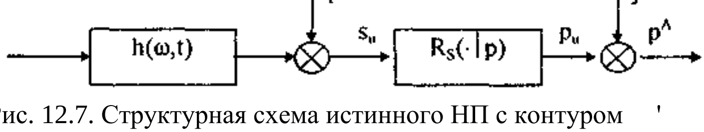


Рис. 12.7. Структурная схема истинного НП с контуром '
наблюдения.

Таким образом, вместо истинного НП $s_u(\omega)$ мы наблюдаем некоторый процесс $p_A(\omega)$. Кроме этого, имеется возможность наблюдать состояние $s_M(\omega)$ НП модели, описываемой уравнением (12.14). Исходя из этого, вообще то говоря, необходимо сформировать некоторую оценку $\hat{s}(\omega)$ НП максимально близкую к истинному состоянию $s_u(\omega)$ НП.

Если в качестве критерия совпадения $\hat{s}(\omega)$ и $s_u(\omega)$ выбрать меру близости, определяемую как нечеткое ожидаемое значение (fazzy expected value) пересечения $\hat{s}(\omega)$ и $s_u(\omega)$, то критерий оптимизации мы можем записать в виде:

$$J = \int_{\Omega}\left[\hat{s}(\omega) \wedge s_u(\omega)\right] \circ g(\cdot) \to \max_{\hat{s}} \cdot \quad (12.19)$$

Критерий (12.19) задает семейство оценок $\Xi = \{\hat{s}(\omega)\}$ упорядоченных по вложенности. Множество Ξ с оператором $\prec$ вложенности определяет нечеткий группоид $(\Xi, \prec)$. Если в качестве решения (оценки $\hat{s}(\omega)$) выбрать нижнюю грань $(\Xi, \prec)$, то степень размытости решения $\hat{s}(\omega)$ будет минимальна. В силу, этого наиболее целесообразным в качестве оценки $\hat{s}(\omega)$ НП выбирать точную нижнюю грань семейства $(\Xi, \prec)$ решений удовлетворяющих критерию оптимальности (12.19).

С физической точки зрения критерий (12.19) определяет степень соответствия (покрытия) оценки состояния $\hat{s}(\omega)$ НП и истинного состояния $s_u(\omega)$. Ранее уже отмечалось, что исходной информации для формирования состоятельной оценки НП $\hat{s}(\omega)$ являются информация о наблюдаемом состоянии $p_A(\omega)$, а также состояние, полученное из модели НП $s_M(\omega)$. В силу уравнения (12.16) нечеткое состояние модели и оценки $\hat{s}(\omega)$ может быть представлены в следующем виде:

$$\hat{s}(\omega) = R_p(\hat{p}(\omega)|s) = \int_{\Omega} \hat{p}(\omega) \circ R_p(\cdot|s)$$

$$s_M(\omega) = R_p(p_M(\omega)|s) = \int_{\Omega} p_M(\omega) \circ R_p(\cdot|s)$$

В силу двойственности условных нечетких мер наблюдение состояния модели $s_M(\omega)$ и оценочного процесса $\hat{s}(\omega)$ может быть представлено в виде:

$$\hat{p}(\omega) = R_s(\hat{s}(\omega)|p) = \int_{\Omega} \hat{s}(\omega) \circ R_s(\cdot|p)$$

$$p_M(\omega) = R_s(s_M(\omega)|p) = \int_{\Omega} s_M(\omega) \circ R_s(\cdot|p)$$

Однако, условная нечеткая мера $R_s(\cdot|p)$ нам неизвестна. Структурная схема нечеткого наблюдателя может быть представлена в виде приведенном на рис. 12.8.

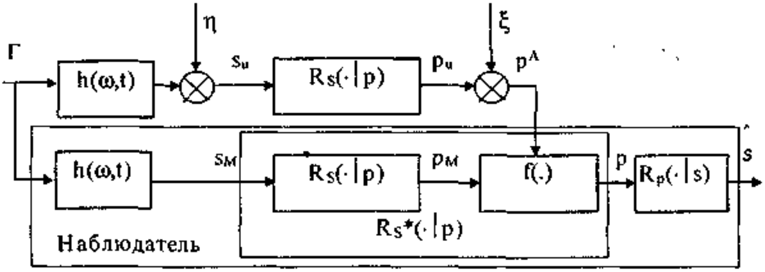


Рис. 12.8. Структурная схема нечеткого наблюдателя.

На данной схеме оператор $f(\cdot)$ обеспечивает получение такой оценки $\hat{p}(\cdot)$ в пространстве наблюдений Ω' по информации о p_M и p^A, которая при известной условной нечеткой мере $R_p(\cdot|s)$ обеспечивает выполнение критерия (12.19).

Практически можем обозначить:

$$R_s^*(\cdot|p) = R_s(\cdot|p) * f(\cdot), \tag{12.24}$$

где $R_s^*(\cdot|p)$ - некоторая условная нечеткая мера определяемая композицией меры $R_s(\cdot|p)$ и оператора $f(\cdot)$ и обеспечивающая выполнение критерия (12.19), (*) - некоторая композиция.

Условная нечеткая мера $R_s^*(\cdot|p)$ должна обеспечить получение такого $\hat{p}(\cdot)$, что определенная с помощью него оценка $\hat{s}(\omega)$ стремится к $s_u(\omega)$. Оказывается, что если обеспечить близость состояния НП наблюдения истинного НП $p_u(\omega)$ и наблюдения НП оценки $\hat{p}(\cdot)$, то критерий (12.19) выполняется. Покажем это.

Лемма 12.1

Если обеспечить выполнение критерия

$$J_p = \int_{\Omega'} \left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)\right) \circ P(\cdot) \to \max_{\hat{p}(\omega)}, \tag{12.25}$$

то критерий (12.19) выполняется.

Доказательство.

Оптимальное значение критерия (12.19) определяется выражением:

$$J^* = \max_{\hat{s}(\omega)} \int_{\Omega} \left[s_u(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)\right] \circ g(\cdot) = \max_{\hat{s}(\omega)} \int_{\Omega} \left[R_p\left(p_u|s\right) \wedge R_p\left(\hat{p}|s\right)\right] \circ g(\cdot).$$

рассмотрим более детально выражение в квадратных скобках:

$$R_p\left(p_u|s\right) \wedge R_p\left(\hat{p}|s\right) = \int\limits_{\Omega'} p_u(\omega) \circ R_p\left(\cdot|s\right) \wedge \int\limits_{\Omega'} \hat{p}(\omega) \circ R_p\left(\cdot|s\right) \geq$$

$$\geq \int\limits_{\Omega}\left[p_u(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ R_p\left(\;|s\right)$$

Очевидно, что при максимизации правого интеграла левая часть выражения также будет увеличиваться. Это следует из свойства нечеткого интеграла. Следовательно модифицированный критерий будет иметь вид:

$$J^* = \max_{\hat{p}(\omega)} \int\limits_{\Omega'} R_p\left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)|s\right) \circ g(\cdot).$$

Подставив в это выражение уравнение обратное уравнению (12.16) для меры $g(\cdot)$ имеем:

$$J^* = \max_{\hat{p}(\omega)} \int\limits_{\Omega} R_p\left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)|s\right) \circ \int\limits_{\Omega'} R_s(\cdot|p) \circ P(\cdot) =$$

$$= \max_{\hat{p}(\omega)} \int\limits_{\Omega} R_p\left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)|s\right) \circ \int\limits_{R_s(\,|p)} 1(\omega) \circ P(\cdot) =$$

$$= \max_{\hat{p}(\omega)} \int\limits_{\Omega} R_s\left[R_p\left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)|s\right)|p\right] \circ P(\cdot).$$

Исходя из свойств нечеткого интеграла очевидно, чго при увеличении функции $p_u(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)$ будет расти значение условной нечеткой меры $R_p\left(\hat{p}(\omega) \wedge p_u(\omega)|s\right)$, а следовательно подынтегральная функция для критерия J будет увеличиваться, что в целом максимизирует критерий J.

Исходя из этого критерий оптимизации можно представить в виде:

$$J^* = \max_{\hat{p}(\omega)}\left[p_u(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ P(\cdot) = \max_{\hat{p}(\omega)} J_p.$$

Следовательно, если обеспечить максимизацию критерия вида

$$J_p = \int\limits_{\Omega'}\left[p_u(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ P(\cdot) \to \max_{\hat{p}(\omega)},$$

то условие максимизации исходного критерия (12.19) будет выполняться, что и требовалось доказать.

Истинное состояние $p_u(\omega\ )$ наблюдения нам не известно, однако оно может быть восстановлено исходя из информации $p_A(\omega)$ и наблюдения состояния модели $p_м(\omega)$. Согласно структурной схемы 6.8. $p_Л(\omega)$ отличается от $p_и(\omega)$ за счет погрешностей наблюдения ξ, а $p_м(\omega)$ - за счет погрешностей объекта η. В силу того, что и $p_м(\omega)$ и $p_Л(\omega)$ есть некоторые приближения истинного (без искажений) наблюдения $p_u(\omega)$ наиболее целесообразным предположить, что $p_u(\omega)$ находится в области близкой к пересечению $p_Л(\omega) \wedge p_м(\omega)$.

Исходя из приведенных рассуждений критерий (12.25) может быть трансформирован к виду:

$$J_p = \int_{\Omega}\left[p_u(\omega) \wedge p_M(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ P \to \max_{\hat{p}(\omega)}, \qquad (12.26)$$

Лемма 12.2.

Критерий (12.26) может быть трансформирован так, что оценочный НП $\hat{s}(\omega)$ удовлетворяющий критерию вида

$$\int_{\Omega}\left\{s_M(\omega) \wedge R_p(p_A(\omega)|s)\right\} \circ \int_{\Omega} \hat{s}(\omega) \circ g(\cdot) \to \max_{\hat{s}(\omega)}, \qquad (12.27)$$

будет оптимальным и обеспечивать максимизацию критерия (12.26).

Доказательство:

Рассмотрим более подробно критерий (12.26)

$$\int_{\Omega'}\left[p_A(\omega) \wedge p_M(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ P(\cdot) = \int_{p_A(\omega)}\left[p_A(\omega) \wedge \hat{p}(\omega)\right] \circ P(\cdot) =$$

$$= \int_{p_A(\omega)}\left[R_s(s_M(\omega)|p) \wedge R_s(\hat{s}(\omega)|p)\right] \circ P(\cdot)$$

В силу того, что для подынтегрального выражения справедливо неравенство:

$$R_s(s_M|p) \wedge R_s(\hat{s}(\omega)|p) \geq \int_{\Omega}\left[s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)\right] \circ R_s(\cdot|p),$$

то для максимизации критерия (12.26) достаточно потребовать максимизацию соотношения:

$$\int_{p_A(\omega)}\left[\int_{\Omega}\{s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)\} \circ R_s(\cdot|p)\right] \circ P(\cdot) = \int_{p_A(\omega)} R_s(s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)|p) \circ P(\cdot).$$

В силу свойств условных нечетких мер можем записать:

$$\int_{p_A(\omega)} R_s(s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)|p) \circ P(\cdot) = \int_{s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)} R_p(p_A(\omega)|s) \circ g(\cdot) =$$

$$= \int_{\Omega}\left[s_M(\omega) \wedge \hat{s}(\omega) \wedge R_p(p_A(\omega)|s)\right] \circ g(\cdot) =$$

$$= \int_{\Omega}\left[s_M(\omega) \wedge R_p(p_A(\omega)|s)\right] \circ \int_{\Omega} \hat{s}(\omega) \circ g(\cdot).$$

Полученное выражение соответствует выражению для критерия (12.27). Что и требовалось доказать.

Рассмотрим более подробно полученный результат. Критерий (12.27) с физической точки зрения отражает необходимость нахождения оценки состояния НП исходя из ограничений связанных со структурой пространства состояний системы определяемой распределением нечеткой меры $g(\cdot)$, а также ограничений определенных характеристиками реально наблюдаемого НП. Последние связаны в первую очередь с представлением о самой модели НП, ее точности определяемой состоянием $S_M(\omega)$ и свойствами канала наблюдения НП, то есть реально получаемыми значениями наблюдаемого НП $p_A(\omega)$. Таким образом, найденный оценочной НП $\hat{s}(\omega)$ в каждый момент времени удовлетворяющий критерию (12.27) будет учитывать всю доступную нам информацию о нечетком процессе. При этом, исходя из доказательств выше приведенных лемм данный оценочный процесс обеспечивает оптимальную оценку, в смысле нечеткого ожидания совпадения с истинным процессом.

Практически, нахождение оценочного НП связано с поиском такой апостериорной нечеткой меры $R_s^*(\cdot|p)$, которая после получения информации о НП дает максимум совпадает оценочного и истинного НП по нечеткому ожидаемому значению.

Следует отметить, что доказанное в лемме 12.2. выражение для критерия оптимизации оценки истинного НП включает в себя как частный случай уже известное ранее выражение для алгоритма обучения по нечеткой мере в дискретном времени, предложенный Суджено. Покажем это, доказав следующую лемму.

Лемму 12.3.

В случае отсутствия ограничений в пространстве состояний НДС, а именно $\forall \omega_i \in \Omega,\ g(\omega_i):\ \Omega \to [0 1],\ g(\{\omega_i\}) = 1$ (мера возможности), а также ограничений на оператор преобразования состояния НДС в пространстве Ω в дискретные моменты времени: $h_k(\omega,\omega)\ :\ \Omega\times\Omega \to\ [0 1],\ h_k(\omega_i,\omega_v)\ =\ 1,\ \forall \omega_i,\omega_v \in \Omega$

критерий оптимальности для получения оценки НП определяется выражением:

$$\int_\Omega R_p(p_K^A(\omega)|S) \circ \hat{s}_K(\omega) \to \max_{\hat{s}(\omega)} \cdot \qquad (12.28)$$

Доказательство.

Согласно доказанной леммы 12.2. оптимальная оценка НП должна удовлетворять соотношению

$$\int_\Omega [R_p(p^A|s) \wedge s_M(\omega)] \circ \int_\Omega \hat{s}(\omega) \circ g(\cdot) \to \max_{\hat{s}(\omega)}.$$

Исходя из доказательства теоремы 11.3. состояние дискретного нечеткого процесса для модели $s_M(\omega)$ определяется соотношением:

$$s_M^K(\omega_j) = \int_\Omega h_K(\omega_j, \omega_v) \circ g(\cdot),$$

где

$$h_k(\omega_j, \omega_v) = h_k'(\omega_j, \omega_v) \wedge s_M^{K-1}(\omega_v);$$

Таким образом для дискретной НДС критерий (12.27) примет вид:

$$\int_\Omega \left[R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \int_\Omega h_K(\omega_j, \omega_v) \circ g(\cdot) \right] \circ \int_\Omega \hat{s}_K(\omega) \circ g(\cdot).$$

Рассмотрим более подробно выражение в квадратных скобках:

$$F = \left[R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \int_\Omega h_K(\omega_j, \omega_v) \circ g(\cdot) \right] =$$

$$= R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \sup_{\alpha_j} \left\{ \alpha_j \wedge g(H_{\alpha_j}(\omega_v)) \right\} =$$

$$= R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \sup_{\alpha_j} \left\{ \alpha_j \wedge \max_{\omega \in H_{\alpha_j}} g(\{\omega\}) \right\}.$$

Исходя из того, что $\exists\, \omega_j \in \Omega,\ h_k(\omega_j, \omega_v) = 1$ и $\forall \omega_j,\ g(\{\omega_j\}) = 1$ имеем.

$$F = R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \sup_{\omega_j} \left\{ \max_{\omega_j} h(\omega_j, \omega_v) \wedge 1(\{\omega_j\}) \right\} =$$

$$= R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge 1(\omega) = R_p(p_K^A(\omega)|s).$$

Исходя из этого соотношение (12. 27) примет вид:

$$\int_\Omega R_p(p_K^A(\omega)|s) \circ \int_\Omega \hat{s}_K(\omega) \circ g(\cdot) = \sup_\beta \left\{ \beta \wedge \int_{F_\beta} \hat{s}_K(\omega) \circ g(\cdot) \right\},$$

где

$$F_\beta = \left\{ \omega \middle| R_p(p_K^A(\omega)|s) \geq \beta \in [01] \right\}.$$

Рассмотрим более детально интеграл в фигурных скобках. Согласно результата, доказанного в теореме 10. 8. данный интеграл примет вид:

$$I = \int_{F_\beta} \hat{s}_K(\omega) \circ g(\cdot) = \sup_{E_\alpha \subseteq \Omega} (s_K(E_\alpha \cap F_\beta) \wedge g(E_\alpha \cap F_\beta)) =$$

$$= \sup_{E_\alpha \cap F_\beta \neq \varnothing} s_K(E_\alpha \cap F_\beta),$$

где $s_k(\cdot)$ - есть мера возможности.

Дня данного выражения зависимость его от $\alpha \in [01]$ может быть представлена графиком рис. 12.9, где α_{min} определяется соотношением:

$$\alpha_{min} = \{\sup \alpha | E_\alpha \cap F_\beta = \varnothing\}.$$

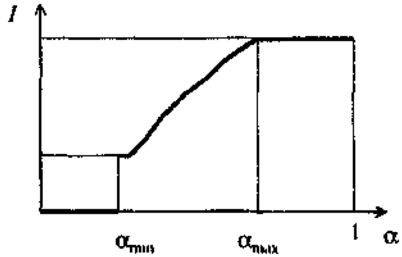


Рис. 12.9. Зависимость *I* от α.

Аналогично можно определить α_{max}. Последовательность $(E_\alpha \cap F_\beta)$ множеств является возрастающей при увеличении . Следовательно (существует такое $\alpha \in [01]$, что данная последовательность множеств имеет предел:

$$\exists\, a \in [01] \quad \lim_{n=(a-\alpha)^{-1}\to\infty} E_\alpha \cap F_\beta = F_\beta.$$

Но $s_k(\omega)$ есть неубывающая функция множества. Следовательно, для неубывающей последовательности множеств $(E_\alpha \cap F_\beta)$ можно записать:

$$\sup_{E_\alpha \cap \Gamma_\beta \neq \varnothing} s_K(E_\alpha \cap F_\beta) = \lim_{n=(a-\alpha)^{-1}\to\infty} s_K(E_\alpha \cap F_\beta) =$$

$$= s_K \left\{ \lim_{n=(a-\alpha)^{-1}\to\infty} (E_\alpha \cap F_\beta) \right\} = s_K(F_\beta) = a.$$

Исходя из этого следует, что данный интеграл зависит лишь от функции $s_k(\omega)$ и критерий оптимизации определяется выражением:

$$\int_\Omega R_p(p_K^A(\omega)|S) \circ \hat{s}_K(\omega) \to \max_{\hat{s}_k}.$$

Таким образом, на основании критерия (12.27) может быть сформирован нечеткий наблюдатель, позволяющий вычислять на основе текущей информации о НП оценочный процесс $\hat{s}_\Gamma(\omega)$

Информацией для данного наблюдателя являются измерения $p_\Gamma^A(\omega)$ и текущее состояние модели $s_м(\omega)$. Представим выражение (12.27) в следующем виде:

$$\int_\Omega \sigma(\omega) \circ \int_\Omega \hat{s}(\omega) \circ g \to \max_{\hat{s}(\omega)}, \qquad (12.29)$$

где функция σ(ω) определяется соотношением:

$$\sigma(\omega) = s_M(\omega) \wedge R_p(p_A(\omega)|s) \cdot \qquad (12.30)$$

Выражение (12.29) может быть преобразовано к виду:

$$\int_\Omega \sigma(\omega) \circ \int_\Omega \hat{s}(\omega) \circ g = \int_\Omega \sigma(\omega) \wedge \hat{s}(\omega) \circ g = \int_{\hat{s}(\omega)} \sigma(\omega) \circ g.$$

То есть соотношение (12.29) определяет нечеткий интеграл от функции σ(ω) по мере *g*, взятый на нечетком множестве $\hat{s}(\omega)$, определяющем оценку НП. В случае упорядоченной по убыванию функции σ(ω) значение нечеткого интеграла

$$\int_\Omega \sigma(\omega) \circ g = J, \qquad (12.31)$$

определяется графически, как показано на рис.12.10.

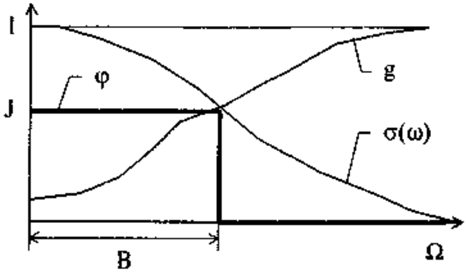


Рис.12.10. Графическое представление нечеткого интеграла.

Значение интеграла *J* определяет некоторое подмножество B(ω)⊆ Ω при которых σ(ω)≥*J*. Как показано на рис.12 10 пара *(J,* B(ω)) определяет функцию φ(ω). играющую роль фильтрующей функции, которая задается выражением:

$$\varphi_J(\omega) = \begin{cases} [J,1], & \omega \in B(\omega) \subseteq \Omega; \\ 0, & \omega \notin B(\omega). \end{cases} \qquad (12.32)$$

Смысл этой функции можно определить следующим образом. Для того, чтобы критерий (12.29) был максимальным (а самое большое значение критерия достигает величины J ∈ [01]) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\forall \omega \in B(\omega) \subseteq \Omega, \quad \sigma(\omega) \wedge \hat{s}(\omega) \ge \varphi_J(\omega) \cdot \qquad (12.33)$$

Значение функции $\sigma(\omega) \wedge \hat{s}(\omega)$ на $\omega \notin B(\omega)$ не влияют на значение критерия (12.29) и с точки зрения необходимости определения точной нижней грани в группоиде $(\Xi, \prec)$ значения функции $\hat{s}(\omega)$, определяющей оценку НП, целесообразно уменьшать от величины $\varphi_j(\omega)$. Таким образом, функция $\varphi_j(\omega)$ играет роль фильтрующей функции. Следует отметить что функция (12.32) является "предельной" фильтрующей функцией. Можно определить целое семейство фильтрующих функций $\{\varphi\}$ в некотором смысле вложенных в область, определенную функцией $\varphi(\omega)$ (см. рис.12.11) $\varphi_R(\omega) \in \{\varphi\}$.

Для каждой из функций $\varphi_R(\omega)$ из семейства $\{\varphi\}$ необходимо выполнение условий, аналогичных (12.33). Тогда критерий (12.29) будет иметь значение $R \in [0 1]$, $R \le J$. Исходя из выше приведенных рассуждений, структура нечеткого наблюдателя должна определяться функцией вида:

$$\hat{s}(\omega) = f(\hat{s}(\omega), \sigma(\omega), \varphi_R(\omega)). \qquad (12.34)$$

Так как фильтрующая функция $\varphi_R(\omega)$ в основном определяет подмножество $B_R(\omega) \subseteq \Omega$ значимых состояний в пространстве Ω после получения информации $\sigma(\omega)$, то целесообразно структуру нечеткого наблюдателя определить как функцию $f(\cdot,\cdot)$ двух переменных в виде:

$$\hat{s}(\omega) = f(\hat{s}(\omega), \sigma(\omega) \wedge \varphi_R(\omega)), \qquad (12.35)$$

где $\varphi_R(\omega) = \begin{cases} [R,1], \omega \in B_R(\omega), R \le J \in [0 1] \\ \varphi_R^{min}, \omega \notin B(\omega), \varphi_R^{min} \le R. \end{cases}$

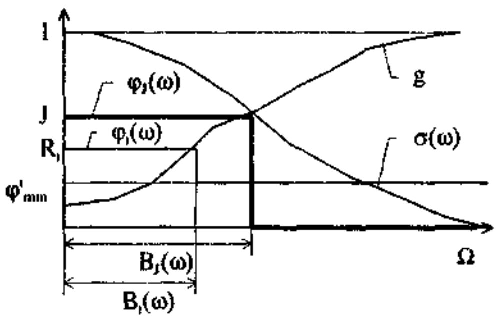


Рис.12.11. Семейство фильтрующих функций.

Для нахождения оценки НП $\hat{s}(\omega)$ по информации о НП на протяжении некоторого временного окна т. е. $\tau \subseteq T$, такого, что

$sup\ \tau = t$, $\inf$, $\tau = t - |\tau|$ можно в качестве функции $f(\cdot,\cdot)$ в состоянии (12.35) использовать нечеткий интеграл вида:

$$\hat{s}_t(\omega) = \int_T \hat{s}(\omega, t') \circ \partial_\tau(\cdot|\omega, t), \tag{12.36}$$

где $\partial_\tau(\cdot|\omega, t)$: $2^{(T\times\Omega)\times T} \to [01]$ - условная нечеткая мера, определяющая величину доверия к состоянию оценки НП на предыдущем моменте времени $t' \leq t$, $t' \in \tau \subseteq T$для фиксированного $\omega \in \Omega$. Практически, условная мера $\partial_\tau(\cdot|\omega, t)$ определяет некоторое временное окно на Т. (Рис.12.12)

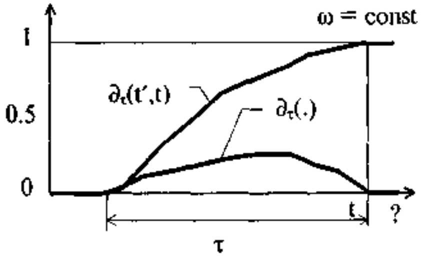


Рис.12.12. Временное окно.

В (12.36) в качестве значения $\hat{s}(\omega, t)$ выступает измерение в момент $t \in T$, то есть:

$$\hat{s}(\omega, t) = \sigma_t(\omega) \wedge \varphi_R^t(\omega),$$

где $\sigma_t(\omega)$ определяется (12.30).

Следует отметить, что момент времени *t* может быть и нечетким. Таким образом, выражение (12.36) определяет нечеткий наблюдатель, построенный на нечетком интеграле. В каждый момент $t \in T$ реализуется двухмерная фильтрующая функция, определенная декартовым произведением:

$$W_t(\omega, \tau) = \varphi_R^t(\omega) \times \partial_\tau(\cdot|\omega, t) \cdot \tag{12.37}$$

Фильтрующая функция $W_t(\omega, \tau)$ определяет в конкретный момент $t \in T$ некоторую подобласть в пространстве $\Omega \times T$. В том случае, когда в оценке $\hat{s}_t(\omega)$ НП учитывается только одно предыдущее значение функции $\hat{s}(\omega)$, отстоящее от текущего *t/* на некоторый временной интервал $t \in T$, то нечеткий наблюдатель вида (12.36) может быть преобразован к следующему виду.

$$\hat{s}_t(\omega) = \int_T \hat{s}(\omega, t') \circ \partial_\tau(\cdot|\omega, t) = \left\{\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \partial_\tau(t-\tau|\omega, t)\right\} \vee$$
$$\vee \left\{[\sigma_t(\omega) \wedge \varphi'_R(\omega)] \wedge \partial_\tau(t|\omega, t)\right\} \vee \left\{\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge [\sigma_t(\omega) \wedge \varphi'_R(\omega)]\right\}.$$

(12.38)

В этом случае нечеткий наблюдатель определяется нечетко-дифференциальным уравнением представленном в следующей теореме.

Теорема 12.1.

Нечеткий наблюдатель, определяющий оценочный НП $\hat{s}(\omega)$, в случае учета одного предыдущего значения оценки $\hat{s}_{t-\tau}(\omega)$ описывается нечетко-дифференциальным уравнением вида:

$$fd\hat{s}(\omega) = \left\{(\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \partial_\tau(t-\tau|\omega, t)) \vee h(\omega, t')\right\} fdf_t^F(\omega),$$

(12.39)

где $h(\omega, t')$ - нечеткое отношение (переходная характеристика) модели НДС,

$$f_t^F(\omega) = f_t(\omega) \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge \left\{\varphi'_R(\omega) \wedge (\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \vee \partial_\tau(t|\omega, t))\right\}.$$

(12.40)

скорректированная нечеткая функция описывающая временную неопределенность НДС (аналог броуновского движения).

Доказательство.

Для простоты записи выкладок формульных зависимостей введем следующее обозначения:

$$a_1 = \hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \partial_\tau(t-\tau|\omega, t);$$
$$a_2 = \varphi'_R(\omega) \wedge \partial_\tau(t|\omega, t);$$
$$a_3 = \hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \varphi'_R(\omega).$$

Тогда выражение для наблюдателя (12.38) принимает вид:

$$\hat{s}_t(\omega) = a_1 \vee (\sigma_t(\omega) \wedge a_2) \vee (\sigma_t(\omega) \wedge a_3) = a_1 \vee [\sigma_t(\omega) \wedge (a_2 \vee a_3)].$$

Рассмотрим более детально функцию $\sigma_t(\omega)$, отражающую имеющуюся информацию о НП на момент времени t $\in$ T. Согласно (12.30) имеем:

$$\sigma_t(\omega) = s_t^M(\omega) \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s) = \int_T h(\omega, t') \circ g_{f_t(\omega)}(\cdot) \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s).$$

На момент времени t $\in$ T переменные a_i, $i = \overline{1,3}$, и $R_p(p_t^A(\omega)|s)$

принимают определенные значения и не зависят от переменной $t' \in T$ интегрирования. Исходя из этого справедливы следующие преобразования:

$$\hat{s}_t(\omega) = a_1 \vee \left[R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge (a_2 \vee a_3) \wedge \int_T h(\omega, t') \circ g_{f_t(\omega)}(\cdot) \right] =$$

$$= a_1 \vee \int_T \left\{ R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge (a_2 \vee a_3) \wedge h(\omega, t') \right\} \circ \int_{\psi_t(\,|\omega')} f_t(\omega') \circ g(\cdot) =$$

$$= a_1 \vee \int_T h(\omega, t') \circ \int_{\psi_t(\,|\omega')} \left\{ f_t(\omega') \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge (a_2 \vee a_3) \right\} \circ g(\cdot).$$

Рассмотрим подынтегральную функцию для второго интеграла:

$$f_t(\omega') \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge \left[(\varphi_R^t(\omega) \wedge \partial_\tau(t|\omega, t)) \vee (\varphi_R^t(\omega) \wedge \hat{s}_{t-\tau}(\omega)) \right] =$$

$$= f_t(\omega') \wedge R_p(p_t^A(\omega)|s) \wedge \varphi_R^t(\omega) \wedge \left\{ \hat{s}_{t-\tau}(\omega) \vee \partial_\tau(t|\omega, t) \right\} = f_t^F(\omega|\omega').$$

Тогда для оценки получаем соотношение:

$$\hat{s}_t(\omega) = a_1 \vee \int_T h(\omega, t') \circ \int_{\psi_t(\,|\omega')} f_t^F(\omega|\omega') \circ g(\cdot) =$$

$$\int_T \left\{ (\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \partial_\tau(t-\tau|\omega, t)) \vee h(\omega, t') \right\} \circ \int_{\psi_t(\,|\omega')} f_t^F(\omega|\omega') \circ g(\cdot).$$

Данное выражение в нечетко-дифференциальной записи приобретает следующий вид:

$$fd\hat{s}_t(\omega) = \left\{ (\hat{s}_{t-\tau}(\omega) \wedge \partial_\tau(t-\tau|\omega, t)) \vee h(\omega, t') \right\} fdf_t^F(\omega|\omega').$$

Что и требовалось доказать. А

Таким образом, доказанное выражение (12.39) определяет нечеткий наблюдатель. Для его физической реализации необходимо определение двумерной фильтрующей функцией $W_t(\omega, \tau)$.

12.4. Оптимальный нечеткий наблюдатель

Оптимальный нечеткий наблюдатель будем рассматривать для случая учета одного предыдущего значения оценочного процесса. То есть *Card*τ = 2. Как показано в п. 12 3. нечеткий наблюдатель определяется в этом случае нечетко-дифференциальным уравнением (12.39). Данный наблюдатель может эффективно применяться для оценки состояния дискретного НП. В этом случае нечетко-дифференциальное уравнение вырождается в рекуррентное соотношение для наблюдения. Дискретный наблюдатель будет рассмотрен ниже.

В случае $Card\tau = 2$ нечеткий наблюдатель построенный на основе нечеткого интеграла (12.36) расписывается соотношением (12. 38). В данном выражении неизвестными являются функции $\partial_\tau(\cdot|\omega,t), \varphi'_R(\omega)$. Для дальнейшего изложения рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма 12. 4.

В случае, когда $Card\Omega = 2$значение нечеткого интеграла вида:

$$J = \int_\Omega \mu(\omega) \circ \partial_\Omega(\cdot)$$

определяется величиной плотности нечеткой меры $\partial_\Omega(\cdot)$ в точке $\omega_i \in \Omega$ для которой $\mu(\omega_i) \geq \mu(\omega_j)$, $j \neq i$, $\omega_j \in \Omega$, то есть:

$$J = \begin{cases} \min(\mu(\omega_i), \mu(\omega_j)), & \partial(\omega_i) < \mu(\omega_j); \\ \partial(\omega_i), & \mu(\omega_j) \leq \partial(\omega_i) \leq \mu(\omega_i); \\ \max(\mu(\omega_i), \mu(\omega_j)), & \partial(\omega_i) > \mu(\omega_i). \end{cases}$$

(12.41)

Доказательство

Распишем интеграл в следующем виде:

$$J = \int_\Omega \mu(\omega) \circ \partial_\Omega(\cdot) = (\mu(\omega_1) \wedge \partial(\omega_1)) \vee (\mu(\omega_2) \wedge \partial(\omega_2) \vee (\mu(\omega_1) \wedge \mu(\omega_2)).$$

Пусть $(\mu(\omega_1) \geq \mu(\omega_2))$ Тогда имеем:

$$J = (\mu(\omega_1) \wedge \partial(\omega_1)) \vee (\partial(\omega_2) \wedge \mu(\omega_2)) \vee \mu(\omega_2) =$$

$$= \begin{cases} (\mu(\omega_1) \wedge \partial(\omega_1)) \vee \mu(\omega_2), & \partial(\omega_2) \geq \mu(\omega_2); \\ (\mu(\omega_1) \wedge \partial(\omega_1)) \vee \mu(\omega_2), & \partial(\omega_2) < \mu(\omega_2). \end{cases}$$

Таким образом, интеграл не зависит от значения плотности $\partial(\omega_2)$ **для** которой $\mu(\omega_2) \leq \mu(\omega_1)$

$$J = (\mu(\omega_1) \wedge \partial(\omega_1)) \vee \mu(\omega_2).$$

Для функции J зависимость от $\partial(\omega_1)$ представлена на рис. 12.13.

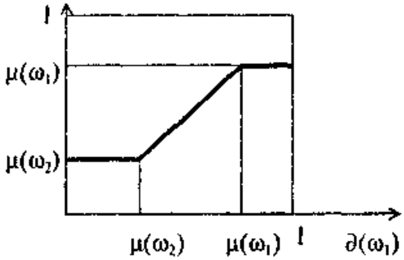


Рис.12.13. Зависимость функции J.

Данная зависимость соответствует соотношению (12.41).Что и требовалось доказать.

Как легко заметить, функция (12.41) однозначно аппроксимируется соотношением:

$$J = (1-\alpha)\mu(\omega_1) + \alpha\mu(\omega_2), \alpha \in [01]. \quad (12.42)$$

Коэффициент α определяет вклад каждой составляющей в значение интеграла. Тогда, исходя из доказанной леммы следует, что значения плотности меры фильтрующего временного окна в выражении (12.38) целесообразно принять в следующем виде:

$$\partial_\tau(t-\tau|\omega,t) = \partial_\tau(t|\omega,t) = \partial_t(\omega); \quad (12.43)$$

$$\partial_t(\omega) = (1-\alpha)s_{t-\tau}(\omega) + \alpha\cdot[\sigma_t(\omega) \wedge \varphi_R'(\omega)]. \quad (12.44)$$

Таким образом, оценка нечеткого состояния НП будет определяться соотношением (12.39) для которого $\partial_t(\cdot|\omega,t)$ является нечеткой мерой с равномерной плотностью для каждого $\omega \in \Omega$ определенной соотношением (12.44).

Как видно из соотношения для $\partial_t(\omega)$, мера $\partial_\tau(\cdot|\omega,t)$ зависит от $\alpha \in [01]$ и фильтрующей функции $\varphi_R'(\omega)$. Для определения этих параметров необходимо учитывать динамику нечеткого процесса. Так как согласно критерия (12.29) он должен выполнятся для любого $t \in T$ мы можем записать:

$$\min_\tau \int_\Omega \sigma_{t'}(\omega) \circ \int_\Omega s_{t'}(\omega) \circ g \to \max_{s_t(\omega)}, \quad (12.44)$$

где $t' \in \tau \subseteq T$.

Для рассматриваемого случая $Card\tau = 2$ соотношение имеет вид:

$$\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_t(\omega)\circ g \wedge \int_\Omega \sigma_{t-\sigma}(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g \to \max_{\hat{s}_t(\omega)}. \quad (12.45)$$

Оптимальный нечеткий наблюдатель определяется следующей теоремой.

Теорема 12.2.

Оптимальный нечеткий наблюдатель для НП при *Cardτ* = 2 определяется нечетко-дифференциальным уравнением (12.39) для которого двухмерная фильтрующая функция (12.37)

$W_t(\omega,\tau)$

определяется через функции:

$$\partial_t(\omega) = (1-\alpha)\cdot\hat{s}_{t-\tau}(\omega) + \alpha\cdot[\sigma_t(\omega)\wedge\varphi'_R(\omega)], \quad (12.46)$$

$$\varphi'_R(\omega) = \begin{cases}[R,1], \omega\in B_R(\omega)\subseteq\Omega \\ 0, \omega\notin B_R(\omega)\end{cases} \quad (12.47)$$

где $\alpha\in$ [01] определяется из соотношения:

$$\left|\min_{\omega\in B_R(\omega)}\left\{(1-\alpha)\hat{s}_{t-\tau}(\omega)+\alpha\sigma_t(\omega)\right\} - R\right| \to \min_\alpha;$$

$$R = \int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g \le J\in[01]. \quad (12.48)\text{-}(12.49)$$

Доказательство.

Для доказательства теоремы определим прежде всего характеристики фильтрующей функции

$\varphi'_R(\omega)$

при ограничениях, сложившихся на предыдущий момент времени, то есть согласно соотношения (12.45). Представим нечеткий интеграл для момента времени $t\in$ T в следующем виде:

$$\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g = \left[\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g\vee\alpha\right]\wedge\beta,$$

где α, $\beta\in[01]$ - являются неизвестными функциями. Подставим это выражение в (12.45). Получим:

$$\left\{\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g\vee\alpha\right\}\wedge\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}(\omega)\circ g\wedge\beta \to \max_{\alpha,\beta}.$$

Так как для оптимальности оценки НП необходима максимизация критерия (12.29) на каждом шаге, то справедливо соотношение:

$$\int\limits_{\Omega}\sigma_t(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\le\beta.$$

Тогда предыдущее соотношение примет вид:

$$\left\{\int\limits_{\Omega}\sigma_t(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\vee\alpha\right\}\wedge\int\limits_{\Omega}\sigma_{t-\tau}(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\to\max_{\alpha}.$$

Преобразуем данное соотношение. Исходя из свойств нечеткого интеграла (9.12), (9.18) справедливо:

$$\int\limits_{\Omega}\left[\alpha\vee\sigma_t(\omega)\right]\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\to\max_{\alpha};$$

$$\int\limits_{\Omega}\left[\alpha\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right]\vee\left[\sigma_t(\omega)\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right]\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\to\max_{\alpha}.$$

Согласно свойства (9.19) можем преобразовать:

$$\left[\int\limits_{\Omega}\sigma_{t-\tau}(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\wedge\alpha\right]\vee\int\limits_{\Omega}\left[\sigma_{t-\tau}(\omega)\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right]\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}(\omega)\circ g\to\max_{\alpha}$$

Обозначим: $\int\limits_{\Omega}\sigma_{t-\tau}(\omega)\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}\circ g=I_{t-\tau}$ - значение критерия (12.29) на момент t-$\tau\in T$.

$$\int\limits_{\Omega}\left[\sigma_t(\omega)\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right]\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}\circ g=K_t.$$

Данная функция играет роль корреляционной функции наблюдаемого НП. Тогда соотношение примет вид:

$$P=\left(I_{t-t}\wedge\alpha\right)\vee K_t\to\max_{\alpha}.$$

Как видно из графиков рис. 12.14 значение α целесообразно выбирать из условия:

$$\alpha\ge K_t=\int\limits_{\Omega}\left[\sigma_t(\omega)\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right]\circ\int\limits_{\Omega}s_{t-\tau}\circ g.$$

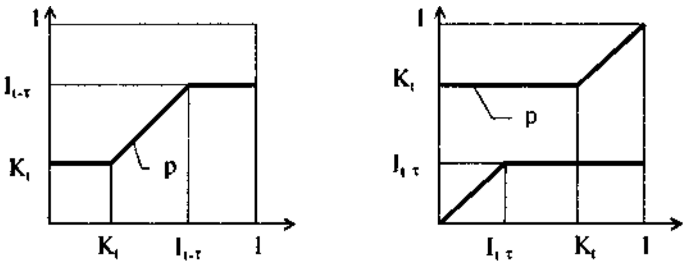


Рис. 12.14. Значение функции Р для $K_t<I_{t-\tau}$, $K_t>I_{t-\tau}$.

Если в качестве α принять α = *K,* тогда получим.

$$\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_t\circ g=\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-1}\circ g\vee K_t.$$

Так как α ≥K_t можем записать:

$$\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_t\circ g=\int_\Omega\left[\sigma_t(\omega)\vee\left(\sigma_t(\omega)\wedge\sigma_{t-\tau}(\omega)\right)\right]\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau_t}\circ g=$$

$$=\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_{t-\tau}\circ g=R\in[01].$$

Исходя из этого фильтрующая функция $\varphi'_R(\omega)$ примет вид, как на рис. 12.15:

$$\varphi'_R(\omega)=\begin{cases}[R,1],\ \omega\in B_R(\omega),\ R\le J\in[01];\\ 0,\quad \omega\notin B_R(\omega).\end{cases}$$

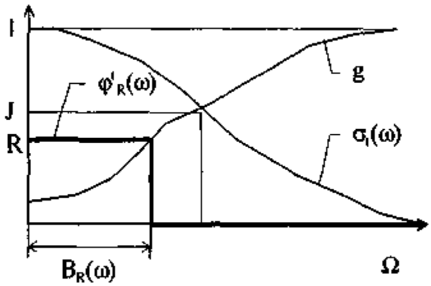


Рис.12.15. Фильтрующая функция.

Для того, чтобы выполнялось равенство:

$$\int_\Omega \sigma_t(\omega)\circ\int_\Omega \hat{s}_t\circ g=R\cdot \qquad (*)$$

необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\forall\omega\in B_R(\omega),\ \hat{s}_t(\omega)\ge R.$$

Но, так как согласно леммы 12.4 имеем:

$$\partial_t(\omega)=\hat{s}_t(\omega)=(1-\alpha)\cdot\hat{s}_{t-1}(\omega)+\alpha\left[\sigma_t(\omega)\wedge\varphi'_R(\omega)\right],$$

то для подмножества $B_R(\omega)$ при $\varphi'_R(\omega)=1$ справедливо:

$$\partial_t(\omega)=\hat{s}_t(\omega)=(1-\alpha)\hat{s}_{t-1}(\omega)+\alpha\sigma_t(\omega)\ge R\cdot$$

Отсюда для выполнения условия (*) необходимо α удовлетворяющее соотношению:

$$\left|\min_{\omega\in U_R(\omega)}\left\{(1-\alpha)\hat{s}_{t-1}(\omega)+\alpha\sigma_t(\omega)\right\}-R\right|\to\min_{\alpha}\cdot$$

Таким образом, это определяет оптимальный нечеткий наблюдатель Полученные соотношения соответствуют приведенным в условии теоремы. Следовательно теорема доказана.

Таким образом, мы получаем возможность осуществить оптимальную в смысле (12. 44) нечеткую фильтрацию. Физически уравнение оптимального нечеткого наблюдателя может быть пояснено следующим образом

Величина коррекции состояния оценочного НП определяется в зависимости от характера его наблюдения и поведения модели НП. При этом вариация $\hat{s}_t(\omega)$ зависит от корреляционной функции K_t НП $\sigma_t(\omega)$ зависящего от динамики наблюдаемого НП $p_t(\omega)$ и модели $s'_M(\omega)$.

Функция K_t определяет "степень доверия" к новому измерению и чем выше корреляция измеряемого НП $\sigma_t(\omega)$, тем большее число элементов $\hat{s}_t(\omega)$ корректируется в сторону увеличения к $\sigma_t(\omega)$ и на большую величину $R\in$ [01].

12.5. Дискретный нечеткий наблюдатель

Цель этого параграфа показать, что те подходы к построению нечеткого наблюдения, которые рассмотрены ранее, полностью справедливы и для случая дискретных НП. При этом дискретность может касаться как времени, так и пространства состояний Ω. Например, когда используются для описания состояния НП нечеткие изображения, рассмотренные в пункте 12. 1

Для дискретного НП нечеткий наблюдатель также может быть представлен в виде нечетко-интегральной свертки предыдущих состояний оценочного процесса

$$s_K(\omega)=\int_T \hat{s}(\omega,t')\circ\partial_\tau(\,|\omega,t'). \qquad (12.\ 50)$$

где $\hat{s}(\omega,t')$ - определяется как срез оценочного НП в дискретный момент времени $t'=\mathrm{K}-n\Delta$ из интервала окна τ, $sup\tau$ = K, а $\partial_t(\,|\omega,t)$ - дискретная нечеткая мера на временном интервале τ. В случае учета только $\hat{s}_{K-1}(\omega)$ нечеткий наблюдатель имеет вид

$$\hat{s}_K(\omega) = \left\{\hat{s}_{K-1}(\omega) \wedge \partial_{K-1}(\omega)\right\} \vee \left\{\left[\sigma_K(\omega) \wedge \varphi_R^K(\omega)\right] \wedge \partial_K(\omega)\right\} \vee$$
$$\vee \left\{\hat{s}_{K-1}(\omega) \wedge \left[\sigma_K(\omega) \wedge \varphi_R^K(\omega)\right]\right\}. \tag{12.51}$$

Теорема 12.3
Дискретный нечеткий наблюдатель, определяющий оценочный НП $\hat{s}_K(\omega)$ при Card τ = 2 описывается нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\hat{s}_K(\omega') = \left(\hat{s}_{K-1}(\omega') \wedge \partial(\omega')\right) \vee$$
$$\vee \int_{\hat{s}_{K-1}(\omega) \wedge a(\omega')} \left\{h_K(\omega, \omega') \wedge R_p(p_K^A(\omega)|s, \omega')\right\} \circ g \tag{12.52}$$

где $R_p(p_K^A(\omega)|s, \omega')$ - цилиндрическое продолжение функции $R_p(p_K^A(\omega)|s)$,

$$a(\omega) = \left\{\varphi_R^K(\omega') \wedge \partial(\omega)\right\} \vee \left\{\hat{s}_{K-1}(\omega') \wedge \varphi_R^K(\omega')\right\}, \tag{12.53}$$

$$\partial(\omega') = \partial_{K-1}(\omega) = \partial_K(\omega).$$

Доказательство.
Доказательство теоремы во многом сходно с доказательством теоремы 12.1. Введем обозначения:

$$a_1(\omega) = \hat{s}_{K-1}(\omega) \wedge \partial_{K-1}(\omega);$$
$$a_2(\omega) = \varphi_R^K(\omega) \wedge \partial_K(\omega);$$
$$a_3(\omega) = \varphi_R^K(\omega) \wedge \hat{s}_{K-1}(\omega).$$

Исходя из этих обозначений оценочный процесс может быть описан уравнением вида:

$$\hat{s}_K(\omega') = a_1(\omega') \vee \left\{\sigma_K(\omega') \wedge (a_2(\omega') \vee a_3(\omega'))\right\}.$$

Для дискретного НП $\sigma_K(\omega)$ описывается соотношением:

$$\sigma_K(\omega') = R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \int_{\hat{s}_{K-1}(\omega)} h(\omega, \omega') \circ g(\cdot) =$$
$$= \int_{\hat{s}_{K-1}(\omega)} \left[R_p(p_K^A(\omega)|s, \omega') \wedge h(\omega, \omega')\right] \circ g(\cdot).$$

Подставив это уравнение в соотношение для $\hat{s}_K(\omega')$ получим:

$$\hat{s}_K(\omega') = a_1(\omega') \vee \{\sigma_K(\omega') \wedge (a_2(\omega') \vee a_3(\omega'))\} =$$

$$= \{\hat{s}_{K-1}(\omega') \wedge \partial(\omega')\} \vee \{\sigma_K(\omega') \wedge a(\omega')\} = \{\hat{s}_{K-1}(\omega') \wedge \partial(\omega')\} \vee$$

$$\vee \left\{ \int_{\hat{s}_{K-1}(\omega)} \left[R_p(p_K^A(\omega)|s,\omega') \wedge h(\omega,\omega')\right] \circ g(\cdot) \wedge a(\omega') \right\}.$$

В силу того, что α(ω') не зависит от g(·) согласно интеграла может записать:

$$\hat{s}_{K-1}(\omega') = \{\hat{s}_{K-1}(\omega') \wedge \partial(\omega')\} \vee$$

$$\vee \int_{\hat{s}_{K-1}(\omega) \wedge a(\omega')} \left[R_p(p_K^A(\omega')|s,\omega') \wedge h_K(\omega,\omega')\right] \circ g(\cdot).$$

$\partial(\omega') = \partial_{k-1}(\omega) = \partial_k(\omega)$ согласно леммы 12.4. Следовательно теорема доказана.

Однако, уравнение нечеткого наблюдателя для дискретного НП при Card τ = *2* в виде (12.52) получается довольно таки сложным. Исходя из свойства нечеткого интеграла для двухточечных функций (лемма 12.4.) уравнение нечеткого наблюдателя целесообразно представить в виде:

$$\hat{s}_K(\omega) = (1-\alpha)\hat{s}_{K-1}(\omega) + \alpha\left[\sigma_K(\omega) \wedge \varphi_R^K(\omega)\right]. \quad (12.54)$$

В случае отсутствия ограничений в пространстве состояний НДС, $\forall \omega_j \in \Omega,\ g(\{\omega_j\}) = 1$ и при отсутствии модели процесса функция $\sigma_K(\omega)$ определяется лишь измерением, что доказано в лемме 12.3. Тогда:

$$\hat{s}_K(\omega) = (1-\alpha)\hat{s}_{K-1}(\omega) + \alpha\left[R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \varphi_R^K(\omega)\right]. \quad (12.55)$$

α ∈ [01] - определяет скорость сходимости фильтра. Уравнение (12.55) можно преобразовать к знакомому по фильтру Калмана представлению:

$$\hat{s}_K(\omega) = \hat{s}_{K-1}(\omega) + \alpha\left\{\left[R_p(p_K^A(\omega)|s) \wedge \varphi_R^K(\omega)\right] - \hat{s}_{K-1}(\omega)\right\}. \quad (12.56)$$

Структурная схема дискретного нечеткого наблюдателя, реализующего соотношению (12.56) представлена на рис. 12.16.

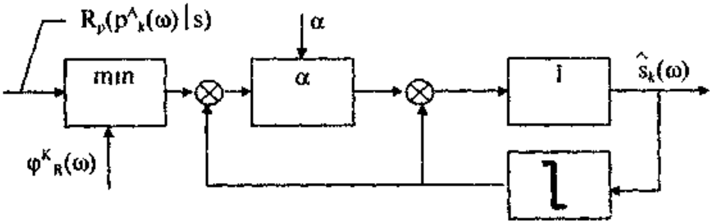


Рис.12.16. Структурная схема дискретного нечеткого наблюдателя

В заключение отметим, что фильтр (12.55), полученный нами как частный случай из уравнения нечеткого наблюдателя для дискретного НП при Card $\tau = 2$ является аналогом алгоритма обучения, предложенного Суджено.

12.6. Экстраполяция нечетких процессов

Во многих прикладных задачах наибольший интерес представляет решение задачи прогнозирования состояния какого либо процесса. При этом на прогноз влияет целая совокупность различных внешних факторов, приводящих к необходимости постановки задачи прогнозирования состояния процесса в нечетких терминах. Ниже будет рассмотрен один из возможных подходов прогнозирования состояния динамического процесса в условиях неопределенности на основе экстраполяции НП.

Допустим, что на пространстве состояний Ω необходимо спрогнозировать состояние некоторого процесса. На процесс действует совокупность внешних факторов $X=\{x\}$, каждый из которых может привести к определенной динамике процесса. При этом для фактора $x_к$ $\in X$ возможное состояние процесса ограничивается некоторым НП, описывающимся нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\sigma_{x_k}(\omega|t_{np}) = \int_T h_{x_k}(\omega, t_{np}) \circ \int_{\Psi_T(|\omega)} f_{t_{np}}(\omega) \circ g_\omega(\cdot). \quad (12\ 57)$$

где $t_{np} \in T$, T - временной интервал прогноза Если в текущий момент $t_{тек}$ влияние различных факторов определяется функцией важности $p(x){:}X \;\rightarrow\; [0 1]$, то задача прогнозирования состояния процесса заключается в нахождении такого нечеткого процесса, который бы агрегировал НП (12.57) с учетом функции *p(x),* то есть:

$$\hat{s}_{t_{np}}(\omega) = F(\sigma_{X_k}(\omega, t_{np}), p(x)). \quad (12\ 58)$$

Практически прогноз определяется некоторым оператором F агрегирования функций $\sigma_{x_k}(\omega, t_{np})$. В качестве такого оператора может выступать нечеткий интеграл на множестве *X* по некоторой нечеткой мере $\varpi_X(\ )$: $2^X \to [01]$, отражающей свойства оператора F. Легко показать, что если рассмотреть функцию $\Sigma(x|\omega, t_{np})$ такую, что $\sum\left(x_k|\omega, t_{np}\right) = \sigma_{x_k}(\omega, t_{np})$, то интегрирование этой функции по нечеткой мере $\varpi_X(\ )$ удовлетворяет свойству

$$\min_{x\in X}\sum\left(x_k|\omega, t_{np}\right) \le \int_X \sum\left(x_k|\omega, t_{np}\right)\circ\varpi_x(\cdot) \le \max_{x\in X}\sum\left(x_k|\omega, t_{np}\right). \tag{12.59}$$

Для этого докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 12.5

Для функции $h(x)$: $X \to [01]$ нечеткий интеграл по нечеткой мере $\varpi_X(\ )\ 2^X \to [01]$ является теоретико-множественной операцией для которой выполняется

$$\min_x h(x) \le \int h(x)\circ\varpi_x(\cdot) \le \min_x h(x), \tag{12.60}$$

для любой функции $\varpi_X(\cdot)$.

Доказательство.

Для доказательства леммы переупорядочим функцию *h(x)* в порядке убывания, как показано на рис. 12.17

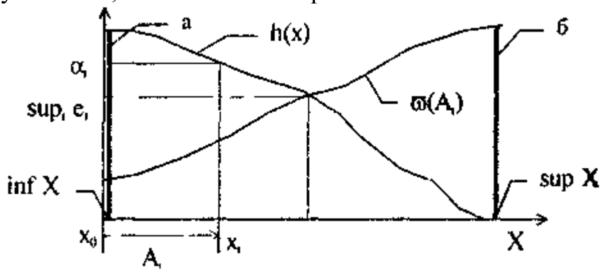


Рис. 12.17. К доказательству леммы 12 5.

Тогда, рассмотрев множество α-срезов функции *h(x)* будем иметь возрастающую последоватечьность множеств $A_i(x) \subseteq X$ таких, что $\forall\ i,\ j,\ \alpha_i \ge \alpha_j \in [01]\ \ A_i(x) \subseteq A_j(x)$. Нечеткий интеграл для каждого из подмножеств $A_i(x) \subseteq X$ будет определяться следующей зависимостью:

$$e_i = \min(h(x_i), \varpi_X(A_i)).$$

Следовательно интеграл от всей функции h(x) согласно (9. 27) удовлетворяет соотношению

$$\int_X h(x) \circ \varpi_X(\cdot) = \sup_i e_i = \sup_i \{h(x_i) \wedge \varpi_X(A_i)\}.$$

Рассмотрим более подробно данное выражение. Значение его зависит от выбранного распределения функции меры $\varpi_X(A_i)$.

а) если $\forall x \in X, x \neq inf X, \varpi_X(x) = 0$ и $x = infX, \varpi_X(x) \geq h(x)$, (где $x_i \geq x_j$, если $h(x_j) \geq h(x_i)$), то

$$\int_X h(x) \circ \varpi_X = \sup_X (h(x));$$

б) если $x = sup X, \varpi_X(x) \geq h(x), \forall x \neq sup X, \varpi_X(x) = 0$, то

$$\int_X h(x) \circ \varpi_X = \min_X h(x).$$

Данное условие иллюстрируются на рис. 12 17. Во всех промежуточных значениях для интеграла выполняются условие (12.60).Что и фебовалось доказать.

Таким образом, агрегирующие свойства нечеткого интеграла, определяются распределением меры ϖ_X ( ) и в зависимости от нее нечеткий интеграл может выступать как операция со свойствами либо объединения, либо пересечения нечетких множеств.

Для определения степени выполнения операции объединения q_F можно использовать следующую меру:

$$q_F = \int_X \eta(x) \circ \varpi_X(\cdot), \quad (12.61)$$

где функция η(x) определяется соотношением для непрерывного X:

$$\eta(x) = \frac{\sup X - x}{\sup X}, \quad (12.62)$$

или для дискретного X, Card X = *n* в виде:

$$\eta(x_j) = \frac{n-j}{n-1}, \quad x_j \in X \quad (12.63)$$

Величина, обратная q_F будет определять меру выполнения операции пересечения:

$$r_F = 1 - q_F \tag{12.64}$$

Исходя из приведенных выше рассуждений для определения экстраполированного нечеткого процесса $\hat{s}_{t_{пр}}(\omega)$ будем использовать в качестве оператора агрегирования НП $\sigma_{x_k}(\omega, t_{пр})$ нечеткий интеграл по мере $\varpi_{\backslash}(\,)$. Для учета информации о важности действующих факторов *p(x)* можно использовать следующие функции:

$$\sigma'_{x_k}(\omega, t_{пр}) = (p(x_k) \wedge r_F) \cdot \sigma_{x_k}(\omega, t_{пр})^{(p(x_k) \vee q_F)}. \tag{12.65}$$

Тогда для получения НП $\hat{s}_{t_{пр}}(\omega)$ можем использовать следующее соотношение:

$$\hat{s}_{t_{пр}}(\omega) = \int_X \sum(x_k|\omega, t_{пр}) \circ \varpi_X(\cdot|\omega), \tag{12.66}$$

где $\varpi_X(\cdot|\omega)$ - условная нечеткая мера оператора F, $\sum\left(x_k|\omega, t_{пр}\right) = \sigma'_{x_k}(\omega|t_{пр})$, определяемой соотношением (12.65). В этом случае, прогнозируемый нечеткий процесс будет представлять собой нечеткую функцию на Ω по времени прогноза.

В заключении отметим, что прогнозируемый процесс в виде $\hat{s}_{t_{пр}}(\omega)$ можно представить некоторой "трубкой" в пространстве Ω×Т. При этом, наиболее подходящим прогнозом процесса являлась бы такая "трубка" для которой выполнялись два противоречивых условия:

a) в каждый момент $t_{пр} \in \mathrm{T}$ размытость состояния НП была бы минимальной;

b) реальное значение процесса через время прогноза в максимальной степени совпало с прогнозированным.

Формально данные критерии можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered} Sp(\hat{s}_{t_{пр}}(\omega)) \to \max, \\ \sup_{\omega \in \Omega}\left\{\hat{s}_{t_{пр}}(\omega) \wedge s_t^u(\omega)\right\} \to \max, \end{gathered} \tag{12.67}$$

где $\mathrm{Sp}(\cdot)$ - мера точности, $s_t^u(\omega)$- истинное значение процесса через время прогноза.

Критерии (12.67) определяют оптимизационную задачу для экстраполяции нечеткого процесса $\hat{s}_{t_{пр}}(\omega)$, который находится из соотношения (12.66). При этом управляемым параметром является функция распределения плотности меры $\varpi_X(\cdot|\omega)$ по времени прогноза. Выбор этой функции осуществляется из следующих соображений.

В начальный момент времени, когда $t_{пр} \to 0$ выполнение критериев (12.67) осуществляется при реализации в нечетком интеграле операции пересечения, то есть $r_1 \to 1$. В процессе увеличения $t_{пр}$ для обеспечения выполнения критерия б) необходимо «размывание» НП $\mathfrak{s}_{t_{пр}}(\omega)$, что обеспечивается за счет плавного перехода от операции пересечения к операции объединения. То есть реализуется нечеткий процесс:

$$fd\varpi_X(x|\omega, t_{пр}) = h(x,\tau)\,fdf_{t_{пр}}(\omega), \qquad (12.68)$$

где $h(x,\tau)$ - есть функция, характеризующая динамику плотности нечеткой меры $\varpi_X(x|\omega, t_{пр})$ по времени прогноза и реализующая такую динамику $q_F(t_{пр})$, для которой выполняются (12.67) (Рис. 12.18).

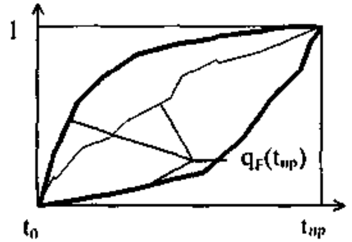


Рис.12.18. Функция $q_1(t_{пр})$.

При этом существует оптимальная функция $q_1^*(t_{пр})$, которая зависит от конкретных условий и конкретного прогнозируемого процесса. Задача нахождения оптимального $\varpi_X(x|\omega, t_{пр})$ является сложной и чаще всего осуществляется экспериментальным путем.

13. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЧЕТКО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕЧЕТКИХ ПРОЦЕССОВ

13.1. Задача идентификации моделей нечетких процессов

Использование нечетких моделей является одним из вариантов исследования сложных систем. Использование нечеткости при моделировании таких систем, позволяет нам, как это не звучит парадоксально, повысить адекватность получаемых моделей. Объясняется этот факт "принципом несовместимости" для сложных систем, сформулированным еще Л. Заде: "... чем ближе мы подходим к рассмотрению проблем реального мира, тем очевиднее, что при увеличении сложности системы наша способность делать точные и уверенные заключения о ее поведении уменьшаются до определенного порога, за которым точность и уверенность становятся почти что взаимоисключающими характеристиками".

В силу этого, для использования подходов описания неопределенности через нечеткие множества и меры, используются различные алгоритмы идентификации моделей. Но, все основные подходы, алгоритмы и методы идентификации, разработанные на сегодняшний день, ориентированны на модель НП, представленную в виде нечеткого композиционного уравнения типа (11.19) или его модификаций. Для идентификации данной модели, а именно нечеткого отношения, связывающего пространство входов и выходов НДС, применяются различные алгоритмы в основном ориентированные на построение некоторой теоретико-множественной операции, обратной операции композиции, с последующим сглаживанием результата.

Для идентификации моделей типа нечетких регрессий предлагается итерационно-оптимизационной алгоритм определения нечетких коэффициентов модели. В силу отсутствия, на сегодняшний день, в широкой практике использования нечетко-интегральных и дифференциальных уравнений описания сложных систем, методы идентификации таких моделей отсутствуют. Поэтому, в этой главе будут рассмотрены подходы к идентификации моделей в виде нечетко-интегральных и дифференциальных уравнений для дискретных и непрерывных НП.

Для описания дискретного НП будем рассматривать уравнение вида:

$$\mu_{i+1}(\omega) = \int_{\Omega'} h(\omega, \omega') \circ \int_{\Omega} \mu_i(\omega) \circ g(\cdot), \quad (13.1)$$

где $\mu_i(\omega)$ - функция, описывающая состояние НП в i-й момент времени, $h(\omega\omega')$ - стационарное нечеткое отношение реализующее оператор вход-выход, $g(\cdot)$ - нечеткая мера на пространстве состояний.

Для описания непрерывного НП в качестве модели рассматривается нечетко-интегральное уравнение вида:

$$\mu_\tau(\omega) = \int_T \left[\int_{\mu_\tau(\omega')} h(\omega, \omega', t) \right] \circ \int_{\Psi_t(\,|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g(\cdot). \quad (13.2)$$

Состояние НДС изменяется в нечеткие моменты времени

$\tau \in F(T), f_t(\omega)$ - НП - аналог броуновского движения,
$h(\omega, \omega', t)$- нечеткое отношение, являющееся оператором "вход-выход".
Идентификация нечеткой модели НП в виде уравнений (13.1), (13,2.) предполагает определение оператора вход-выход (нечеткого отношения) по информации о реализующихся или уже реализованных пар входа $\mu_i(\omega)$ и выхода $\mu_{i+1}(\omega)$ на некотором временном интервале так, чтобы обеспечить некоторое "свойство хорошего отображения" при котором выполняется

$$D = \sum_{i=1}^{N} d(\mu_i(\omega), \hat{\mu}_i(\omega)) \to \min, \quad (13.3)$$

где d(·,·) - функция расстояния между истинным состоянием НП и его модели $\hat{\mu}_i(\omega)$ в виде нечетко-интегрального уравнения (Например расстояние Хемминга). Ниже мы более подробно остановимся на проблеме оценки адекватности модели НП.

13.2. Идентификация моделей дискретных нечетких процессов

Рассмотрим модель дискретного НП (13.1). Данное уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\mu_{i+1}(\omega') = \int_{\Omega} \left[h(\omega, \omega') \wedge \mu_i(\omega)\right] \circ g(\cdot).$$

В данном уравнении неизвестным является нечеткое отношение $h(\omega\omega')$. Подход к идентификации функции $h(\omega\omega'):\Omega\times\Omega \to [01]$ строится на основе результатов приведенных в следующей лемме.

Лемма 13.1

Функция $h(\omega\omega')$ по информации $(\mu_i(\omega), \mu_{i+1}(\omega))$ на i+1-м шаге определяется из условия

$$g(M_{\mu_{i+1}} \cap H_{\mu_{i+1}}) = \mu_{i+1}(\omega'), \quad (13.4)$$

где $M_{\mu_{i+1}} = \{\omega | \mu_i(\omega) \geq \mu_{i+1}(\omega')\}, \quad H_{\mu_{i+1}} = \{\omega | h_{\omega'}(\omega) \geq \mu_{i+1}(\omega')\},$

для фиксированного $\omega' \in \Omega'$ и задается минимальной функцией:

$$h_i(\omega\omega') = \mu_{i+1}(\omega') \wedge \chi_{H^{\omega'}_{\mu_{i+1}}}(\omega) \quad (13.5)$$

где $\chi_{H^{\omega'}_{\mu_{i+1}}}(\omega)$ - характеристическая функция множества α - среза $H^{\omega'}_{\mu_{i+1}}(\omega)$ для фиксированного $\omega' \in \Omega$, полученного из условия (13.4).

Доказательство.
Уравнение дискретного НП можно записать:

$$\mu_{i+1}(\omega') = \int_{\Omega}\left[h(\omega\omega') \wedge \mu_i(\omega)\right] \circ g = \sup_{\alpha}\left[\alpha \wedge g(M_{\alpha}(\omega) \cap H_{\alpha}^{\omega'}(\omega))\right].$$

Согласно свойства нечеткого интеграла (9.10) имеем:

$$g\left(M_{\mu_{i+1}}(\omega) \cap H_{\mu_{i+1}}^{\omega}\right) = \mu_{i+1}(\omega')$$

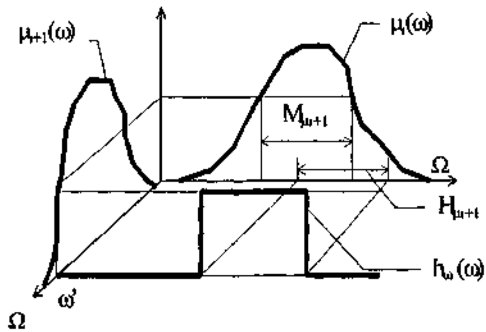


Рис.13.1. К доказательству лемм

Исходя из этого соотношения любая функция $h_{\omega'}(\omega)$ имеющая на уровне $\mu_{i+1}(\omega')$ такой α - срез, что выполняется условие равенства, является вариантом решения задачи идентификации по i+1-му шагу. В силу необходимости выполнения условия вложенности α-срезов (8.23) минимальное решение определяется соотношением (рис. 13.1):

$$h_{\omega}(\omega) = \mu_{i+1}(\omega') \wedge \chi_{H_{\mu_{i+1}}^{\omega'}}(\omega),$$

Что и требовалось доказать.
Для дальнейшего рассмотрения сделаем ряд замечаний.
а) Условие (13.4) не обеспечивает единственности решения задачи идентификации, а следовательно существует целое семейство подмножеств H_{α} на уровне $\mu_{i+1}(\omega)$ для которых выполняется условие (13.4). И как следствие, определение минимального решения (13.5) не обеспечивает однозначного решения.
б) Для восстановления функции $h(\omega,\omega')$ по совокупности наблюдений необходима организация некоторой процедуры агрегирования А[·] вариантов по всем i-м измерениям, которая должна учитывать структуру решений на всех уровнях

;$\mu_{i+1}(\omega')$, $i=\overline{1,I}$ и для всех наблюдений, даже при равенстве $\mu_{i+1}(\omega')=\mu_{i+k}(\omega')$.

в) Следует отметить, что условие (13.4) справедливо согласно свойства (9.10), которое получено для случая непрерывного носителя Ω. Если же пространство *Ω* является дискретным условие (9.10) должно быть заменено на менее жесткое условие вида

$$g\left(M_{\mu_{i+1}}(\omega)\bigcap H_{\mu_{i+1}}(\omega)\right)\geq\mu_{i+1}(\omega'). \quad (13.6)$$

Таким образом, смягчение условия равенства (13.4.) приводит к еще более не однозначному решению задачи идентификации и осложняет поиск оценки функции h(ω, ω').

Приведенные выше замечания показывают, что идентификация функции $h(\omega,\omega')$ в нечетко-интегральном уравнении (13.1) для дискретных НП есть задача не регулярная и требует предварительной регуляризации, позволяющей найти некоторое квазиоптимальное решение. Вариант решения задачи идентификации для дискретного Ω может быть получен в результате формирования процедуры агрегации α - уровневых решений по каждой паре вход-выход построенной по принципу приближения условия (13.6) к условию (13.4), то есть обеспечивая минимизацию меры

$$g\left(M_{\mu_{i+1}}(\omega)\bigcap H_{\mu_{i+1}}^{\omega'}(\omega)\right)\rightarrow\min. \quad \mathbf{(13.7)}$$

Нахождение квазиоптимального решения для дискретного Ω, построенного на основе условия регуляризации (13.7), определяется теоремой.

Теорема 13.1

Квазиоптимальное решение задачи идентификации модели дискретного НП (13.1) определяется по информации о динамике НДС до i-го шага рекуррентным соотношением при фиксированном $\omega'\in\Omega$:

$$\hat{h}_{i+1}(\omega,\omega')=\left[\hat{h}_i(\omega,\omega')\vee\mu_{i+1}(\omega')\right]\wedge h_i(\omega,\omega'), \quad (13.8)$$

где $h_i(\omega,\omega')=\tilde{h}_{I\max}(\omega)$, определяется последовательно, согласно соотношения:

$$\tilde{h}_{i+1}(\omega)=\tilde{h}_i(\omega)\vee\left(\mu_{i+1}(\omega)\wedge\chi_{H_{i+1}}(\omega)\right), \quad \mathbf{(13.9)}$$

$$h_0(\omega)=\chi_{H_{\mu_0}}(\omega),\ \mu_0>\mu_{i+1}(\omega')=\mu_1>\mu_2>\ldots>\mu_{I_{\max}}$$

$\chi_{H_{i+1}}(\omega)$ - характеристическая функция множества H_{i+1}:

$$H_{l+1} = H_l \cup \bigcup_{K_l=1}^{N_l} P^*_{K_l}, \quad (13.10)$$

где $K_l = \overline{1, N_l}$ - количество выходов при которых $\mu_{l+1}(\omega') = \mu_l, \quad P^*_{k_l} \subseteq M_{k_l} = \{\omega | \mu^k_l(\omega) \geq \mu_l\}$, для которого выполняется:

$$\underset{K_l}{\wedge} g\left(\left[H_l \cup \bigcup_{K_l=1}^{N_l} P^{K_l}_{j_k}\right] \cap M_{K_l}\right) \to \min, \quad (13.11)$$

$\{P^{k_l}_{j_k}\}$ - семейство подмножеств $P^{k_l}_{j_k} \subseteq M_{k_l}$ для которых

$$g(P^{k_l}_{j_k}) \geq \mu_l(\omega'). \quad (13.12)$$

Доказательство.

Пусть на i-м шаге модель НП определялась для фиксированного сечения $\omega' \in \Omega$ функций $\hat{h}_i(\omega)$. Если полагать, что на i-м шаге реализовать значение $\mu_{i+1}(\omega')$, на выходе, то согласно (13.6) изменения оценки $\hat{h}(\omega\omega')$ могут определять лишь те α- срезы для которых $\alpha \leq \mu_{i+1}(\omega')$ (рис.13.2).

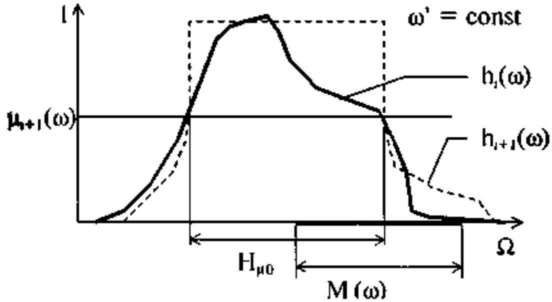


Рис.13.2. К доказательству теоремы 13.1

Следовательно, задача состоит в поиске некоторой функции $h_i(\omega)$, которая изменяет оценку $\hat{h}_i(\omega)$ для всех ω при которых $\hat{h}_i(\omega) \leq \mu_{i+1}(\omega')$. Условие изменения оценки $\hat{h}_i(\omega) \leq \mu_{i+1}(\omega)$ можно представить в виде:

$$\hat{h}_{i+1}(\omega) = \left[\hat{h}_i(\omega) \wedge \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)\right] \vee h'_i(\omega),$$

где $h'_i(\omega)$ некоторая функция. Так как вариации подлежат все $\hat{h}_i(\omega) \le \mu_{i+1}(\omega)$, то функция $h'_i(\omega)$ может быть представлена в виде

$$h'_i(\omega) = \left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge \left[m_i(\omega) \wedge \mu_{i+1}(\omega')\right]$$

где $\left\{\omega \middle| \hat{h}_i(\omega) \ge \mu_{i+1}(\omega')\right\} = \left\{\omega \middle| m_i(\omega) \ge \mu_{i+1}(\omega')\right\}$

Подставив это соотношение получим

$$\hat{h}_{i+1}(\omega) = \left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge \left\{\left[\hat{h}_i(\omega) \wedge \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)\right] \vee \left[m_i(\omega) \wedge \mu_{i+1}(\omega')\right]\right\} =$$

$$= \left\{\left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge \left[\hat{h}_i(\omega) \wedge \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)\right]\right\} \vee$$

$$\vee \left\{\left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge \left[m_i(\omega) \wedge \mu_{i+1}(\omega')\right]\right\} = \left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge$$

$$\wedge \left\{\left[\hat{h}_i(\omega) \wedge \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)\right] \vee m_i(\omega)\right\} = \left[\hat{h}_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right] \wedge \left\{\left(\hat{h}_i(\omega) \vee m_i(\omega)\right) \wedge\right.$$

$$\left.\wedge \left(\chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega) \vee m_i(\omega)\right)\right\} = \left(h_i(\omega) \vee \mu_{i+1}(\omega')\right) \wedge \left(\chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega) \vee m_i(\omega)\right).$$

Таким образом, если положить искомую функцию в виде:

$$h_i(\omega) = \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega) \vee m_i(\omega),$$

то получим, что идентифицируемая функция будет определяться соотношением (13 8). Для $\forall \omega \in H_{\mu_{i+1}}(\omega), h_i(\omega) = \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)$ целесообразно принять $\tilde{h}_0(\omega) = \chi_{H_{\mu_{i+1}}}(\omega)$. Функция $m_i(\omega)$ будет определяться α-уровнями для $\alpha \le \mu_{i+1}(\omega')$. Для упорядоченных $\mu_0 > \mu_{i+1}(\omega) = \mu_1 > \mu_2 \underset{\sim}{>} \ldots > \mu_{1\max}$ рассмотрим произвольный *l*-уровень.

На *l*-1 уровне функция $\tilde{h}_{l-1}(\omega)$ имеет множество уровня:

$$H_{l-1}(\omega) = \left\{\omega \middle| \tilde{h}_{l-1}(\omega) \ge \mu_{l-1}\right\}.$$

Пусть на *l* - м уровне количество выходов НДС по координате $\omega' \in \Omega$ равно N_i. Для каждого выхода $\mu_i(\omega)$ при котором $\mu_{i+1}(\omega') = \mu_l$ множество уровня μ_{il} будет определяться соотношением.

$$\forall K_l = \overline{1, N_l}, \quad M_{k_l} = \left\{\omega \middle| \mu_i^{k_l}(\omega) \ge \mu_l\right\}.$$

Для каждого K_i должно выполня гься условие (13 6) Пусть $\Lambda_{Kl}(M_{Kl})$ есть множество всех подмножеств M_{ki}. Тогда существует семейство подмножеств $\{P_{jk}^{K_l}\} \subseteq \Lambda_{K_l}(M_{K_l})$ такое, что выполняется условие

$$P_{jk}^{K_l} \subseteq M_{K_l}, \text{ и } g(P_{jk}^{K_l}) \geq \mu_{l+1}(\omega')$$

Для того, чтобы выполнялось условие (13 6) для каждого K_i необходимо и достаточно выполнение $(M_{K_l} \cap H_{\mu l}) \in \{P_{jk}^{K_l}\}$, то есть пересечение μ_i - уровня функции $h(\omega,\omega')$ при фиксированном $\omega' \in \Omega$ с μ_i – уровнем входной функции $\mu_i(\omega)$ принадлежал семейству $\{P_{jk}^{K_l}\}$.

Для восстановления подмножества $H_{\mu_l}(\omega)$ с учетом условия вложенности α- уровней (8.23) может быть использовано любое подмножество вида:

$$H_l = H_{l-1} \cup \bigcup_{k_l=1}^{N_l} P_{jk}^{k_l}.$$

В этом случае условие (13 6) выполняется. Однако семейство решений может быть сколь угодно велико, что определяется мощностью семейств $\{P_{jk}^{K_l}\}$. С целью получения единственного решения используем условие регуляризации (13.7). Получим:

$$g\left(M_{k_l} \cap H_{\mu_l}\right) \to \min;$$

$$g\left(M_{k_l} \cap \left\{H_{l-1} \cup \bigcup_{k_l=1}^{N_l} P_{jk}^{k_l}\right\}\right) \to \min.$$

Применив условие регуляризации ко всем входам где $\mu_{l+1}(\omega') = \mu_l$ получим:

$$\bigwedge_{k_l} g\left(M_{k_l} \cap \left\{H_{l-1} \cup \bigcup_{k_l=1}^{N_l} P_{jk}^{k_l}\right\}\right) \to \min,$$

где минимизация осуществляется на множестве наборов P_{jk} для всех K_i. Таким образом, решив задачу оптимизации приведенную выше для всех $l = \overline{1, L_{max}}$ функция $h_{i,}(\omega)$ будет оцениваться в виде функции $\widetilde{h}_{L_m}(\omega)$, рассчитанной согласно (13.9), так как выполняется условие вложенности α-уравнений и $\widetilde{h}_0 = \chi_{H_{\mu,1}}(\omega)$. Следовательно, теорема доказана.

Таким образом, доказанная теорема позволяет построить приемлемый алгоритм идентификации, позволяющий получить квазиоптимальное решение на основе условия регуляризации (13.7). Структура алгоритма А1 имеет вид:

Алгоритм А1

1. Для фиксированного $\omega' \in \Omega$ определяется убывающая последовательность α-уровней:

$$\mu_0 > \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_{L\max},\ l = \overline{0, L_{\max}}\ .$$

2 Для каждого входа, на каждом i-м уровне определяются семейства $\{ P_{i_k}^{k_l} \}$, удовлетворяющих условию теоремы 13.1.

3. На уровне l множество уровня оценки функции $\hat{h}_i(\omega)$ находится согласно условий (13.10), (13.11)

4. На 1+l уровне вспомогательная функция $\tilde{h}_{l-1}(\omega)$ находится согласно (13.9).

5. Пункты 2-4 выполняются до $l=l_{\max}$ и уточняющая функция $h_{i,}(\omega)$ определяется как $h_i(\omega) = \tilde{h}_{L_{\max}}(\omega)$.

6. Оценка функции нечеткого отношения для НДС для фиксированного $\omega' \in \Omega$ по информации о i шагах строится согласно (13.8).

7. Пункты 1-6 повторяются для всех $\omega' \in \Omega$ и восстанавливается оценка функции в виде: $\forall \omega' \in \Omega \qquad \hat{h}_i(\omega\omega') = \hat{h}_i^{\omega'}(\omega)$.

8. При поступлении новой информации на i+1 шаге пункты 1-7 повторяются для уточнения оценки оператора НДС.

Анализ приведенного алгоритма идентификации показывает, что данный алгоритм критичен с точки зрения трудоемкости определения семейств $\{P_{ik}^{K_l}\}$ на каждом *i*-м уровне среза функции $h(\omega,\omega')$ и приемлем, в основном, для НДС описывающихся на дискретном пространстве состояний Ω с малой мощностью. В то же время, точность идентификации функции $h(\omega,\omega')$ ожидается значительной. Однако, когда мощность Ω. более 100 и в пределе при непрерывном Ω данный алгоритм идентификации будет малоэффективным. Для решения задачи идентификации в этом случае целесообразно использовать упрощенный алгоритм идентификации. При этом основное упрощение касается построения семейства $\{P_{jk}^{K_l}\}$. Так как существует всего три варианта пересечения множеств $H_\alpha(\omega)$ и $M_\alpha(\omega)$, а именно:

а) $H_\alpha(\omega) \subsetneq M_\alpha(\omega)$;

б) $H_\alpha(\omega) \cap M_\alpha(\omega) \subsetneq M_\alpha(\omega)$;

в) $H_\alpha(\omega) \supsetneq M_\alpha(\omega)$,

то справедливо соотношение:

$$g\left(M_{\mu_{i+1}}(\omega)\right) \geq \mu_{i+1}. \qquad (13.13)$$

Исходя из этого, в качестве наибольшей оценки подмножества $P^*_{K_l}$ в соответствующем семействе можно использовать подмножество μ_{i+1}- уровня от входной функции. Тогда, в качестве оценки подмножества *i*-уровня для функции $\widetilde{h}_{l_{\min}}(\omega)$ можно использовать единственное соотношение:

$$H_{l+1} = H_l \bigcup \bigcup_{k_l=1}^{N_l} M_{k_l} \qquad (13.14)$$

Условие построения множества (13.14) является условием регуляризации максимизирующим меру

$$g\left(M_{\mu_{i+1}}(\omega) \bigcap H^{\omega'}_{\mu_{i+1}}(\omega)\right) \to \max. \qquad (13.15)$$

Исходя из данного условия регуляризации алгоритм идентификации функции $h(\omega,\omega')$ (**<u>АЛГОРИТМ</u> А2**) имеет вид аналогический алгоритму А1 при изменении пунктов 2 и 3 пунктом:

- Множество уровня *l* для функции $\widetilde{h}_l(\omega)$ определяется

соотношением (13.14).

В силу того, что выполняется условие

$$\forall j,k,l, \quad P^{K_l}_j \subseteq \left\{P^{K_l}_{j_l}\right\}, \quad P^{K_l}_l \subseteq M_{\mu_l}$$

Справедливо соотношение:

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \hat{h}^{A1}_{\omega'}(\omega) \leq \hat{h}^{A2}_{\omega'}(\omega), \qquad (13.16)$$

где Al, А2 - соответствует оценкам полученным соответственно по первому и второму алгоритмам. Исходя из этого, получаемые на выходе модели состояния НП, согласно свойства нечеткого интеграла (9.17) будут удовлетворять условно вложенности:

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mu^{A1}(\omega) \leq \mu^{A2}(\omega). \qquad (13.17)$$

Таким образом, модель идентифицированная по алгоритму А2 будет обладать больше чем для А1 уровнем неопределенности. В силу этого, целесообразно, при использовании модели идентифицированной по А2, проводить дополнительные исследования на степень адекватности. В заключении отметим, что идентифицированные модели НП строятся

лишь на определенном наборе входной и выходной информации. В силу этого, на других исходных входных сигналах модель может иметь ошибки на выходе и в силу этого проверка адекватности модели для использования ее в общем случае является обязательным условием.
Для иллюстрации работы алгоритмов рассмотрим численные примеры.

Пример 13.1.

Пусть Ω - дискретное пространство состояния НДС Card Ω = 5. На Ω задана нечеткая мера g(·) определяемая следующим распределением плотности:

$$g(\cdot)=\{1|\,0.1,\ 2|\,0.2,\ 3|\,0.35,\ 4|\,0.25,\ 5|\,0.1\}.$$

Истинное нечеткое отношение h(ω, ω ') определяется матрицей

$$h(\omega\omega')=\begin{bmatrix}1 & 0.8 & 0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.4 & 0.3\\ 0.5 & 0.7 & 0.9 & 0.6 & 0.5\\ 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 & 0.4\\ 0.1 & 0.4 & 0.5 & 0.9 & 1\end{bmatrix}$$

На вход НДС были поданы три входных сигнала:

$$\mu^1_{вх}(1|0.9\quad 2|0,7\quad 3|0.5\quad 4|0.3\quad 5|0.1),$$
$$\mu^2_{вх}(1|0.2\quad 2|0,4\quad 3|0,8\quad 4|0,5\quad 5|0,1),$$
$$\mu^3_{вх}(1|0,1\quad 2|0.3\quad 3|0,5\quad 4|0.7\quad 5|0.8).$$

$$\mu^1_{вых}(1|0,5\quad 2|0,5\quad 3|0,5\quad 4|0,4\quad 5|0,35),$$
$$\mu^2_{вых}(1|0.4\quad 2|0,5\quad 3|0,5\quad 4|0,5\quad 5|0.4),$$
$$\mu^3_{вых}(1|0.4\quad 2|0,5\quad 3|0,5\quad 4|0,5\quad 5|0,45).$$

Необходимо по информации $(\mu_i^{вх},\mu_i^{вых}),\ i=\overline{1,3}$ восстановить функцию h(ω, ω '). Для решения будем использовать алгоритм А. 1

$$1.\ \omega'=1\quad \mu^1_{вых}=0.5,\ \mu^2_{вых}=0,4,\ \mu^3_{вых}=0,4\ \ H_1=\varnothing.$$

Определяем семейство множеств:

$$\{P_j\}_{0,5}^1 = P_{23} = \{2,3\}, \quad \{P_j\}_{04}^1 = \{P_{23}^1, P_{24}^1, P_{34}^1\}, \quad \{P_j\}_{04}^2 = \{P_{34}^2, P_{35}^2\}$$

$$H_{05} = H_1 \cup \bigcup_{K=1}^{1} P_j = H_1 \cup P_{23} = P_{23}; \quad H_{04} = H_{05} \cup \bigcup_{K=1}^{2} P^{*K}.$$

P^{*k} будет определяться согласно условия регуляризации (13.11) рис. 13. 3.

$$g\{(H_{05} \cup P_{23}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{23}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.6;$$

$$g\{(H_{05} \cup P_{23}^1 \cup P_{35}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{23}^1 \cup P_{35}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.45;$$

$$g\{(H_{05} \cup P_{24}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{24}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.6;$$

$$g\{(H_{05} \cup P_{24}^1 \cup P_{35}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{24}^1 \cup P_{5}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.7$$

$$g\{(H_{05} \cup P_{34}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{34}^1 \cup P_{34}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.6;$$

$$g\{(H_{05} \cup P_{34}^1 \cup P_{35}^2) \cap M_{04}^1\} \wedge g\{(H_{05} \cup P_{34}^1 \cup P_{35}^2) \cap M_{04}^2\} = 0.7;$$

где $M_{04}^1\{2,3,4\}$, $M_{04}^2\{3,4,5\}$

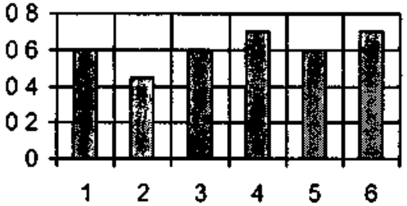


Рис.13.3. Определение семейства P^{*k} согласно условия регуляризации (13.11).

На оси абсцисс приведены номера сочетания подмножеств из семейств $\{P^j\}_{04}^k$, $k = 1,2$ Отсюда $H_{04} = H_{05} \cup P_{23}^1 \cup P_{35}^2$. Следовательно в сечении ω'=1 функция

$$\hat{h}(\omega\omega_1') = (1|0\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0\ 5\ 0.4)$$

2. Для ω'=2 $\mu_1^{вых} = \mu_2^{вых} = \mu_3^{вых} = 0.5$

$$\{P\}_{05}^1 = P_{23}^1, \{P\}_{05}^2 = P_{34}^2, \{P\}_{05}^3 = P_{34}^3$$

$$H_{05} = \varnothing \cup P_{23}^1 \cup P_{34}^2 \cup P_{34}^3 = P_{23} \cup P_{34} = P_{234}$$

Это решение единственное Тогда для ω'=2:

$$\hat{h}(\omega\omega'_2) = (1|0\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0).$$

3. Для ω'=3 решение аналогично ω'=2.
4. Для $\omega'=4$ и $\omega'=5$. Процедура идентификации аналогична выше приведенной и полученные значения функции $\hat{h}(\omega\omega')$ имеют вид:

$$\hat{h}(\omega,\omega'_4) = \{1|0.4\ 2|0\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0\},$$

$$\hat{h}(\omega,\omega'_5) = \{1|0\ 2|0.4\ 3|0.45\ 4|0\ 5|0.45\}.$$

При использовании полученной оценки функции $\hat{h}(\omega\omega')$ реакция на выходе моделидля фиксированных входов $\mu'_{\text{кх}}$ $i=1,3$ имеем:

$$\mu^{1\ M}_{\text{вых}} = \{1|0.5\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.4\ 5|0.4\},$$

$$\mu^{2\ M}_{\text{вых}} = \{1|0.4\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0.4\},$$

$$\mu^{3\ M}_{\text{вых}} = \{1|0.4\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0.45\}.$$

Как видно решение расходится лишь по первому входу при ω'=5. Что говорит о хорошей степени адекватности модели на рассматриваемом семействе реализаций вход-выход.

Пример 13.2.

Рассмотрим пример применения алгоритма A2 идентификации нечеткой модели дискретного НП.

Исходные данные для решения задачи аналогичны исходным данным приведенным в примере 13.1.

1. Для сечения ω'=1:

$$H_{05} = M^1_{05} = \{1,2,3\}$$

$$H_{04} = H_{05} \cup M^2_{04} \cup M^3_{04} = H_{05} \cup \{2,3,4\} \cup \{3,4,5,\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

2. Для сечения $\omega'=2$ и $\omega'=3$:

$$H_{05} = M^1_{05} \cup M^2_{05} \cup M^3_{05} = \{1,2,3\} \cup \{3,4\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

3. Для сечения ω'=4:

$$H_{05} = M^2_{05} \cup M^3_{05} = \{3,4\} \cup \{3,4\} = \{3,4\}$$

$$H_{04} = H_{05} \cup M^1_{04} = \{1,2,3\} \cup \{3,4\} = \{1,2,3,4\}.$$

4. Для сечения ω'=5:

$$H_{045} = M^3_{045} = \{3,4,5\}$$

$$H_{04} = H_{045} \cup M^2_{04} = \{3,4,5\} \cup \{2,3,4\} = \{2,3,4,5\}$$

$$H_{035} = H_{04} \cup M^1_{035} = \{2,3,4,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

5. Оценка модели, в силу этого, будет

$$\hat{h}(\omega\dot{\omega}') = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.35 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.45 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.45 \\ 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.45 \end{bmatrix}$$

6. На выходе модели для рассмотренных входов будем иметь:

$$\mu^{1\ M}_{вых} = \{1|0.5\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.4\ 5|0.4\},$$

$$\mu^{2\ M}_{вых} = \{1|0.4\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0.45\},$$

$$\mu^{3\ M}_{вых} = \{1|0.4\ 2|0.5\ 3|0.5\ 4|0.5\ 5|0.45\}.$$

Выход модели в этом случае близок к выходу реального процесса. Ошибки в сторону завышения значений наблюдаются в 1 и 2 выходном множестве при ω'=5. Как видно из результатов при сравнении с алгоритмом А1 (пример 13.1) выполняется условие (13.17), однако вычислительные затраты при решении задачи идентификации значительно ниже, что делает использование алгоритма А2 для решения задачи идентификации весьма привлекательным.

13.3. Идентификация моделей непрерывных нечетких процессов

Идентификация моделей непрерывных НП является более затруднительной, в силу значительной сложности разложения нечеткого интеграла по расширенной нечеткой мере, через который представляется соответствующая модель. Модель непрерывного процесса описывается уравнением (13.2). Пусть в результате наблюдения за НП мы имеем $i=\overline{1,N}$ измерений реализовавшихся пар вход-выход. Пока будем считать, что идентификация осуществляется по дискретным "срезам" НП. Однако, как будет видно дальше данный алгоритм может быть без труда расширен на случай непрерывного процесса идентификации модели НП. Таким образом, через нечеткий интервал времени $\tau_i \in F(T)$ реализовывается пара $\left\{\mu_{\tau_i}^{вх}(\omega),\ \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')\right\}$. Необходимо по имеющейся информации о мере $\Psi_t(\cdot|\omega)$, НП $f_t(\omega)$ и накопившейся информации за i измерений восстановить функцию $h(\omega,\omega',t)$, определяющую модель НП. Следует отметить, что как и для дискретного, так и для непрерывного случая задача восстановления НП имеем не однозначное решение. Для получения приемлемого решения необходимо введение условий регуляризации получаемых решений. В противном случае получение единственного решения невозможно. Наиболее логичным, с точки зрения практики, может являться условие регуляризации приводящее к "покрывающему" решению, то есть получению такой оценки модели НП, использование которой приводит к выполнению условия:

$$\forall \mu_{вх}(\omega) \in F(\Omega), \quad \mu_{вых}^{и}(\omega) \le \hat{\mu}_{вых}(\omega), \tag{13.18}$$

где $\mu_{вых}^{и}(\omega)$ - нечеткое состояние истинного НП, $\hat{\mu}_{вых}^{и}(\omega)$ - нечеткое состояние для модели НП. Исходя из этого, по аналогии с дискретными НП, может быть использовано условие регуляризации типа (13.13), (13.14), приводящее к максимизации оценки и получению "покрывающего" решения.

С учетом условия регуляризации (13.18) модель непрерывного НП может быть идентифицирована исходя из применения результатов следующей теоремы:

Теорема 13.2

Модель непрерывного НП на основании $i=\overline{1,N}$ измерений вход-выход определяется с учетом условия регуляризации (13.18) согласно следующего соотношения для фиксированного $\omega' \in \Omega$:

$$\hat{h}(\omega,t) = \bigvee_{i=1}^{N}\left[\mu_{вых}^{i}(\omega') \wedge \chi_{H_i}(\omega,t)\right], \tag{13.19}$$

где $H_i \subseteq \Omega\times T$ - четкое отношение на декартовом произведении пространств $\Omega\times T$ для i-го измерения определяемое как:

$$H_i = E_i^* \times F_i^*, \tag{13.20}$$

где $E_i^* = M_{\mu'_{вых}(\omega')} = \left\{\omega \middle| \mu'_{вх}(\omega) \geq \mu'_{вых}(\omega')\right\} \subseteq \Omega,$

$F_i^* = \Gamma(E_i^*) \subseteq T,$ такое, что

$$\forall \omega \in \left\{\omega \middle| f_{\tau_i}(\omega) \geq \mu'_{вых}(\omega')\right\}, \quad \psi_i(F_i^* | \omega) \geq \mu'_{вых}(\omega'),$$

$\Gamma(\cdot)$ – соответствие Галуа (10.20).

Доказательство.

Уравнение описывающее динамику непрерывного НП имеет следующий вид:

$$\mu_\tau^{вых}(\omega') = \int_T \left[\int_{\mu_\tau^{вх}(\omega)} h(\omega, \omega', t) \circ g\right] \circ \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g(\cdot).$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\mu_\tau^{вых}(\omega') = \int_T \left[\int_\Omega \left\{h(\omega, \omega', t) \wedge \overline{\mu_{вх}^\tau(\overline{\omega}, \overline{t})}\right\} \circ g\right] \circ \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g,$$

где $\forall t \in \mathbf{T}, \quad \mu_\tau^{вх}(\omega, t) = \mu_\tau^{вх}(\omega)$ - цилиндрическое продолжение.

Согласно теоремы 10.1, являющейся аналогом теоремы Фубини, можем записать:

$$\mu_\tau^{вых}(\omega') = \int_{T \times \Omega} \left[h(\omega, \omega', t) \wedge \mu_{вх}^\tau(\overline{\omega}, \overline{t})\right] \circ \left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g(\cdot)\right\rangle,$$

где $\left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g(\cdot)\right\rangle$ - есть декартово произведение нечетких мер, которое является нечеткой мерой на пространстве Ω×T.

Рассмотрим функцию в квадратных скобках при фиксированном ω'∈Ω. Данная функция является нечетким отношением на декартовом произведении пространств Ω×T. Отсюда, для модели непрерывного нечеткого процесса справедливо представление:

$$\mu_\tau^{вх}(\omega') = \sup_{\alpha \in [0 1]} \left\{\alpha \wedge \left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g\right\rangle (H_\alpha)\right\},$$

где $\left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g\right\rangle (H_\alpha)$ - есть функция меры от подмножества α-среза нечеткого отношения $h_{\omega'}(\omega t) \wedge \mu_{вх}^T(\omega t)$, то есть:

$$H_{\alpha} = \left\{(\omega, t) \mid h_{\omega'}(\omega, t) \wedge \overline{\mu_{вх}^{\tau}(\omega, t)} \geq \alpha \in [01]\right\}.$$

Рассматривая полученное выражение для i-го измерения вход-выход можем записать следующее условие:

$$\left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_i(\,|\omega)} f_{\tau}(\omega) \circ g \right\rangle (H_{\alpha}) = \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega').$$

Согласно определения 10.3 нечеткая мера отношения H_{α} определяется выражением:

$$\left\langle g(\cdot) \times \int_{\psi_i(\,|\omega)} f_{\tau}(\omega) \circ g \right\rangle (H_{\alpha}) = \bigvee_{E \subseteq \Omega} \left\{ g(E) \wedge \int_{\psi_i(\Gamma(E)|\omega)} f_{\tau}(\omega) \circ g(\cdot) \right\},$$

где $\Gamma(E) \subsetneq T$, $\Gamma(\,)$ - функция (10.20) из соответствия Галуа, порожденного отношением H_{α}. Тогда для i-го измерения должно выполняться:

$$\bigvee_{E_i^* \subseteq \Omega} \left\{ g(E_i^*) \wedge \int_{\psi_i(\Gamma(E_i^*)|\omega)} f_{\tau}(\omega) \circ g(\cdot) \right\} = \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega').$$

Подмножество $E_i^* \times \Gamma(E_i^*) \subsetneq \Omega \times \mathrm{T}$ моделирует отношение H_i на уровне $\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega') \in [01]$ в том смысле, что если $H_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')} = E_i^* \times \Gamma(E_i^*)$, то для i-го измерения приведенное выше условие выполняется. В силу леммы 10.2 $E_i^* \times \Gamma(E_i^*)$ - определяет наименьшее решение, в смысле вложенности. Однако, остается неизвестным из какого множества подмножеств множества Ω выбирать E, и какое окончательно отношение $H_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')}$ выбирать.

Возвратимся к условию регуляризации (13.18). Если выбрать $E_i^* = M_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')} = \left\{\omega \mid \mu_{\tau_i}^{вх}(\omega) \geq \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')\right\}$, то условие регуляризации будет выполняться. Тогда, остается определить такое подмножество $\Gamma(E_i^*)$ для которого условие для i'-го измерения будет выполняться. При выборе $E_i^* = M_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')}$ имеем $g(E_i^*) \geq \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')$.

Тогда можем записать:

$$\int_{\psi_i(\Gamma(E_i^*)|\omega)} f_{\tau}(\omega) \circ g = \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega') = \int_{\Omega} \left[f_{\tau}(\omega) \wedge \psi_i(\Gamma(E_i^*)|\omega \right] \circ g(\cdot).$$

Исходя из условия регуляризации (13.18) для выполнения приведенного равенства справедливо определить требование:

$$\forall\omega\in\Omega,\quad \omega\in\left\{\omega\middle| f_\tau(\omega)\geq\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')\right\},\quad \psi_i(\Gamma(E_i^*)|\,\omega)\geq\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega').$$

Таким образом, для i-го измерения вариант функции $h(\omega,\omega',t)$ при Фиксированной $\omega'\in\Omega$ и при выполнении условия регуляризации может определяться соотношением:

$$\hat{h}_{\omega'}^{i}(\omega,t)=\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')\wedge\chi_{H_i}(\omega,t),$$

где $H_i = M_{\mu'_{вых_i}(\omega')}\times\Gamma(M_{\mu'_{вых_i}(\omega')})$.

Тогда, согласно условия регуляризации (13.18) в качестве оценочного решения может быть принято решение.

$$\hat{h}_{\omega'}(\omega,t)=\bigvee_{i=1}^{N}\left[\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')\wedge\chi_{H_i}(\omega,t)\right].$$

Таким образом, теорема является доказанной.

Приведенная теорема позволяет определить алгоритм идентификации функции $h(\omega,\omega',t)$ в модели непрерывного НП. Алгоритм будет иметь следующий вид:

Алгоритм А3

1. Для фиксированного $\omega'\in\Omega$ определяется убывающая последовательность α-уровней по всем N измерениями $\mu_1\geq\mu_2\geq\ldots\geq\mu_i\geq\ldots\geq\mu_N$.

2. Определяется для i-го среза подмножество $E_i^* = M_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')}$ начиная $i = 1$.

3. Определяется подмножество $F_i^* = \Gamma(M_{\mu_{\tau_i}^{вых}(\omega')})$.

4. Строится решение

$$\hat{h}_i(\omega,t)=\mu_i\wedge\chi_{H_i}(\omega,t)=\mu_i\wedge\chi_{E^*_i\times F_i^*}(\omega,t).$$

Пункты 2-4 выполняются для всех $i=\overline{1,N}$.

5. Строится оценочное решение

$$\hat{h}_{\omega}(\omega t)=\bigvee_{i=1}^{N}\hat{h}_i(\omega t).$$

6. Пункты 1 -5 повторяются для всех $\omega' \in \Omega$ и восстанавливается общее решение $\hat{h}(\omega\omega' t)$ в качестве оператора вход-выход.

Приведенный алгоритм позволяет получить оценочное решение для построения модели НП. Наиболее трудоемким в реализации данного алгоритма является определение подмножества $F_i^* = \Gamma(E_i^*)$ при котором выполняется условие

$$\forall \omega \in \left\{ \omega' \mid f_\tau(\omega) \geq \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega') \right\}, \quad \psi_i(F_i^* \mid \omega) \geq \mu_{\tau_i}^{вых}(\omega').$$

Решение данной задачи не является единственным и здесь также необходимо вводить условие регуляризации. При этом целесообразно осуществлять поиск решения численными методами.

13.4. Оценка качества моделей нечетких процессов на основе нечетко-интегральных зависимостей

Проверка адекватности идентифицированной модели является принципиально важным при практическом использовании. Проблема заключается в том, что модель должна удовлетворять свойству "хорошего отображения". Практически это сводится к условию полного равенства функций распределения нечеткости выхода реальной системы и модели при любом входном воздействии. Ранее было отмечено, что задача идентификации модели НП является не регулярной. Условие же регуляризации чаще всего сводит задачу к поиску квазиоптимального решения. В этом случае оценка модели с точки зрения выполнения свойства "хорошего изображения" является необходимой.

Рассмотрим пространство состояний НДС Ω. Множество всех нечетких состояний для НДС обозначим F(Ω). На пространстве F(Ω) для каждой его точки (нечеткому состоянию НДС) соответствующей истинному выходу нечеткой системы реализуется нечеткое состояние (точка из F(Ω)) модели НП. Модель обладает свойством "хорошего отображения" если в каждой точке F(Ω) истинного НП наблюдается полное равенство с моделью НП. В общем случае, когда не все состояния совпадают можно говорить о мере (степени) выполнения свойства "хорошего отображения". Чем выше значение меры, тем более адекватно представляется истинный НП своей моделью. Данная мера должна характеризовать степень удовлетворения свойства:

"динамика НП во всех точках F(Ω) хорошо представляется моделью НП".

Однако, проверка выполнения свойства "хорошего отображения" во всех точках F(Ω) затруднительно по той причине, что реальная информация о состоянии НП ограничивается лишь счетным количеством измерений *N*. При этом выполнение свойства "хорошего отображения" может быть рассмотрено лишь "локально" по i-й точке пространства F(Ω). Общее свойство "хорошего отображения" для всего F(Ω) не может быть выведено из простого линейного объединения частных (местных) оценок модели. Для общей оценки целесообразно использовать понятие нечеткой меры измеряющей степень адекватности модели.

Если состояние истинного НП описывается функцией $\mu^{u}(\omega) \in F(\Omega)$, а выход модели $\mu^{M}(\omega) \in F(\Omega)$ в *i*-е измерение, то может быть определена мера соответствия $\mu^{M}(\omega)$ истинному состоянию НП. При этом для оптимистической точки зрения степень соответствия $\upsilon\ (\mu^{u}\ ,\ \mu^{M})$ определяется мерой возможности:

$$\upsilon(\mu^{u}, \mu^{M}) = \sup_{\omega\in\Omega} \min\left\{\mu^{u}(\omega), \mu^{M}(\omega)\right\}, \qquad (13.21)$$

при пессимистической - мерой необходимости:

$$\upsilon(\mu^{u}, \mu^{u}) = \inf_{\omega\in\Omega} \max\left\{\mu^{M}(\omega),\ 1-\mu^{u}(\omega)\right\}. \qquad (13.22)$$

Если на пространстве Ω задано ограничение в виде распределения нечеткой меры g: $2^{\Omega} \rightarrow [01]$, то оно может быть продолжено на пространстве F(Ω) с помощью понятия расширенной нечеткой меры рассмотренной в пункте 9.3. Тогда важность выполнения адекватности модели в точке $\mu^{u}(\omega) \in F(\Omega)$ определяется как:

$$\tilde{g}(\mu^{u}) = \int_{\Omega} \mu^{u}(\omega) \circ g(\cdot) \cdot \qquad (13.23)$$

Для подмножества точек пространства F(Ω) $A = \left\{\mu_{i}^{u}(\omega)\right\} \subseteq F(\Omega)$

мера будет определяться как

$$\int_{\Omega} \bigvee_{\mu_{i}^{u}(\omega)\in A} \mu_{i}^{u}(\omega) \circ g(\cdot) = g(A). \qquad (13.24)$$

Используя эти соотношения адекватность *J* модели может быть определена через нечеткий интеграл вида:

$$J = \int_{\{i|i=1\ N\}} \upsilon(\mu_{i}^{u}, \mu_{i}^{M}) \circ \tilde{g}(\cdot) = \sup_{\alpha\in[01]}\left\{\alpha \wedge \int_{\Omega} \bigvee_{\mu^{u}\in A} \mu_{i}^{u}(\omega) \circ g\right\}, \qquad (13.25)$$

где $A = \{ \mu_t^{u}(\omega) | \upsilon(\mu_t^{u}, \mu_t^{v}) \geq \alpha \}$.

Величина *J* определяет степень выполнения свойства "хорошего отображения" для модели НП учитывая нелинейность оценки адекватности модели НП на пространстве состояний Ω.

13.5. Декомпозиция моделей многомерных нечетких процессов. Векторно-матричные нечетко-дифференциальные уравнения многомерных нечетких процессов

До настоящего времени мы рассматривали нечеткие процессы на унарном пространстве Ω . В том случае, когда пространство состояний НДС описывается как декартово произведение пространств, на которых заданы значения компонент вектора состояния, возникают сложности не только с представлением моделей НП, но и принципиальные сложности при идентификации модели, моделирование НДС в реальных вычислительных системах, устройствах и т. д.

Кроме того, в некоторых случаях возникают трудности с физической реализацией вычислительных процедур, использующих модели многомерных НП. В этой связи возникает проблема декомпозиции моделей многомерных НП, решение которой в свою очередь, открывает новые возможности анализа сложных систем, их синтез.

Запишем нечетко-интегральное уравнение многомерного НП в виде

$$\mu_\tau(\omega_1 \ldots \omega_n) = \int\limits_{1}\left[\int\limits_{\mu_t(\omega \ldots \omega)} h(\omega_1 \ldots \omega_n, \omega_1' \ldots \omega_t', t) \circ \left\langle g_{\Omega} \times \ldots \times g_{\Omega} \right\rangle\right] \circ \tilde{g}_{f(\omega)}(), \tag{13. 26}$$

где $\mu_\tau(\omega_1 \ldots \omega_n) : \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n \to [01]$ - многомерное нечеткое состояние НП, $\left\langle g_{\Omega_1} \times \ldots \times g_{\Omega} \right\rangle$- декартово произведение нечетких мер, $\tilde{g}_{f_\tau(\omega)}()$ - расширенная нечеткая мера порожденная процессом $f_\tau(\omega)$ на пространстве Ω, которое может совпадать с Ω_i, $i = \overline{1, n}$ или любым его подмножеством. При этом

$$\tilde{g}_{f_t(\omega)}(\cdot) = \int\limits_{\psi_t(\cdot|\omega)} f_\tau(\omega) \circ g(\cdot).$$

Отметим, что размерность нечеткого отношения h(·) в случае, когда $\dim[\Omega_i] = q_i$, $i = \overline{1, n}$, Ω_i - дискретное, составляет величину равную:

$$\dim[h(\cdot)] = \left[\prod_{i=1}^{n} q_i\right]^2 + 1 \cdot \qquad (13.27)$$

При значительном увеличении размерности модели моделирование отношения h(·) становится проблематичным. Однако, модель (13.26) может быть декомпозирована.

Прежде чем мы перейдем к рассмотрению основной теоремы о декомпозиции рассмотрим ряд вспомогательных положений и утверждений. Пусть имеем нечеткое отношение $h(\omega_1 \dots \omega_n)$ заданное на декартовом произведении $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

Определение 13.1.

Проекцией нечеткого отношения $h(\omega_1 \dots \omega_n)$ на множество Ω_1, $i = \overline{1, n}$ называется функция вида:

$$proj_i\ h(\omega_1 \dots \omega_n) = \sup_{\omega_1} \dots \sup_{\omega_{i-1}} \sup_{\omega_{i+1}} \dots \sup_{\omega_n} h(\omega_1 \dots \omega_n) \cdot$$

Если имеем некоторую функцию $\mu(\omega_i) \in F(\Omega_i)$, $i = \overline{1, n}$, то ее можно расширить на универсум $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$.

Определение 13.2.

Цилиндрическим продолжением нечеткого множества $\mu(\omega_i)$ на универсум $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ называется нечеткое множество определенное в виде:

$$\forall\ \omega_i,\ i = \overline{1, n}\ C_{1 \dots i-1, i+1 \dots n}(\mu(\omega_i))(\omega_1 \dots \omega_n) = \mu(\omega_i), \qquad (13.29)$$

Справедливы следующие положения. Декартово произведение нечетких множеств $\mu(\omega_1)$ ... $\mu(\omega_n)$ может быть представлено через цилиндрические продолжения этих множеств на $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ в следующем виде:

$$\mu(\omega_i) \times \dots \times \mu(\omega_n) = \bigcap_{i=1}^{n} C_{1 \dots i-1, i+1 \dots n}(\mu(\omega_i)). \qquad (13.30)$$

Кроме этого справедливо следующее соотношение:

$$h(\omega_1 \dots \omega_n) \subseteq \mathop{\times}_{i=1}^{n} proj_i\ (h(\omega_1 \dots \omega_n)). \qquad (13.31)$$

Вложенность понимается в смысле вложенности нечетких множеств. Исходя из определения проекции и цилиндрического продолжения нечеткого отношения оказываются очевидными следующие соотношения:

$$h(\omega_1 ... \omega_n) \le C_{1...i-1,i+1...n}\ (proj_i\ (h(\omega_1 ... \omega_n))) \quad (13.32)$$

$$h(\omega_1 ... \omega_n) \le \bigcap_{i=1}^{n} C_{1...i-1,i+1...n} \left[proj_i\ (h(\omega_1 ... \omega_n))\right]. \quad (13.33)$$

Пусть $h(\omega_1,\omega_2)$ и $\mu(\omega_1,\omega_2)$ - бинарные нечеткие отношения. Докажем следующую лемму для проекций нечетких отношений.

Лемма 13.2.

Для проекций нечетких отношений $h(\omega_1,\omega_2)$ и $\mu(\omega_1,\omega_2)$ справедливо соотношение:

$$\forall j \ne i,\ i = 1,2 \quad proj_i(h(\omega_1,\omega_2) \wedge \mu(\omega_1,\omega_2)) \le$$
$$\le proj_i\ h(\omega_1,\omega_2) \wedge proj_i\ \mu(\omega_1,\omega_2). \quad (13.34)$$

Доказательство.

Согласно определения 13.1 справедливо соотношение:

$$\forall\ j \ne i,\ proj_i\ h(\cdot) \ge h(\omega_i,\omega_j), \quad proj_i\mu(\cdot) \ge \mu(\omega_i,\omega_j).$$

Согласно (13.32) имеем:

$$proj_i\ h(\omega_1,,\omega_2) \wedge proj_i\ \mu(\omega_1,\omega_2) = proj_i\left[C_j[proj_i h(\cdot)] \wedge C_j[proj_i \mu(\cdot)]\right].$$

Однако в силу (13.33) можем записать:

$$C_j[proj_i h(\cdot)] \wedge C_j[proj_i \mu(\cdot)] \ge h(\omega_1,\omega_2) \wedge \mu(\omega_1,\omega_2).$$

Тогда, в силу определения 13.1 справедливо:

$$proj_i\left[C_j[proj_i h(\cdot)] \wedge C_j[proj_i \mu(\cdot)]\right] \ge proj_i\left[h(\omega_1,\omega_2) \wedge \mu(\omega_1,\omega_2)\right].$$

Таким образом, исходя из выше отмеченного получаем, что отношение (13.34) справедливо, что и требовалось доказать.

Учитывая сделанные выше замечания и введенные определения, положения можем отметить, что многомерное нечеткое состояние НДС можем оценивать в качестве вектора $M^{\tau}(\mu(\omega)) = \left[\mu(\omega_1)\,\mu(\omega_2)\ldots\mu(\omega_n)\right]^T$, элементами которого являются нечеткие множества, заданные на унарных универсумах Ω_i, $i = \overline{1,n}$. При этом, если $\forall\ i = \overline{1,n}\quad \mu(\omega_i) = proj_i\ \mu^*(\omega_1 \ldots \omega_n)$, то имеем оценочное решение вида:

$$\bar{\mu}(\omega_1 \ldots \omega_n) = \bigcap_{i=1}^{n} C_{1...i-1,i+1\ ...n}(\mu(\omega_i)) \ge \mu^*(\omega_{1...}\omega_n),$$

Его можно использовать при описании состояния многомерного НП в качестве наибольшего оценочного решения.Рассмотрим теорему о декомпозиции модели многомерного НП.

Теорема 13.3

Модель НП (13.26) может быть представлена в виде:

$$
\begin{aligned}
&\mu(\omega_1)=\int_T\left\{\int_{\mu(\omega_1')} h(\omega_1\omega_1' t)\circ g_1(\cdot)\wedge\ldots\wedge\int_{\mu(\omega_n)} h(\omega_1\omega_n t)\circ g_n\right\}\circ\tilde{g}_{f_t(\omega)}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\mu(\omega_n)=\int_T\left\{\int_{\mu(\omega_1)} h(\omega_n\omega_1 t)\circ g_1\wedge\ldots\wedge\int_{\mu(\omega_n')} h(\omega_n\omega_n' t)\circ g_n\right\}\circ\tilde{g}_{f_t(\omega)}(\cdot)
\end{aligned}
\qquad (13.35)
$$

Доказательство.
Рассмотрим внутренний интеграл в соотношении (13.26):

$$
\int_{\mu_T(\omega_n'\ldots\omega_n')} h(\omega_1\ldots\omega_n,\omega_1'\ldots\omega_n,t)\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle=
$$

$$
=\int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n}\left[h(\omega_1\ldots\omega_n,\omega_1'\ldots\omega_n,t)\wedge C_{\omega_1\ldots\omega_n,t}\left[\mu_T(\omega_1'\ldots\omega_n')\right]\right]\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle.
$$

Обозначим подынтегральное соотношение в виде функции $\tilde{h}(\omega_1\ldots\omega_n,\omega_1'\ldots\omega_n',t)$. Используя условие (13.32) и свойство нечеткого интеграла (13.17) можем записать:

$$
\int_{\Omega\times\ldots\times\Omega}\tilde{h}(\omega_1\ldots\omega_n,\omega_1'\ldots\omega_n',t)\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle\leq\int_{\Omega\times\ldots\times\Omega}\bigwedge_{i=1}^{n} C_{1\ldots i-1,i+1,\ldots n}\left[proj_{\Omega_i'}(\tilde{h}(\cdot))\right]\circ
$$

$$
\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle\leq\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\Omega\times\ldots\times\Omega} C_{1\ldots i-1,i+1,\ldots n}\left[proj_{\Omega_i'}(\tilde{h}(\cdot))\right]\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle.
$$

Это условие справедливо для любого фиксированного набора $\omega_1,\ldots,\omega_n,t$. Рассмотрим более подробно i-й интеграл. Можем записать:

$$
\int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n} C_{1\ldots i-1,i+1,\ldots n}\left[proj_{\Omega_i'}\circ(\tilde{h}(\cdot))\right]\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle=
$$

$$
=\int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{i-1}\times\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n}\left[\int_{\Omega_i} C_{1\ldots i-1,i+1,\ldots n}\left[proj_{\Omega_i'}\tilde{h}(\cdot)\right]\circ g_i\right]\circ
$$

$$
\circ\langle g_1\times\ldots\times g_{i-1}\times g_{i+1}\times\ldots\times g_n\rangle
$$

Пусть интеграл в квадратных скобках принимает значение $\alpha\in[01]$. При $\forall j\neq i$ подынтегральная функция является константой и согласно (9.11) можем записать:

$$
\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n} C_{1\ldots i-1,i+1,\ldots n}\left[proj_{\Omega_i'}\tilde{h}(\cdot)\right]\circ\langle g_1\times\ldots\times g_n\rangle=\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\Omega_i} proj_{\Omega_i'}\tilde{h}(\cdot)\circ g_i.
$$

Учитывая соотношение (13.34), доказанное в лемме 13.2. можем записать следующее неравенство:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\Omega_i} proj_{\Omega_i'}\tilde{h}(\cdot)\circ g_i \le \bigwedge_{i=1}^{n}\int_{proj_i\mu_\tau(\omega_1...\omega_n)} h(\cdot)\circ g_i =$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i)} \Pr oj_{\Omega_i'}h(\omega_1...\omega_n\omega_1'...\omega_n',t)\circ g_i.$$

Напомним, что проекция $\mathrm{proj}_{\Omega'i}$, бралась из учета фиксированного набора $\omega_1...\omega_n$, t. Исходя из приведенного выше можем записать:

$$\mu_\tau(\omega_1...\omega_n) \le \int_T \left[\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i)} proj_{\Omega_i'}h(\omega_1...\omega_n,\omega_1'...\omega_n',t)\circ g_i\right]\circ g_{f_\tau(\omega)}(\cdot).$$

Рассмотрим проекции состояния многомерного нечеткого процесса. Согласно определения 13.1. справедливо:

$$\mu_\tau(\omega_j) = proj_j\mu_\tau(\omega_1...\omega_n) \le proj_{\Omega_j}\left\{\int_T \left[\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i)} proj_{\Omega_i'}h(\cdot)\circ g_i\right]\circ g_{f_\tau(\omega)}.\right.$$

Согласно свойства (9.22) можем записать:

$$\mu_\tau(\omega_j) \le \int_T proj_{\Omega_j}\left[\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i)} proj_{\Omega_i'}h(\cdot)\circ g_i\right]\circ g_{f_\tau(\omega)}(\cdot).$$

Исходя из леммы (13.34) данное соотношение в виде:

$$\mu_\tau(\omega_j) \le \int_T \left[\bigwedge_{i=1}^{n} proj_{\Omega_j}\int_{\mu_\tau(\omega_i')} proj_{\Omega_i'}h(\cdot)\circ g_i\right]\circ g_{f_\tau(\omega)}(\cdot) =$$

$$= \int_T \left[\bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i')} proj_{\Omega_j} proj_{\Omega_i'}h(\cdot)\circ g_i\right]\circ g_{f_\tau(\omega)}(\cdot) =$$

$$= \int_T \bigwedge_{i=1}^{n}\int_{\mu_\tau(\omega_i')} h(\omega_j\omega_i't)\circ g_i\circ g_{f_\tau(\omega)}(\cdot).$$

Таким образом, $\forall\, j\in\overline{1,n}$ мы получаем соотношение (13.35) при условии принятия максимизирующего решения. Что и требовалось доказать.

Таким образом, приведенная выше теорема позволяет осуществить декомпозицию модели многомерного нечеткого процесса. При этом модель, декомпозированная в соответствии с приведенными соотношениями, приводится к композиции бинарных моделей по каждому входу и каждому выходу. Из доказательства теоремы очевидно то, что разрыв связей между отдельными компонентами вектора состояния (исключения отдельных перекрестных связей, представляющихся тернарными и более нечеткими отношениями) приводит к огрублению модели. Это подтверждается наличием нестрогого неравенства. Очевидно, что с физической точки зрения это естественный, объективно существующий факт. При этом, если "разрывается" значимая для сущности процесса связь между компонентами, различие между исходным выходом модели и его аппроксимацией после декомпозиции будет больше, чем в случае "разрыва" менее значимой связи. Этот факт подтверждается в результатах исследования в области системного анализа Дж. Клира по реконструктивному преобразованию систем.

Оценка искажений модели в результате реконструкции (разрыва ютдельных связей) целесообразно оценивать используя понятие информационного расстояния.

Пусть $h(\omega_1...\omega_n,\omega'_1...\omega'_n)$ исходное нечеткое отношение, описывающее преобразование состояние НДС. Если в результате декомпозиции мы получим множество подсистем $h_{i,}(\cdot)$, то объединение их цилиндрических продолжений на все пространство $\Omega_1\times..\times\Omega_n\times\Omega_1'\times..\times\Omega_n'\times T$ даст нам оценку нечеткого отношения системы $\hat{h}(\omega_1...\omega_n,\omega'_1...\omega'_n,t)$. Для оценки качества декомпозиции системы информационное расстояние $D(h,\hat{h})$ определяется соотношением:

$$D(h,\hat{h})=\frac{1}{\log_2|C|}\int_0^1\log_2\frac{|c(\hat{h},\alpha)|}{|c(h,\alpha)|}\,d\alpha\cdot \qquad (13.36)$$

где $c(\hat{h},\alpha)$- множество α-уровня функции $\hat{h}(\cdot),|C|$ - мощность пространства $\Omega_1\times...\times\Omega_n\times\Omega_1'\times...\times\Omega_n'\times T$.

Очевидно, если $l=\overline{1,n}$ множество шагов, "разрыва связей" в системе, то на *i*-м шаге можно разорвать различные, ранее не разорванные связи. Если обозначить X_l - множество всех вариантов разрыва на каждом *l*-м уровне декомпозиции и определить

$$D_l(\hat{h},h)=\min_{\lambda_l}D_{\tau_l}(\hat{h},h), \qquad (13.37)$$

где

$D_{\lambda_l}(\hat{h},h)$ - информационное расстояние для X_l - варианта декомпозициина *l*-м уровне, то для конкретной системы функция $D_l(\hat{h},h)$ будет не убывающей (рис.13.4). Выбрав уровень адекватности в виде порога $\delta\in[0 1]$ в качестве наилучшего варианта декомпозиции системы целесообразно выбрать $\hat{h}(\cdot)$ для которой выполняется:

$$\hat{h}^{*}(\cdot)=\arg\max\left\{D_{l}(\hat{h},h)\middle| D_{l}(\hat{h},h)\leq\delta\right\}. \qquad (13.38)$$

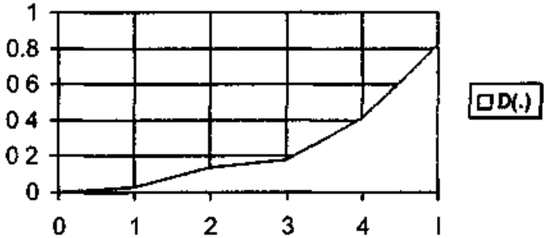


Рис. 13.4. Зависимость $D_{x_l}(\hat{h},h)$.

Приведенное соотношение позволяет выбрать приемлемый вариант декомпозиции модели многомерного НП. В том случае, когда декомпозиция осуществляется до уровня представления системы в виде набора бинарных соотношений мы можем упростить исходную запись уравнений модели используя векторно-матричную запись нечетко-интегральных и дифференциальных уравнений. Если состояние НДС описать нечетким вектором $M^{T}(\omega)=[\mu(\omega_1),\ \mu(\omega_2),\ \ldots,\ \mu(\omega_n)]^{T}$, то уравнение модели примет вид:

$$M_{t}(\omega)=\int_{T}\left[\int_{M_{t}(\omega)}H(\omega,\omega',t)\circ G(\cdot)\right]\circ\tilde{g}_{f_{t}(\omega)}(\cdot), \qquad (13.39)$$

где $G^{T}(\cdot)=[\,g_1(\ ),\ g_2(\ ),\ \ldots,\ g_n(\cdot)]^{T}$ - вектор нечетких мер,

$$H(\omega,\omega',t)=\begin{Vmatrix} h(\omega_1,\omega_1',t) & h(\omega_1,\omega_2',t) & \cdots & h(\omega_1,\omega_n',t)\\ h(\omega_2,\omega_1',t) & h(\omega_2,\omega_2',t) & \cdots & h(\omega_2,\omega_n',t)\\ \vdots & & & \vdots\\ h(\omega_n,\omega_1',t) & h(\omega_n,\omega_2',t) & \cdots & h(\omega_n,\omega_n',t)\end{Vmatrix}$$

матричная функция системы.

Используя символьную запись для нечетко-дифференциальных уравнений можем записать:

$$fd\,M(\omega)=H(\omega,t)\,fd\,f_{T}(\cdot), \qquad (13.40)$$

где $H(\omega,t)$ - матричная функция преобразования состояния системы после учета текущего состояния (с учетом начальных условий). Введеное понятие векторно-матричных нечетко-интегральных и дифференциальных уравнений для описания моделей многомерных НП позволяет упростить аналитическую запись математических моделей сложных процессов и сократить вычислительные затраты при реализации алгоритмов в системах поддержки принятия решении.

14. ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЧЕТКИХ ПРОЦЕССОВ И ВЫБОР РЕШЕНИЙ

14.1 Задача оптимизации нечетких процессов

В данной главе рассмотрение задачи оптимизации начнем со случая, когда модель НП на пространстве Ω описывается нечетко-дифференциальным уравнением вида:

$$fd\,\mu(\omega)=\left[h(\omega\,u\,t)\wedge\bar{c}(\omega\,u\,t)\right]fd\,f_\tau''(\omega), \quad (14.1)$$

где $c(\omega,u,t)=c(u,t), \forall\,\omega\in\Omega$ - нечеткая функция управления, заданная на пространстве U - значений управляющего воздействия $(u\in U)$, $h(\omega,u,t)$ - оператор управляемой НДС, $f_\tau''(\omega)$ - НП на Ω, определяющий нечеткость процесса по времени для управляемой НДС, задаваемый соотношением (11.23).

Будем считать, что эффективность управления НДС определяется по множеству критериев $\Theta\{v\}$ на котором задана нечеткая мера важности этих критериев $g_\Theta(\,): 2^\Theta\to[0\,1]$. В общем случае, потери по каждому из показателей $v\in\Theta$ зависят от выбора управления $u\in U$, в конкретный момент времени в конкретном состоянии НДС. Обозначим через функцию $l(v,u)$: $\Theta\times U\to[0\,1]$ потери по показателям $v\in\Theta$ при выборе управления $u\in U$.

В общем случае управление $u\in U$, как было отмечено выше, определяется в виде функции $u(t,\omega)$. Нечеткое отношение $l(\omega,u)$ можно понимать как распределение меры возможности потерь по $v\in\Theta$ при выборе управления $u\in U$ Для меры возможности дополнение.

$$l'(v,u)=1-l(v,u) \quad \textbf{(14.2)}$$

будет определять меру выгодности выбора управления $u\in U$ для критерия $v\in\Theta$. Согласно свойств распределения меры возможности, максимально возможная выгодность по критерию $v\in\Theta$

при выборе управления из подмножества $E \subsetneq U$ будет определяться соотношением:

$$j = \max_{u \in I}\left[1 - l(v,u)\right].$$

(14.3)

В соответствии с этим минимально возможные потери *v* будут вычисляться согласно выражения

$$\upsilon \approx 1 - j = 1 - \max_{u \in E}\left[1 - l(v,u)\right] = 1 - \max_{u \in E}\left[\chi_E(v,u) \wedge (1 - l(v,u))\right],$$

(14.4)

где $\forall\, v,\ \overline{\chi}_E(v,u) = \chi_E(u)$- характеристическая функция множества E$\subseteq$ U. Минимально возможные потери при выборе управления из нечеткого подмножества $\varphi(u)\quad U \to [01]$, будут соответственно определяться соотношением

$$\upsilon(v) = 1 - \max_{u \in E}\left[\varphi(u) \wedge (1 - l(v,u))\right]. \quad (14\ 5)$$

В основу формирования управляющих воздействий для НДС положим принцип оптимальности, который кратко можно сформулировать в виде:

> следует искать всегда оптимальное продолжение процесса относительно того состояния, которое достигнуто в данный момент.

Как известно данный принцип оптимальности был предложен Р. Беллманом. На его базе им был построен метод динамического программирования, который может быть эффективно применен для широкого круга систем (не только описываемых дифференциальными уравнениями).

НДС (14 1) будем рассматривать на некотором нечетком интервале времени $\Gamma(t)\quad T \to [01]$. Так как функция $l'(v,u)$ определяет выигрыш по критерию $v \in \Theta$, то по всем критериям выигрыш будет определяться зависимостью

$$l'_\Theta(u) = \int_\Theta l'(v,u) \circ g_\Theta(\ ) \quad (14.\ 6)$$

в текущий момент времени. Исходя из (14. 6) и нечетко-интегрального управления для представления НП (11. 18) интегральный выигрыш будет определяться функционалом

$$J = \int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\psi_t(\,|\omega)} f_\Gamma(\omega) \circ g(\ ), \quad \textbf{(14. 7)}$$

где $g(\ )\quad 2^\Omega \to [0,1],\ f_\Gamma\ \ \Omega \to [01]$ - нечеткий процесс на Ω задающий временную нечеткость динамики НДС.

Таким образом, далее будем рассматривать для объекта (14. 1) задачу формирования оптимального, в смысле максимизации функционала (14. 7), управления в соответствии с принятым принципом оптимальности Беллмана.

14.2. Метод нечеткого динамического программирования для формирования управления непрерывными НДС

Прежде чем мы непосредственно приступим к рассмотрению метода нечеткого динамического программирования (НДП) сделаем ряд вспомогательных замечаний касающихся НП $f_t(\omega)$. Формально функция $f_\tau(\omega)$, соответствующая нечеткому интервалу $\tau(t)$: $T \to [01]$ может быть представлена согласно определения.

Определение 14.1.

Нечетким моментом остановки, соответствующим нечеткому интервалу *τ(t),* который определяет временной отрезок [0, ρ], где ρ- нечеткое положительное действительное число (определение 11.4) называется нечеткое множество $f_\tau(\omega)$, удовлетворяющее условию:

$$f_\tau(\omega) = \vee_t \left\{ f_t(\omega) \middle| \int_{\Psi(A|\omega)} f_t(\omega) \circ g \le \int_A \tau(t) \circ F_t(\cdot),\ A \subseteq T \right\}.$$

(14.8)

Как видно из определения функция $f_\tau(\omega)$ задает некоторую алгебру нечетких множеств $f_i(\omega)$ относительно операции взятия максимума. Согласно определения 14.1. функция $f_\tau(\omega)$ является изоморфной нечеткому интервалу τ(*t*), который ограничен нечеткими действительными числами 0 и ρ. В том случае, когда нам необходимо определить произвольный нечеткий временной интервал
$[\rho_0, \rho]$

Будем пользоваться следующим определением.

Определение 14.2.

Произвольный нечеткий временной интервал определяется двумя нечеткими моментами остановки $f_{\tau 0}(\omega)$ и $f_\tau(\omega)$ согласно условия:

$$f_{[\rho_0,\rho]}(\omega)=\vee_j\Big\{f_j(\omega)\,\Big|\,f_j(\omega)\supseteq f_i(\omega),A\subseteq T,$$

$$\int_A\tau_0\circ F_i(\cdot)=\int_{\Psi(A|\omega)}f_{\tau_0}(\omega)\circ g\le\int_{\Psi(A|\omega)}\Big[f_{\tau_0}(\omega)\vee f_j(\omega)\Big]_i\circ g\le \qquad (14.9)$$

$$\le\int_{\Psi(A|\omega)}f_\tau(\omega)\circ g=\int_A\tau_0\circ F_i(\cdot)\Big\}.$$

(Индекс *i* соответствует нечетким множествам из определения 14.1). Согласно определения и соотношения (14.9) можно сделать вывод, что функция $f_{[\rho 0,\ \rho]}(\omega)$ задает подалгебру в алгебре определенной функцией $f_\tau(\omega)$. С учетом рассмотренных определений перейдем к выводу функционального уравнения для определения оптимального управления НДС.

Пусть динамика НДС рассматривалась на нечетком интервале $\tau=[\rho_0,\rho_к]$. Тогда функциональное уравнение для определения оптимального в смысле максимизации критерия (14.7) управления может быть записано в виде:

$$J^*(u^*)=\max_{u\in U}J(u(\rho_,)), \qquad (14.10)$$

где $\rho_i\in[\rho_0,\rho_к]$. Для определения оптимального управления, удовлетворяющего (14.10) рассмотрим следующую теорему.

Теорема 14.1

Оптимальное в смысле максимизации критерия (14.7) управление находится из функционального неравенства вида:

$$J^*(u^*)\ge\max_{u\in U}\int_\Theta l'(u\,v)\circ g_\Theta(\cdot) \qquad (14.11)$$

(Аналог уравнения Беллмана).

Доказательство.

Рассмотрим функциональное уравнение (14.10). В соответствии с определением 14.1. выражение для критерия *J* примет вид:

$$J(u)=\max_{u\in U}\int_T l'_\Theta(u)\circ\int_{\Psi(\ |\omega)}f_\tau(\omega)\circ g(\cdot)=\int_T l'_\Theta(u)\circ\int_{\Psi(\ |\omega)}\Big\{\vee_i f_i(\omega)\Big\}\circ g(\cdot).$$

Будем рассматривать НДС на интервале $[\rho_i,\ \ \rho_к]$. Согласно приведенного ранее принципа оптимальности на данном интервале для оптимального управления реализуется функционал $J\ \ (u^*)$, который задается соотношением:

$$J(u^*)=\max_{u\in U}\int_T l'_\Theta(u)\circ\int_{\Psi(\ |\omega)}f_{[\rho_i,\rho_k]}g(\cdot).$$

Допустим, что на нечетком интервале $[\rho_i+\Delta\rho,\ \rho_к]$ согласно принципа

оптимальности реализовалось оптимальное управление $u^* \in U$.
Тогда согласно определения 14.2 и свойств нечеткого интеграла можем записать:

$$J(u^*) = \max_{u \in U} \int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_k]}(\omega) \circ g(\cdot) =$$

$$= \max_{u \in U} \int_T l'_\Theta(u) \circ \left\{ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g(\cdot) \vee \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i+\Delta\rho,\rho_k]}(\omega) \circ g(\cdot) \right\} =$$

$$= \max_{u \in U} \left[\int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g \vee \int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i+\Delta\rho,\rho_k]}(\omega) \circ g(\cdot) \right]$$

Согласно определения 14.2 при $\Delta\rho \to 0$ функция $f_{[\rho_i+\Delta\rho,\rho_k]} \to f_{[\rho_i\rho_k]}$.

При этом второй интеграл, в случае реализации принципа оптимальности, является величиной не зависящий от $u \in U$ на интервале $[\rho_i + \Delta\rho, \ \rho_k]$ и может быть вынесен за пределы операции максимизации по u ($\max_{u \in U}$), то есть:

$$J_{[\rho_i,\rho_k]}(u^*) \geq \max_{u \in U} \left[\int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g \right] \vee J_{[\rho_i+\Delta\rho,\rho_k]}(u^*).$$

С учетом малости $\Delta\rho$ можем записать:

$$J(u^*) \geq \max_{u \in U} \int_T l'_\Theta(u) \circ \int_{\Psi(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g(\cdot).$$

Используя соотношение (14.6) и теорему Суджено-Фубини (10.1) можем записать:

$$J(u^*) \geq \max_{u \in U} \left\{ \int_\Theta \left[\int_T l'(u_t, v) \circ \int_{\Psi_t(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g(\cdot) \right] \circ g_\Theta \right\}.$$

Обозначим выигрыш на интервале
$[\rho_i \ +\Delta\rho, \ \ \rho_k]$

как $l'(u,v)$ определяемый как:

$$l'(u,v) = \int_T l'(u_t, v) \circ \int_{\Psi_t(\,|\omega)} f_{[\rho_i,\rho_i+\Delta\rho]}(\omega) \circ g(\cdot).$$

Тогда функциональное неравенство для определения оптимального управления примет вид:

$$J(u^*) \geq \max_{u \in U} \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta.$$

Что и требовалось доказать.
Рассмотренное в теореме 14.1 функциональное неравенство играет роль уравнения Беллмана для метода нечеткого динамического программирования (НДП) для непрерывных НДС.
Далее рассмотрим решение неравенства (14.11) (уравнения Беллмана) для НДС в том случае, когда функционал *J* (14.7) зависит от выбираемого управления $u_t \in U$, которое, в свою очередь, не зависит от состояния $\omega \in \Omega$ НДС. Данный случай можно рассматривать как вариант формирования "программного" управления.

Теорема 14.2

Оптимальное нечеткое управление $\mu^*(u)$ для НДС (14.1) в смысле максимума функционала (14.7), не зависящего от состояния НДС может определяться нечетко-интегральным уравнением вида:

$$\mu^*(u) = \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta. \tag{14.12}$$

Доказательство.

Оптимальное управление в данной теореме будем искать в классе нечетких управлений $\mu(u)$: $U \to [01]$. В силу справедливости выражения (14.11) и используя выражение (14.5) можем записать:

$$J(\mu^*(u)) = \int_\Theta \max_{u \in U}\left[\mu^*(u) \wedge l'(u,v)\right] \circ g_\Theta \geq \max_{u \in U} \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta.$$

В силу того, что справедливо неравенство

$$\forall\, v \in \Theta,\quad \max_{u \in U} \mu^*(u) \geq \max_{u \in U}\left[\mu^*(u) \wedge l'(u,v)\right],$$

и согласно (9.17) можем записать:

$$\int_\Theta \max_{u \in U} \mu^*(u) \circ g_\Theta \geq \int_\Theta \max_{u \in U}\left[\mu^*(u) \wedge l'(u,v)\right] \circ g_\Theta.$$

Исходя из данного неравенства с учетом выражения для $J(\mu^*(u))$ справедливо следующее соотношение:

$$\int_\Theta \max_{u \in U} \mu^*(u) \circ g_\Theta \geq \max_{u \in U} \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta.$$

Или, так как в левой части неравенства подынтегральное уравнение не зависит от $v \in \Theta$, имеем:

$$\max_{u \in U} \mu^*(u) \geq \max_{u \in U} \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta.$$

В случае $\mu^*(u) = \int_\Theta l'(u,v) \circ g_\Theta$ неравенство выполняется, а также выполняется и условие (14.11). Следовательно выражение (14.12) является вариантом решения неравенства (14.11) и определяет оптимальное управление, в смысле максимизации (14.7). Теорема доказана

Следует отметить, что функцию выигрыша *l'(u,v)* можно рассматривать как нечеткий аналог функции Беллмана.
Теперь рассмотрим более сложный случай, когда управление зависит не только от времени t $\in$ T, но и от состояния НДС $\omega \in \Omega$. Обозначим как $S_t(\omega): U \times \Omega \to [01]$ - нечеткую стратегию управления в момент t$\in$ T.
Пусть для каждого из критериев v$\in$ Θ нечеткий выигрыш зависит от состояния $\omega \in \Omega$. Нечеткий выигрыш при выборе стратегии $S_t(\omega)$ будет определяться нечетким отношением:

$$l(v,\ S_t(\omega)) : \Theta \times (U \times \Omega) \to [01].$$

Тогда справедлива следующая теорема.
Теорема 14.3.
Если для НДС (14.1) нечеткое управление *u* зависит от состояния $\omega \in \Omega$, то оптимальное нечеткое управление $\varphi^*(u)$, в смысле максимизации критерия (14.7) (с учетом зависимости управления от ω) определяется соотношением.

$$\varphi^*_\tau(u) = \int\limits_{\mu_\tau(\omega)} b(u,\omega) \circ g(\cdot), \qquad (14.13)$$

где $\mu_t(\omega)$ - текущее состояние НДС, а $b(u,\omega)$ нечеткое отношение определяемое как:

$$b(u,\omega) = \int\limits_{\Theta} [1 - l(u,v)] \circ \sigma_\Theta(\cdot|\omega), \qquad (14.14)$$

$\sigma_\Theta(\cdot|\omega)$ - условная нечеткая мера определяющая важность критериев v $\in \Theta$ в состоянии $\omega \in \Omega$.
Доказательство.
Определим нечеткий выигрыш $l'(v,\ S)$с учетом состояния НДС:

$$l'(v,S) = \int\limits_{\Omega} l'(v,S(\omega)) \circ \sigma_\omega(\cdot|v) \cdot \qquad (14.15)$$

Условная нечеткая мера $\sigma_\omega(\cdot|v)$ учитывает важность состояния ω с точки зрения оценки по критерию v $\in \Theta$. Тогда согласно теоремы 14.2 оптимальная нечеткая стратегия S^* определяется исходя из выражения:

$$\int\limits_{\Theta} l'(v,S) \circ g_\Theta = S^*_t(\omega)$$

Подставив в это равенство (14.15) получим:

$$S^*(\omega) = \int\limits_{\Theta} \left[\int\limits_{\Omega} l'(v,S(\omega)) \circ \sigma_\omega(\cdot|v) \right] \circ g_\Theta$$

Рассмотрим данное выражение при фиксированном состоянии $\omega \in \Theta$.
$S_t(\omega)$ будетопределять лишь нечеткое управление, то есть $\mu(u)=S_t(\omega)$:

$U \times \omega \to [01]$.

Совокупность $\mu(u)$ для всех $\omega \in \Omega$ обозначим $b(u, \omega)$: $U \times \Omega \to [01]$.
Тогда при фиксированном ω справедливо:

$$b(u,\omega)=\int_{\Theta}\left[\int_{\omega} l'(v,S(\omega))\circ\sigma_{\omega}(\cdot|v)\right]\circ g_{\Theta}=\int_{\Theta\times\omega} l'(v,u)\circ\left\langle\sigma_{\omega}(\cdot|v)\times g_{\Theta}\right\rangle,$$

где $u = S_1(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$, а $\left\langle\sigma_{\omega}(\cdot|v)\times g_{\Theta}\right\rangle$ - декартово произведение нечетких мер. Согласно леммы (10.3) соотношения (10.24) при фиксированном $\omega \in \Omega$ можем записать

$$\left\langle\sigma_{\omega}(\cdot|v)\times g_{\Theta}\right\rangle=\int_{\Theta}\sigma_{\omega}(\omega|v)\times g_{\Theta}.$$

А согласно выражений доказанных в лемме 10.1 справедливо следующее преобразование:

$$b(u,\omega)=\int_{\Theta} l'(v,u)\circ\int_{\Theta}\sigma_{\omega}(\omega|v)\times g_{\Theta}=$$

$$=\int_{\Theta} l'(v,u)\circ\sigma_{\omega}(\cdot|\omega)=\int_{\Theta}\left[1-l(v,u)\right]\circ\sigma_{\omega}(\cdot|\omega)$$

Для определения требуемого управления в нечеткий момент времени ρ (через интервал τ_ρ) при условии реализации состояния $\mu_\tau(\omega)$ необходимо провести интегрирование по $g(\cdot)$ на нечетком подмножестве $\mu_\tau(\omega)$, то есть:

$$\varphi_{\tau}^{*}(u)=\int_{\mu_{\tau}(\omega)} b(u,\omega)\circ g(\cdot)$$

Следовательно теорема доказана.
Таким образом теоремы 14.2 и 14.3 позволяют найти оптимальное, в смысле минимизации ожидаемых нечетких потерь (максимизации ожидаемого выигрыша), нечеткое управление для случаев, когда функционал качества зависит или не зависит от текущего состояния. Управление (14. 13) реализует принцип управления с обратной связью по измерению нечетких координат состояния НДС.

14.3. Определение функции потерь (выигрыша) при оптимизации управления НДС

Исходя из приведенных в предыдущем параграфе результатов по выработке оптимального управления НДС видно, что это управление определяется функцией потерь (или выигрыша) $l(v, u)$. Данная функции нечеткого отношения, определенного на $\Theta \times U$ является аналогом функции Беллмана в классическом методе динамического программирования.

Таким образом, необходимо формирование функции $l(v, u)$ на основе обработки имеющейся информации о структуре и характеристиках НДС. Множество $\Theta = \{v\}$ определяет множество критериальных оценок желаемого состояния НДС, а U - есть множество возможных управляющих воздействий на систему. Для формирования функции $l(v, u)$ рассмотрим дополнительно множество X - характеристик НДС (например характеристик состояния НДС, внешних возмущений, дополнительных (внешних) ограничений и т.д.).

Каждая характеристика $x_i \in X$ принимает свои значения во множестве A_i. Множество A_i может быть произвольным (числовым, номинальным, упорядоченным или нет и т.д.), при этом полагаем, что в конкретный момент времени для НДС характеристика x_i может принимать произвольное как четкое, так и нечеткое значение, то есть определяться функцией $\mu_{x_i}(a): A_i \to [01]$.

В качестве характеристик X целесообразно выбирать такие, которые в максимальной степени определяют оценку по критерию $v \in \Theta$ и зависят от выбранного управления. Для определения функции $l(v, u)$ для фиксированных $v \in \Theta$ сначала на основе различных методов (экспертного оценивая, обработки имеющихся наблюдений и других) определяется условная нечеткая мера $\sigma_{x_i}(\cdot|v)$, задающая «степень желаемости» значения $a_i \in A_i$ характеристики $x_i \in X$ для критерия $v \in \Theta$ и нечеткая мера $\varphi_X(|v)$, определяющая важность учета значения характеристики $x_i \in X$ при оценки по критерию v. Функции $\sigma_{x_i}(\cdot|v)$ и $\varphi_X(|v)$ определяют некоторую базу знаний о предметной области НДС. Формально база знаний определяется кортежем.

$$\left\langle \Theta, U, X, \{A_i\}, \sigma_{x_i}(|v), \varphi_x(\cdot|v) \right\rangle. \quad (14.16)$$

В выражении (14.16) все компоненты описаны ранее. Для определения функции $l'(v, u)$ в текущий момент необходимо измерить (спрогнозировать, оценить) возможные значения (четкие или нечеткие) характеристик из X при выборе управления $u \in U$. Пусть в результате измерения мы имеем нечеткую функцию $h(x_i, a_i, u): X \times \{A_i\} \times U \to [01]$ определяющую возможные значения $a_i \in A_i$, для характеристики x_i при выбранном уравнении $u \in U$. Тогда функция потерь (выигрыша) $l'(v, u)$ будет определяться двойным нечетким интегралом вида:

$$I'(v,u) = \int\limits_X \left[\int\limits_{A_i} h(x_i, a_i, u) \circ \sigma_{x_i}(\cdot|v) \right] \circ \varphi_\lambda(\cdot|v). \quad (14.17)$$

После взятия первого интеграла мы имеем для фиксированного критерия v $\in \Theta$ выгодность выбора управления $u \in U$ по каждой из характеристик из *X*. Второй интеграл позволяет получить обобщенную степень выгодности выбора управления *u* для каждого из критериев v $\in \Theta$.

Функция (14.17) может быть использована как функция выигрыша для выбора оптимального управления согласно (14.12) или (14.13), (14.14). Использование (14.17) в случае (14.12) позволяет решать «статические» задачи выбора в условиях неопределенности. Тогда характеристики из *X* определяют показатели характеризующие объект выбора в качестве которого выступают элементы множества $u \in U$. Таким образом, задача многокритериальной Θ экспертной оценки объектов из U, описывающихся набором своих характеристик из *X* является частным случаем задачи оптимизации по методу нечеткого динамического программирования для нечетких мер. Если оценки объектов из U были получены каждым из группы экспертов *P,* с уровнем компетентности V_p(p), то интегральная оценка при групповой экспертизе будет определяться соотношением:

$$\psi(u) = \int\limits_P \mu(u,p) \circ V_p(\cdot), \quad (14.18)$$

где $\mu(u, p) = \mu_p(u)$ - оценка объекта $u \in$ U экспертом $p \in P$

Данный подход был реализован для решения задач поддержки принятия решений в сложных трудно формализуемых предметных обчастях в программном продукте Expert Professional ExPro-2000 (экспертная оболочка оценки альтернатив и выбора решений), описанном в Приложении и успешно применялся более чем в 30 предметных областях.

Приложение

КОМПЛЕКС ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ FUZZY-ТЕХНОЛОГИИ

1. Назначение программных продуктов Fuzzy-технологии

Приведенные в предыдущих главах математические основы обрабротки нечетких данных, которые легли в основу Fuzzy-технологии, были использованы при создании семейства программных продуктов, которые в общем случае предназначены для аналитической обработки информации в том числе и недостаточно определенной, нечеткой. Как уже отмечалось ранее «нечеткий» - это термин, который соответствует термину fuzzy (англ - пушистый, ворсистый, размытый) и применительно к информации и данным обозначает их неопределенность, неясность. Примеры нечетких величин: "прибыль около 2 тыс. грн ", "температура высокая" и др

Подобного рода информация, как было показано ранее возникает при решении широкого круга практических задач и достаточно успешно может формализовываться на основе использования нечетких мер. При этом, в качестве основного инструмента обработки такого рода данных достаточно эффективно может быть использовано нечетко-интегральное исчисление

Использование нечетких множеств, мер и интегралов давно вышло за пределы «чистой науки» и преобрело практическую направленность При этом многие алгоритмы обработки нечетких данных легли в основу создания элементной базы современных электронных систем оценки и управления. Значительное практическое распространение алгоритмов Fuzzy-технологии обусловлено применением их в автоматизированных системах поддержки принятия решений в виде конкретных программных средств. На принципах использования Fuzzy-технологии создан ряд продуктов зарубежными фирмами Management Intelligenter Technologien GmbH, GmbH, Fuzzy Logic lnc, Fuzzy Systems Engineering и др. Настоящая глава не ставит целью провести всесторонний обзор программых продуктов использующих в той или иной форме алгоритмы Fuzzy-технологии. Здесь лишь приводится информация по программным продуктам непосредственно использующим нечеткие меры для представления нечетких данных в аналитических задачах и нечетко-интегральное исчисление в качестве механизмов обработки такого рода информации. Данные программные продукты в основном реализованы специалистами консалтинговой компании "ИНЭКС" (Украина) и широко применяются для решения широкого круга консалтинговых логистических задач внешнеэкономических операций, оптимизации меропиятий формирования спроса и стимулирования сбыта.

Областью применения рассматриваемых ниже программных продуктов является проведение расчетов с числовыми данными и словесными оценками в экономике, финансах, бизнесе, маркетинге, валютном дилинге, везде, где в процессе поддержки принятия решений приходится иметь дело с информационной неопределенностью, с недостатком или недоверием к информации.

Применение комплекса программных продуктов наиболее эффективно, когда:

- недостаточно статистической информации, либо эта информация не вызывает должного доверия;
- проблематично или дорого получить достаточный объем и качество потребной информации;
- имеющаяся информация только или в основном словесная (вербальная, экспертная);
- информация разнородна по источникам и составу (словесная и числовая);
- необходимо делать прогнозы при недостаточно известных факторах будущего;
- предстоит анализировать риски.

В этом Приложении будут рассмотрены программные продукты двух типов. Продуты первого типа это программные продукты универсального применения, которые можно рассматривать как специализированные программные среды, используя которые имеется возможность моделирования различных предметных областей, сложных динамических объектов и решения широкого круга экспертно-аналитических задач. К данным программным продуктам относятся:

□ **Fuzzy Calculator (FC)** - нечеткий вычислитель;
□ **Fuzzy for Excel** (FE) - нечеткие электронные таблицы;
□ **Expert Professional (ExPro)** - экспертно-аналитическая система;
□ **Data Engine (DE)** - система анализа сложных данных;

Продукты второго типа это специализированные программные продукты, предназначенные для применения в конкретных областях и для решения определенного круга экспертно-аналитических задач. К данным программным продуктам относятся:

□ **Fuzzy Estimation of Critical Messages (FECM)** - программа для нечеткой оценки критических сообщений при проведении арбитражных валютных операций;

□ **МаркетЭффект (МЭ)** - приложение из состава системы учета и управления предприятиями FinExpert, предназначенное для поиска эффективных маркетинговых решений.

Из отмеченных выше программных продуктов FC, FE, ExPro и FECM являются продуктами разработки специалистов консалтинговой компании "ИНЭКС" (Украина). Программный продукт DE является разработкой партнера компании "ИНЭКС", германской фирмы Management Intelligenter Technologien GmbH. Приложение МЭ разработано совместно украинской компанией IDM Ltd Co и компанией "ИНЭКС".

2. Программируемый нечеткий вычислитель Fuzzy Calculator (FC), версия 2.1

Проблема.

В ряде задач, связанных с проведением расчетов, например, экономической эффективности сделок, их возможных издержек многие **числовые** показатели могут быть определены только приблизительно, неточно, описательно. При этом количество таких показателей часто бывает достаточно большим. Для расчетов с такими неточными, нечетко определенными числами предназначен программируемый нечеткий вычислитель **Fuzzy Calculator (FC).** Он позволяет, наряду с обычными вычислениями над точными, четкими числами, производить математические расчеты с размытыми, нечеткими числовыми величинами.

В теории и в FC под нечетким числом подразумевается функция распределения уверенности человека в истинности значения числа. Такая уверенность, как уже ранее было показано, может эффективно быть формализована в виде распределения нечеткой меры (см. главу 7). Само нечеткое число может быть описано словесно. Кроме того, оно может быть представлено графически (реже таблично). Горизонтальная ось такого графика - диапазон обычных чисел, а вертикальная - степень уверенности в их истинности (от 0 до 1). Результирующий график - нечеткое число.

Реальные ситуации изобилуют множеством примеров необходимости использования нечетких чисел, например, таких как: "около 5", "от 3 до

2", "10, а может быть 15", "ожидаемая прибыль около 250 тыс. грн.", "спрос на этот вид напитков резко возрастет к июню месяцу до 800-900 шт./день, затем устойчиво продержится на этом уровне до осени, после чего медленно упадет до 60-70 шт./день" и им подобных.
Очевидно, что вариант, когда имеется инструментальная возможность использования нечетких чисел, является более информативным и соответствующим действительности. В результате расчеты с использованием таких нечетких чисел дадут более объективные результаты, позволят принять более обоснованные, оперативные решения. Именно в таких ситуациях необходимость использования предлагаемого FC - налицо, а получаемые эффективность и выигрыш по сравнению с традиционным расчетом - максимальны.

Назначение.

Программный продукт Fuzzy Calculator предназначен для выполнения математических расчетов с числовыми данными, и в первую очередь, с нечеткими и/или смешанными (нечеткими и обычными, четкими) числами. Он предназначен для пользователей, сталкивающихся на практике с необходимостью учета числовых величин, точные значения которых не определены или неизвестны, но о которых все же существуют некоторые соображения относительно их порядка и/или характера.

Возможные области применения.

Традиционно "нечеткие" области:

- анализ инвестиционных проектов, разработка и экспертиза бизнес-планов, решение маркетинговых задач;
- расчеты в бизнес-планировании, оценка выгодности предстоящих сделок,
- экспертиза проектов, оптимизация экономических, коммерческих операций;
- прогнозные расчеты, оценка и анализ рисков.

Исполнение.

FC - это компьютерная программа, реализованная как традиционное Windows-приложение. На экране компьютера FC имеет вид обычного калькулятора с добавлением некоторых специальных клавиш и графического окна отображения результата ввода и вычисления чисел.

Вид главного окна FC показан на рис. .1 ниже.

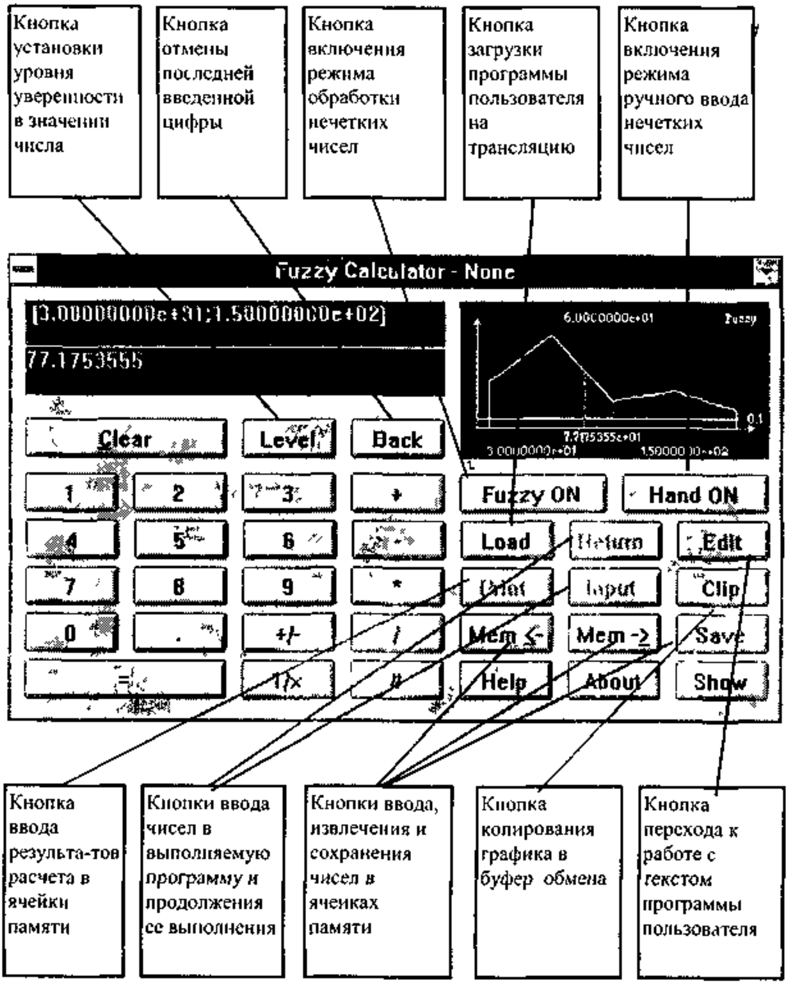


Рисунок 1 - Главная панель FC.

Функциональные возможности.

В FC обеспечивается возможность ввода пользователем, обработки и вывода четких и нечетких чисел. Ввод нечетких чисел может производиться как в автоматическом режиме, при котором числа "размываются" собственно FC на основе зависимостей, определенных ранее экспертно-теоретическим путем, так и в ручном режиме в

соответствии с индивидуальным представлением сущности чисел пользователем.
Результат ввода чисел и их обработки отображается на обычном числовом табло индикации и в графическом окне. При этом в качестве результата используются среднее ожидаемое значение числа, число с максимальной степенью уверенности и интервал значений числа на заданном уровне уверенности. В графическом окне отображается также и непосредственно сама функция распределения числа, как эго показано на рисунке выше.
В FC есть возможность построения и анализа риск-кривых. Данные кривые определяются как соотношение нечетких мер превышения (принижения) некоторого заданного значения числовой величины значения нечеткого числа. Для анализа полученных результатов в FC предусмотрены: возможность изменения используемого уровня уверенности, возможность работы с памятью.
Расчеты в FC производятся непосредственно с интерфейса программы, а также могут быть записаны как **программа** на встроенном, очень простом и доступном языке программирования FuzzyBasic и транслированы средствами самого FC.
FC оснащен стандартной системой Windows-помощи. Кроме того, обеспечена выдача пользователю в процессе работы с FC текстовых подсказок на числовое табло индикации.

Основные достоинства.

FC совмещает простоту обычного калькулятора и прекрасные возможности по обработке приблизительной числовой информации, нечетких, неточных, неопределенных данных. Его использование не требует каких-либо особых знаний нечеткой математики. Специфические понятия и правила FC скрыты от пользователя. Необходимо лишь понимание того, что такое **"нечеткое число"** и как оно может трактоваться. В FC, наряду с новыми возможностями по вводу и обработке чисел, имеется также целый ряд возможностей (по сравнению с обычными расчетами) в получении дополнительных, более адекватных результатов, в более корректной интерпретации (трактовке) полученных результатов.

Использованный подход.

В основу FC положены современные подходы искусственного интеллекта к обработке неопределенной информации и апробированная методика обработки нечетких чисел на основе теории нечеткой меры и нечетко-интегрального исчисления

Требования к вычислительной технике:

- PC-компьютер;
- Windows'9x.

Пример.

Применение Fuzzy Calculator для решения задачи планирования и сравнительного анализа эффективности инвестиционных проектов: "Разработка золоторудных месторождений Украины" и "Производство хлеба на базе сети минипекарен". В частности, для одной из важнейших составных частей такой задачи - подзадачи экспертной оценки риска потери вкладываемых средств.

В итоге были получены достаточно детальные результаты, представленные в табл 1 ниже

Таблица 1 - Результаты анализа эффективности инвестиционных проектов

Проект	Риск, %			
	Мини-мальный	наиболее возможный	средне-взвешен-ный	Макси-мальный
"Разработка золоторудных месторождений Украины"	16,4	28-29,7	28,3	33
"Производство хлеба на базе сети минипекарен"	24,7	28,9-32,2	31,5	41,4

По имевшейся экспертной информации получено, что степень риска (риска получения **расчетных** прибылей по этим проектам) у первого проекта меньше, чем у второго. При этом оба проекта находятся, в основном, в так называемой зоне повышенного риска (25-50%). Абсолютные значения финансовых средств, планируемых к инвестициям, и расчетных прибылей этих проектов различны и определяются спецификой проектов.

3. Программа Fuzzy for Excel (FE) для работы с нечеткими числами в среде MS Excel, версия 2.0

Назначение.

Очень часто при проведении финансовых расчетов, определении экономической эффективности сделок используются программы электронных таблиц типа Microsoft Excel. Однако далеко не всегда числовые показатели могут быть определены точно, часто - только приблизительно. Для расчетов с такими нечетко определенными числами может применяться программа Fuzzy Calculator, описанная

ранее. Однако она не обеспечивает работу в среде MS Excel. Для этого предназначена другая программа — **Fuzzy for Excel (FE).**
FE является второй версией программного продукта Fuzzy for Excel, разработанного фирмой "ИНЭКС" и обеспечивающего возможность простого и доступного использования технологии обработки нечетких чисел в традиционной для пользователей среде MS Excel.
FE реализована в виде надстройки MS Excel, которая подключает к MS Excel дополнительную панель инструментов Fuzzy Tools и меню Fuzzy рис. 2.
FE, как и Fuzzy Calculator, позволяет, наряду с обычными числами, работать с числовыми величинами, точные значения которых не определены или неизвестны, но о которых все же существуют некоторые соображения хотя бы относительно их порядка и/или характера. При этом обеспечивается анализ чисел не в одном (что свойственно традиционным числовым расчетам, в том числе и с помощью обычных электронных таблиц), а в двух измерениях:

- собственно на числовой оси;
- и на оси уверенности (риска).

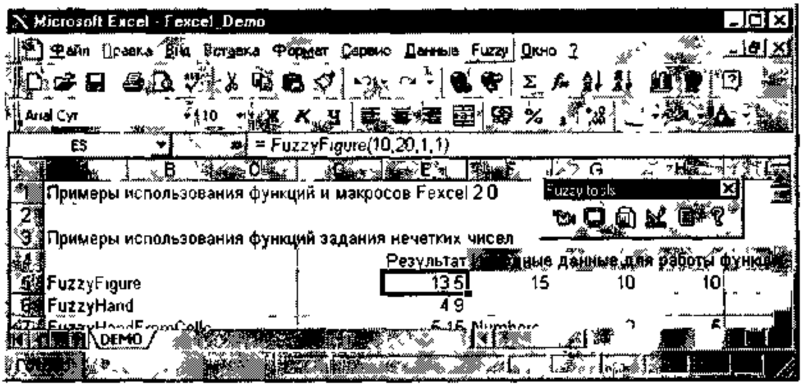


Рисунок 2 - Панель инструментов Fuzzy Tools

FE выполнен в виде обычной надстройки MS Excel'97 и не требует специальных знаний математики. Его специфические понятия и правила скрыты от пользователя, которому требуется лишь понимание физической природы неопределенности и навыков интерпретации нечетких чисел. Простота работы обеспечивается за счет того, что FE предоставляет ряд интуитивно понятных функций для задания нечетких чисел и реализации традиционных арифметических операций.

Большинство функций работает как с нечеткими, так и с обычными числами. Правила вызова и использования функций FE традиционны, как в Microsoft Excel. FE также предоставляет пользователю широкие возможности по визуализации результатов расчетов как с помощью традиционных средств Microsoft Excel, так и собственными, встроенными средствами.

Понятие нечеткого числа в FE.

Если с обычной числовой осью (горизонтальная ось) связать ось уверенности в значении числа (вертикальная ось, значение плотности нечеткой меры) и каждому значению на горизонтальной оси (носителю) присвоить некоторое значение уверенности (от 0 до 1), в результате получится график, представляющий зависимость уверенности в том, что рассматриваемая переменная (числовая величина) примет то или иное значение. Этот график и называется нечетким числом. Основное отличие числовых величин (например, дохода или издержек), описываемых нечеткими числами, заключается в том, что величина размыта на числовом интервале. Причинами этого размытия являются факторы неопределенности (например, возможная потеря/приобретение новых клиентов или ужесточение/ослабление налогового пресса и т.д.). Эти факторы и приводят к тому, что значение величины может оказаться левее или правее наиболее ожидаемого четкого числа. Нечеткие числа имеют несколько характеристик:

- число с максимальной степенью уверенности;
- число - центр тяжести графика нечеткого числа;
- максимальное значение числа по заданному уровню уверенности;
- минимальное значение числа по заданному уровню уверенности.

Представление нечетких чисел в FE.

В ячейке обычных Microsoft Excel может отображаться только одно число, а в FE (по выбору пользователя) может использоваться одна из четырех числовых характеристик нечетких чисел, каждая из которых в зависимости от ситуации может оказаться наиболее полезной.

Кроме этого, имеется возможность представления нечетких чисел в полном объеме - графическом виде. Для каждого нечеткого числа, одна из характеристик которого отображается в ячейке электронных таблиц, FE дополнительно предоставляет график этого числа. Исходя из соображений рациональной дискретности, нечеткие числа в FE представляются в виде двух массивов размерности 21 каждый:

- носителя нечеткого числа, то есть массива последовательно возрастающих чисел от минимального до максимального;

- функции уверенности, то есть массива степеней уверенности, соответствующих каждому из элементов носителя.

Для получения отдельных элементов этих массивов в FE имеются соответствующие функции.

Обычные числа также могут быть представлены как нечеткие. Для этого все элементы массива носителя числа приравниваются к задаваемому числу, один из элементов функции уверенности приравнивается к 1, а остальные - 0. В таком виде обычные числа представляются как частный случай нечетких и с ними, как и с нечеткими числами, работают функции FE.

Использование FE.

Основные компоненты FE, которые определяют возможности программного продукта:

- □ функции задания нечетких чисел;
- □ функция расчетов FuzzyFormula;
- □ вспомогательные функции;
- □ инструменты FE.

Функции задания нечетких чисел.

FE предоставляет пользователю следующий набор из 14 функций для задания нечетких чисел различными способами - вручную, полуавтоматически или по внешним статистическим данным. Их перечень в алфавитном порядке:

Fuzzy Figure - задание числа в виде геометрической фигуры;

FuzzyHand - задание числа из двух строк: последовательности чисел и их степеней уверенности;

FuzzyHandFromCells - задание числа из двух последовательностей ячеек, содержащих числа и их степени уверенности;

Fuzzylnterval - задание числа в виде интервала;

FuzzyLessThan - задание числа типа "меньше, чем ..."";

FuzzyLessThanTo - задание числа типа "меньше, чем... до ... ";

FuzzyMakeFromStatistic - задание числа из набора статистических реализаций;

FuzzyMoreThan - задание числа типа "больше, чем ...",

FuzzyMoreThanTo - задание числа типа "больше, чем...до ...";

FuzzyNear- задание числа типа "около ...",

FuzzyNearAndLessTo - задание числа типа "около...и менее до ...";

FuzzyNearAndMoreTo - задание числа типа "около ... и более до 1». ... ,

FuzzyNearFirstOrSecond - задание числа типа "около (... или ...)";

FuzzyNearFromTo - задание числа типа "около (от ... до ...)".

Пример задания нечеткого числа с помощью функции FuzzyFigure (в виде геометрической фигуры) и представления его в FE показан на рис.

3 ниже.

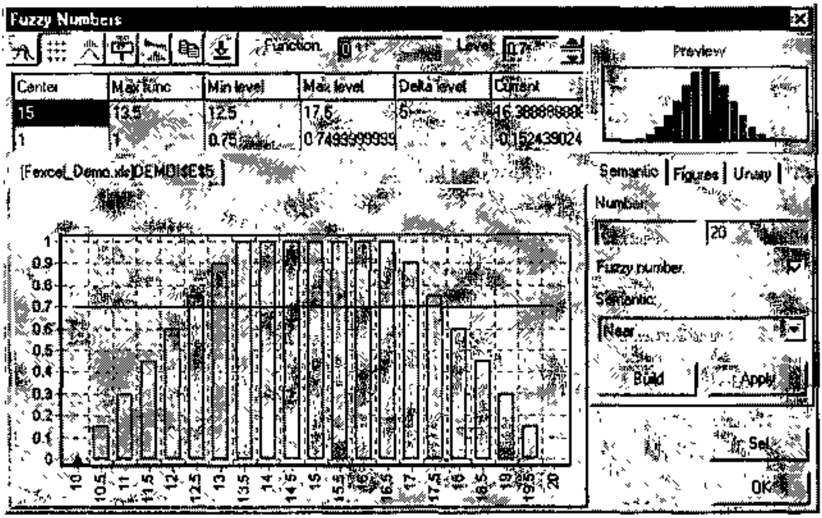


Рисунок 3. Задание нечеткого числа функцией FuzzyFigure

Автоматическое формирование нечетких чисел.

Некоторые функции FE автоматически формируют нечеткие числа исходя из значения параметра, передаваемого в функцию. Прежде всего это функции задания нечетких чисел типа: "около ..." (FuzzyNear), "меньше, чем ..." (FuzzyLessThan) и некоторые другие. Правила автоматического формирования чисел этими функциями основаны на теоретически обоснованных и достаточно апробированных на практике авторских алгоритмах.

Функция FuzzyFormuIa.

Функция FuzzyFormuIa выполняет арифметические расчеты с нечеткими числами, которые предварительно сформированы в ячейках. Функция имеет один параметр, представляющий собой арифметическое выражение, которое должно состоять из имен ячеек и обычных чисел. В ячейках, на которые ссылается функция, могут находиться как нечеткие, так и обычные числа. Функция также поддерживает тот случай, когда все числа в выражении обычные. Функция поддерживает все традиционные правила выполнения арифметических операций для обычных чисел. Для нечетких чисел правила выполнения арифметических операций имеют следующие особенности:

- допускается деление числа на нечеткий ноль;
- допускается возведение в нечеткую степень только целого

числа.
При успешном завершении функция формирует нечеткое число - результат выполнения заданной последовательности арифметических операций.

Вспомогательные функции.

FE предоставляет пользователю возможность воспользоваться многими функциями, реализующими вспомогательные, но очень полезные операции с нечеткими числами:

□ общеупотребляемые операции: вычисление суммы или произведения нескольких нечетких чисел; вычисление среднего из нескольких чисел; возведение в заданную степень и др.;

□ специфические операции над нечеткими числами: возвращение значения заданного параметра нечеткого числа; возвращение пары обычных чисел, соответствующих заданному уровню уверенности; вычисление пересечения или объединения нескольких чисел; возвращение координаты пересечения двух нечетких линий (аналог возможности, присущей программному продукту МаркетЭффект) и т.д.;

□ операции над нечеткими числами для использования в прикладных областях: вычисление ставки дисконта; возвращение обычного числа, соответствующего заданному уровню риска; возвращение риска того, что нечеткое число окажется меньше или больше заданного и многие другие.

Перечень вспомогательных функций в алфавитном порядке:
Fuzzy Average — вычисляет среднее из нескольких чисел;
FuzzyComplementation - обращает функцию уверенности числа;
FuzzyConvolution - вычисляет свертку нескольких чисел с учетом весовых коэффициентов;
FuzzyDegreeFunction - возводит функцию уверенности числа в заданную степень;
FuzzyGetBearer - возвращает значение носителя числа по его номеру;
Fu7zyGetDiscount - вычисляет ставку дисконта;
FuzzyGetLevel - возвращает значение уверенности носителя числа;
FuzzyGctMembership - возвращает значение уверенности носителя числа по его номеру;
FuzzyGetNumberForRisk - возвращает обычное число, соответствующее заданному уровню риска;
FuzzyGetNumbers - возвращает пару обычных чисел, соответствующих заданному уровню уверенности;
FuzzyGetParameter - возвращает значение заданного параметра нечеткого числа;

FuzzyGetRiskLessThan - возвращает риск того, что нечеткое число окажется меньше заданного;
FuzzyGetRiskMoreThan. - возвращает риск того, что нечеткое число окажется больше заданного;
Fuzzylntegral - возвращает значение нечеткого интеграла одного числа по другому;
Fuzzylntersection - возвращает координаты пересечения двух нечетких линий;
Fuzzy Max - вычисляет объединение нескольких чисел;
FuzzyMin - вычисляет пересечение нескольких чисел;
FuzzyProduct - вычисляет произведение нескольких чисел;
FuzzySum - вычисляет сумму нескольких чисел.

В FE имеется встроенная система контроля использования функций и выдачи подсказок.

Инструменты FE.

В инструменты FE входит меню "Fuzzy" и панель "Fuzzy tools", которые автоматически подключаются к Microsoft Excel после инсталляции FE.

Инструменты FE обеспечивают интерактивное задание, просмотр и документирование нечетких чисел, а также доступ пользователя до системы помощи и управление отображением характеристик нечетких чисел в ячейках Excel. Состав инструментов:

- Show numbers (просмотр чисел);
- Show 3D numbers (просмотр трехмерного изображения чисел);
- Prepare excel diagram (подготовка диаграмм FE);
- Options (опции);
- Help и About (помощь и о программе).

Более детальное описание FE и правила работы с ним изложены во встроенной системе Windows-помощи и соответствующем руководстве пользователю этого программного продукта.

Пример.

Один из многочисленных возможных примеров - использование Fuzzy for Excel для прогнозирования эффективности маркетинговых мероприятий предприятия. После реализации в FE авторского подхода к моделированию рынка и работы на нем предприятия, ввода в FE-модель исходных данных (зачастую неопределенных) получена исходная рыночная модель, достаточно адекватно описывающая происходящие на рынке процессы с продвижением товара, функционирующая в среде FE и графически представленная на первом рис. 4.

Данная модель позволила оценивать влияние маркетинговых мероприятий предприятия и других, недостаточно определенных, внешних факторов на эффективность продвижения продукции этого предприятия на рынке, а также прослеживать динамику продвижения с течением времени.
В итоге были получены прогнозные cash flow, финансово-экономические показатели работы предприятия и выработана наиболее оптимальная его стратегия (в виде последовательности эффективных мероприятий предприятия).

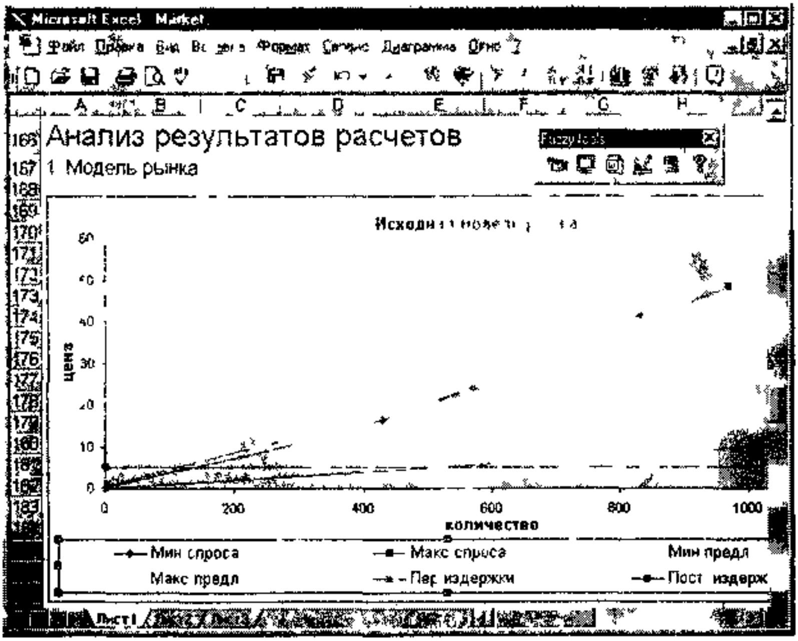


Рисунок 4. Исходная модель рынка

4. Экспертно-аналитическая система Expert Professional-2000 (ExPro-2000), версия 2.0

Проблема
Деятельность государственных органов и учреждений, частных компаний и отдельных должностных лиц различного уровня постоянно связана с необходимостью решения задач оценки, выбора, ранжирования и т. п. При решении задач оценки эффективности экономических и коммерческих проектов, выбора приоритетов

деятельности предприятий, прогноза бизнеса или рисков необходимо анализировать объекты или ситуации, описанные неточно, ранжировать их или сопоставлять с идеальным вариантом по целому ряду критериев и т. д., используя при этом лингвистические **(словесные)** описания и заключения специалистов. Яркими примерами здесь могут быть задачи управления ресурсами (запасами, закупками), прогнозирования общего состояния экономики или предприятия, его частных составляющих (инвестиционного климата, поступлений в бюджет, маркетинговой ситуации, продвижения товаров и т д), оценки различных вариантов и схем (внешнеэкономических операций, коммерческих сделок). Этот перечень может быть продолжен и далее. Несмотря на различия перечисленных задач, все они имеют одну общую черту - это задачи аналитические. Для их решения имеющихся четких данных, как правило, явно недостаточно, однако вместо отсутствующих данных имеется неполная, неточная, словесная информация. Не всегда при решении аналитических задач можно привлечь достаточное количество информации, причем требуемого качества. Это вызвано, например, или просто отсутствием физических датчиков для измерения (например, уровня странового риска) или неприемлемой ценой потребной информации. Вместо традиционных источников информации в таких случаях может быть задействован компетентный специалист, эксперт. Остается лишь правильно и корректно обработать такую информацию.Традиционные системы моделирования, работающие с числовыми данными, при решении таких задач неэффективны. В этих случаях весьма кстати оказывается использование экспертно-аналитической системы Expert Professional-2000.

Назначение.

Система **ExPro-2000** предназначена для решения экспертно-аналитических задач оценки и прогнозирования состояния сложных систем в условиях неопределенности (отсутствия приоритетов и терминологии, которая устоялась; слабой структуризации решаемых задач; неточности, недоопределенности, нечеткости исходной информации). В первую очередь, в области экономики, бизнеса, финансов, политике и социальной сфере.

ExPro-2000 - универсальная система компьютерного моделирования для поддержки принятия решений, которая ориентирована на широкий круг квалифицированных специалистов, исследующих состояние и поведение сложных систем различной природы. Пользователи ExPro-2000 - лица, подготавливающие и/или принимающие решения: руководители, аналитики, эксперты, консультанты, советники, менеджеры и другие специалисты.

Исполнение.

Система **ExPro-2000** - новая, существенно расширенная, Windows-версия компьютерной DOS-программы ExProV.3 (версии 3), по сути - это новый программный продукт. Ее интерфейс приведен на рисунках ниже. ExPro-2000 функционирует на IBM-совместимых PC-компьютерах под управлением Windows'9x (NT) и выше.

В основу работы системы положена Fuzzy-технология решения подобного рода экспертно-аналитических задач, являющаяся know-how разработкой и собственностью компании "ИНЭКС". ExPro-2000 является инструментом, который в доступной форме обеспечивает строгую математическую формализацию решения задачи, выполнение соответствующих расчетов и анализа получаемых решений.

Система ExPro-2000 по своим возможностям объединяет большинство других продуктов - разработок компании "ИНЭКС". Практически все задачи, которые решаются ими, в том числе и с использованием одновременно нескольких продуктов, могут быть решены с помощью одной ExPro-2000.

Общая структура ExPro-2000.

Общая структура ExPro-2000 показана на рис. 5. Она включает в себя четыре основные составляющие:

□ модель предметной области прикладной задачи, т.е. базу знаний (зависимостей, связей, правил и т.п.);

□ оценки конкретных объектов из этой предметной области;

□ факторы, действующие на оцениваемые объекты;

□ расчетные алгоритмы, скрытые от обычного пользователя системы ExPro-2000.

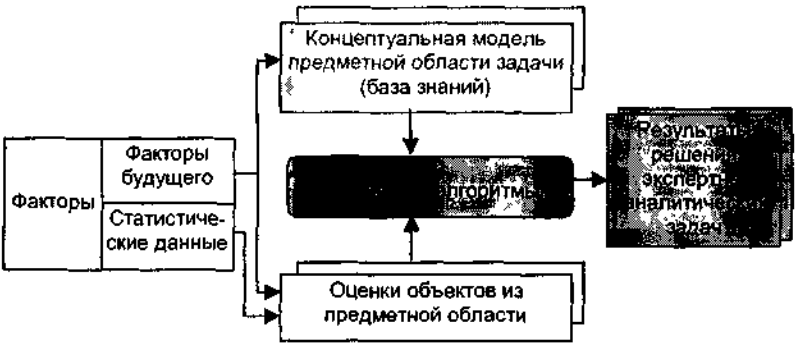


Рисунок 5. Общая структура ExPro-2000.

Исходные данные.

База знаний является стержнем ExPro-2000. Она является представлением пользователя-аналитика о предметной области, о понятиях, о структуре задачи, взаимосвязях в ней и предпочтениях. Совокупностью самых простых понятий пользователь характеризует анализируемый объект и поэтому они называются характеристиками объекта. Характеристики могут быть словесными либо числовыми, последние - в виде нечетких чисел или обычных. Именно эти характеристики по встроенным алгоритмам подлежат дальнейшей обработке в ExPro-2000.

И база знаний, и оценки объектов находятся под влиянием внешних факторов, сила и состав которых меняется во времени. Эти факторы по отношению к текущему моменту времени разделяются на факторы прошлого и будущего. Отображением факторов прошлого являются различного рода статистические данные, которые могут использоваться также для задания числовых характеристик объектов. Факторы будущего отражают взгляды аналитика на динамику процессов и оценок объектов. Факторы будущего могут иметь различную физическую природу, но они могут быть описаны рядом общих прогнозных параметров: временем существования, силой проявления, своей важностью и возможность возникновения. Такое представление позволяет моделировать достаточно широкий спектр возможных вариаций факторов будущего. Таким образом, исходными данными являются:

- совокупность характеристик оцениваемых объектов;
- система критериев оценки и предпочтений;
- оценки частных характеристик конкретного объекта;
- описание внешних факторов.

Порядок решения экспертно-аналитических задач.

Решение экспертно-аналитических задач осуществляется на основе хорошо зарекомендовавших себя авторских алгоритмов представления и обработки информации, заложенных в ExPro-2000. Их работа в целом заключается в сведении частных характеристик каждого объекта, оцененного пользователем, к системе интегральных понятий базы знаний и получении, таким образом, обобщенных оценок этих объектов. Если база знаний и оценки объектов статичны (нет факторов будущего), имеем решение задачи оценки. Если задано влияние факторов будущего на базу знаний или/и оценки объектов, имеем решение задачи прогноза.

Решение задач и оценки, и прогнозирования осуществляется на единой основе, по единой технологии, что упрощает задачу пользователя по овладению и пользованию системой. Каждый шаг работы в системе

ExPro-2000 документируется и может быть использован для контроля, анализа и пояснений.

Характеристики ExPro:

✓ характер исходной информации - лингвистическая, неточная, неполная, а также обычная;

✓ поддерживается процедура групповой оценки объекта несколькими специалистами;

✓ имеется возможность проведения анализа получаемых результатов, их зависимости от исходных данных;

✓ теоретическая база системы - перспективный математический аппарат теории нечетких мер и множеств.

Получаемые результаты.

На базе ExPro могут быть построены различные прикладные системы, работоспособные в условиях информационной неопределенности. Например:

□ экспертные системы анализа инвестиционных и других коммерческих проектов, внешнеэкономических операций, товарного маркетинга;

□ системы ранжирования и выбора альтернатив;

□ системы расчета инвестиционных качеств ценных бумаг, банковских кредитных рисков, анализа валютного рынка, рейтингования банков;

□ системы выявления и расчета рисков в бизнесе, экономической безопасности в целом;

□ системы классификации в экономике, политике, медицине и др.

Многие из таких прикладных систем уже созданы и эффективно функционируют, в том числе и в условиях информационной неопределенности, когда другие аналогичные системы не работают. Фрагмент интерфейса системы ExPro-2000 и примера получаемых результатов, а также структуры использовавшейся базы знаний одной из уже созданных специализированных систем представлены соответственно на рис. 6 и рис. 7 (более темным цветом показаны характеристики, которые числовые, светлым - словесные, лингвистические).

Экспертно-аналитическая система ExPro-2000 и ее предшественница ExProV.3 апробированы на решении более чем 40 конкретных задач из самых различных предметных областей: от экономики до техники. Использование эгого универсального инструмента позволяет не только получать решения сложных аналитических задач, но и совершенствовать свой профессиональный уровень специалистам, работающим с системой, глубже проникать в природу анализируемых процессов

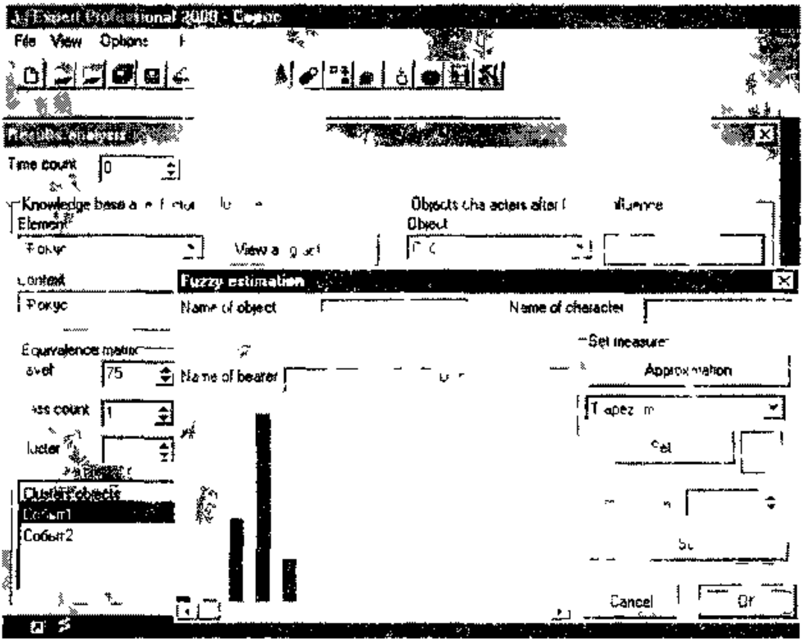


Рисунок 6. Фрагмент интерфейса системы ExPro-2000

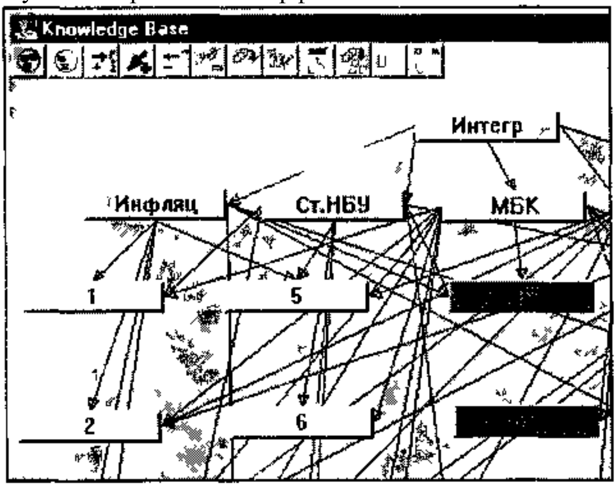


Рисунок 7. Фрагмент структуры базы знаний

5. Программа Fuzzy Estimation of Critical Messages (FECM) для нечеткой оценки критических сообщений при проведении арбитражных валютных операций, версия 1.1.

Проблема.
Любой начинающий трейдер знает, что анализ цен на валютном рынке FOREX покоится на двух китах: техническом и фундаментальном анализе. Первый из них более формализован и легок в интерпретации, поддерживается развитым программным обеспечением. В отличие от технических, фундаментальные показатели (и их ожидания) интерпретируются менее определенно, их влияние на динамику цен носит зачастую непредсказуемый характер, что может приводить к катастрофически большим денежным потерям и даже к разорению трейдеров. Каждый участник торгов интерпретирует фундаментальные факторы по своему и "на глазок", может по-разному смотреть на их влияние на динамику курса и с разной степенью доверять им. Новостей фундаментального характера может быть много, они могут наслаиваться, дополнять или отменять друг друга, между ними возникают и исчезают многочисленные системные взаимосвязи, всю совокупность которых не в состоянии учесть даже тренированный человек. Успешный анализ подобной информации возможен с помощью Fuzzy-технологии.
Именно для этих целей специалистами консалтинговой фирмы "ИНЭКС" на основе современной технологии обработки нечетких данных разработан программный продукт **Fuzzy Estimation of Critical Messages (FECM),** позволяющий производить оценки критических сообщений при проведении арбитражных валютных операций. **FECM осуществляет интегральную оценку влияния сообщений фундаментального, технического и психологического характера, поступающих в процессе торгов, на курсы валют** и работает в режиме, близком к режиму реального времени.
Основным вопросом для участников валютных торгов является вопрос правильного прогноза: когда, в какой момент и насколько "переломится" курс, чтобы изменить свою тактику или предпринять меры предостережения. Для решения прогнозной задачи участники валютного рынка (а также участники внешнеэкономической деятельности) получают из различных источников, например, из информационных финансовых систем типа Reuters Terminal в реальном масштабе времени информацию двух принципиально различных типов:

- о котировках, курсах валют, количестве и суммах сделок по их продаже/покупке;
- о событиях и факторах, которые прямо или косвенно могут влиять на курсы валют.

Информация первого типа представляет собой временную последовательность исключительно цифровых данных. Они могут быть легко отображены, проанализированы и обработаны существующими программами финансового технического анализа типа Trade Station. В содержательном плане они отражают только предысторию изменения курсов валют и любые попытки прогнозирования с помощью компьютера по этой информации не могут быть построены по иному принципу, чем принцип "прошлое определяет будущее".

Однако на практике все происходит гораздо сложнее. Возникают и исчезают события и факторы, на которые реагирует мировой рынок. Сведения о них содержатся в информации второго типа, которую участники торгов могут получать в виде текстовых сообщений. Эти сообщения могут касаться и прошлого, и будущего. При этом каждый участник торгов может по-разному смотреть на их влияние и с разной степенью доверять им. Сообщений очень много, они наслаиваются, дополняют или отменяют друг друга.

Однако человек в состоянии учесть действие всего до 5-7 факторов, а хорошо тренированный - до 12-15. Дальше этого порога начинаются ошибки, которые оплачиваются деньгами. К сожалению, большинство участников торгов может лишь складировать сообщения в "календарь" и пытаться кое-как учитывать их.

Назначение.

Программный продукт FECM предназначен для оценки интегрального (совокупного) влияния потока сообщений, поступающих в большом количестве накануне и в процессе валютных торгов, на курсы валют. Как результат - прогнозы этих курсов. Совместно с имеющимися программными продуктами технического анализа, использование FECM позволяет соединить прошлое и будущее при прогнозировании курсов валют и, тем самым, повысить возможность принятия правильных решений участниками валютных торгов и других сфер бизнеса.

Использование программы - прогнозирование и системный анализ фундаментальных, технических и психологических факторов при проведении валютных торгов на рынке FOREX. Совместно с имеющимися программами технического анализа **FECM** превращается в мощный аналитический комплекс прогнозирования курсов валют и

резко повышает возможность принятия трейдерами правильных решений.

Функционально FECM обеспечивает:
□ ввод и оценку поступающих сообщений по таким характеристикам как важность, время, направление, сила влияния и др.;
□ получение оценки совместного влияния сообщений на курсы валют;
□ визуализацию этой оценки в виде графика на временной оси и ее всесторонний анализ в различных временных масштабах;
□ документирование характеристик сообщений путем генерации отчета в формате документа MS Word;
□ настройку интерфейса с учетом требований, особенностей работы и привычек пользователя.

Исполнение.
FECM - это Windows-программа. Вид главного окна программы FECM показан на рис. 8.
Интерфейс FECM выполнен достаточно просто, чтобы обеспечить максимально быструю и удобную работу аналитика. Интерфейс обеспечивает
- вставку сообщений из стандартного буфера обмена Windows - Clipboard и задание их характеристик;
- выдачу в виде графиков на временной оси тенденций валют и их отношений (курсов) - до 4-х одновременно,
- работу аналитика в режимах свободного перемещения по оси времени и привязки к текущему времени;
- изменение временного масштаба графиков (дни, часы и минуты);
- просмотр тенденций курсов валют и перечня действующих сообщений в заданный момент времени;
- просмотр и исследование всего перечня сообщений в программе,
- отсечку прекративших действие сообщений.

Как использовать FECM?
FECM предоставляет возможность пользователю получать прогноз **тенденций изменения** курсов валют. На графике ниже в координатах время (ось абсцисс) и темп (скорость) изменения курса валют (ось ординат) показаны прогнозы FECM: линия черного цвета - максимально возможная тенденция движения курса валют, красного цвета - средневзвешенная тенденция, а область серого цвета, внутри которой находятся обе эти линии, - весь диапазон возможных тенденций изменения курса.

Практическое использование получаемых с помощью FECM прогнозных тенденций изменения курсов валют осуществляется на основе комплекса рекомендаций. Например, решение о покупке валюты целесообразно принимать при пересечении красной линией оси абсцисс в направлении верхней зоны графика FECM (зоны удорожания валюты), а решение о продаже - в направлении нижней зоны (зоны удешевления).

Рисунок 8. Вид главного окна программы FECM.

Технология прогнозирования FECM

Мало кто с полной уверенностью может сказать, каким образом то или иное сообщение повлияет на курсы валют. Этот факт накладывает особый отпечаток на определение характеристик сообщений, получение и интерпретацию результатов их оценки.

Когда имеются данные о состоявшихся торгах (например, минимальный, максимальный и средний курс), то мы ведем речь о вполне конкретном значении курса как отношении одной валюты к другой. Когда же таких данных нет, но имеется некоторая информация о каких-либо влияющих на курс событиях, то целесообразно говорить о тенденции изменения курса: увеличении, уменьшении или не изменении.

Тенденция курса в FECM рассматривается как нечеткая величина, которая в каждый момент времени не имеет точно определенного значения, а имеет несколько значений с различной степенью уверенности, как показано на рисунке. Для анализа нечетких тенденций курсов используются числовые характеристики нечетких величин, к которым относятся (рис. 9):

- градация с максимальной степенью уверенности (1);
- градация - центр тяжести распределения уверенности (2);
- градация - максимум по уровню уверенности (3);
- градация - минимум по уровню уверенности (4).

Рисунок 9. Числовые характеристики нечетких величин.

Градация с максимальной степенью уверенности - это то из значений шкалы, которому присуща максимальная уверенность. Центр тяжести распределения уверенности - это градация-середина фигуры распределения, площади слева и справа от которой равны. Она представляет собой средневзвешенное значение нечеткой величины. Максимум и минимум по уровню уверенности - это градации, обозначающие соответствующие значения нечеткой величины, которым свойственна уверенность, не менее заданного уровня. В

различных случаях наиболее показательными являются различные характеристики и их совокупности, но чаще - центр тяжести.
Еще одной важной характеристикой тенденций является риск-функция нечеткой величины (рис. 10). Она отражает возможность того, что действительное значение нечеткой величины окажется больше (меньше) значения, отображаемого той или иной градацией. Эта характеристика добавляет еще одну дополнительную возможность для анализа тенденций курсов валют.

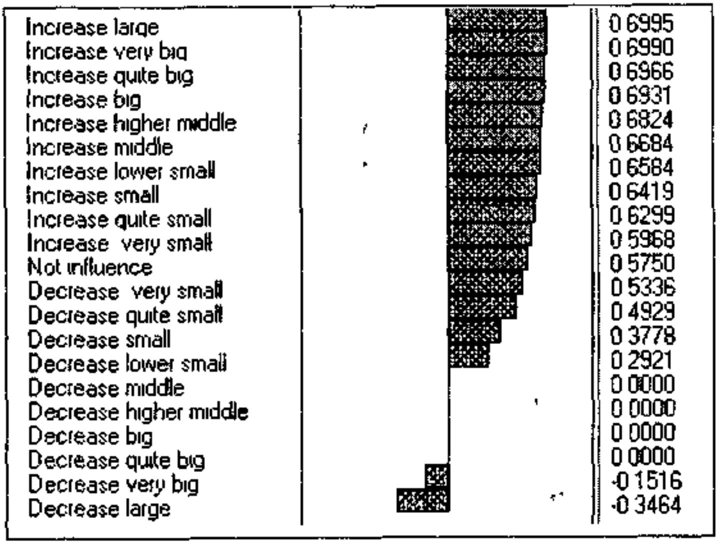


Рисунок 10. Риск-функция нечеткой величины.

Самая первая снизу градация со значением -0.3464 означает, что если финансовый аналитик (заинтересованный в понижении курса валюты) при принятии решения будет ориентироваться на нее, то риск принятия им неверного решения составит -0.3464. Аналогичным образом риск-функция трактуется для остальных градаций. Как видно из рисунка, риск-функция имеет две области:

- область, в которой значения уверенности больше ноля - область устойчивости;
- область, где значения уверенности меньше ноля - область риска

В FECM все поступающие сообщения оцениваются по следующим характеристикам:

- временные;
- направление и сила влияния;

- важность сообщения;
- степень доверия к своим оценкам.

Предполагается, что фактор, по которому имеется сообщение, не сразу набирает силу полною влияния, а постепенно. Если моменты времени t_1 и t_2 совпадают, то это значит, что сообщение начинает действовать скачком. Временные параметры сообщения показаны на рис. 11.

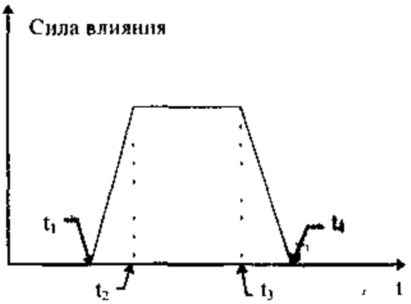


Рисунок 11. Временные параметры сообщения.

Направление и сила влияния задаются на лингвистической шкале, как было показано выше. Важность сообщения характеризует степень его учета при совместной оценке с другими сообщениями. Она может также трактоваться как степень доверия к источнику сообщения и определяться, исходя из собственных соображений аналитика и его опыта или же из оценок других аналитиков. Последняя характеристика - степень доверия к своим оценкам задает степень нечеткости влияния сообщения на нечеткую величину курса валюты.

FECM рассчитывает тенденции валютных курсов в два этапа.

Этап 1. Определение совместного влияния сообщений на каждую из валют.

В каждый из моментов времени для каждого сообщения (активного в данный момент времени для данной валюты) определяется нечеткая величина влияния на валюту (например, EUR), как показано на рис. 12.

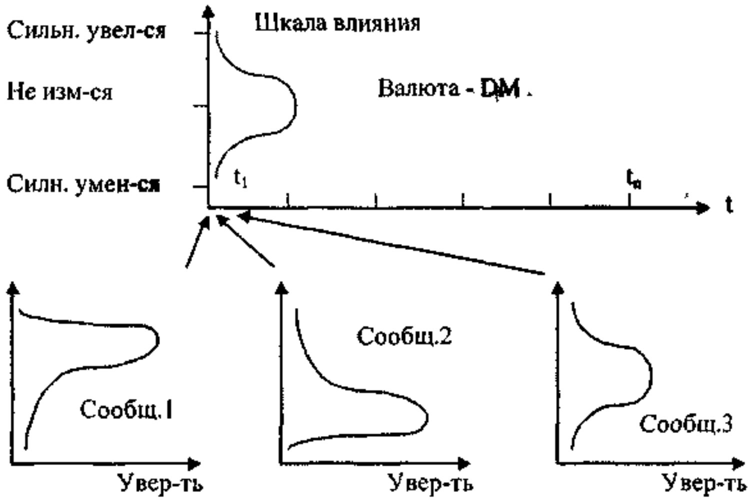


Рисунок 12. Определение нечеткой величины влияния на валютупотока сообщений.

Этап 2. Определение отношений валют.

На основании величин влияния сообщений на две валюты рассчитываются отношения валют в каждый из моментов времени.

Таким образом, принцип обработки сообщений в FECM можно отразить следующей последовательностью:

Сообщения → Валюты →Отношения валют.

Более детальное описание FECM и правила работы с ним изложены во встроенной системе Windows-помощи и соответствующем руководстве пользователю этого программного продукта.

Кто пользователи?

Класс потенциальных клиентов - банки, дилинговые центры и иные финансовые институты, а также субъекты внешнеэкономической деятельности и т.п. FECM нужен не только участникам мирового финансового рынка, трейдерам валютных бирж, но и участникам товарных и иных внешнеэкономических операций, которым прогнозные курсы валют нужны для оценок эффективности планируемых операций, для принятия тактических и стратегических решений в своей внешнеэкономической деятельности.

Апробация.

Программа FECM прошла успешную апробацию в ряде финансовых структур, активно торгующих на рынке FOREX.

Отдельный фрагмент результатов апробации для валюты EUR представлен в табл. 2. Дата осуществления прогноза: 13.09.1999 г. Период прогнозирования: 13.09.1999 г. - 17.09 1999 г.

Таблица 2. Результаты торгов по EUR на основе прогноза

Дата	Время покупки	Время продажи	Результат, $ (для открытой позиции $1000)	Результат, $ (для открытой позиции $25000)
15.09.99	2^{00}	10^{00}	500	2000
	17^{30}	22^{30}	1500	6000
16.09.99		9^{30}	2060	8250
	16^{30}	9^{30}	750	3000
	16^{30}	22^{30}	500	2000
17.09.99	12^{30}	8^{30}	375	1500
	12^{30}	22^{00}	375	1500
Итого			**6060**	**24250**

Позволяет.

Решение на практике задач анализа и прогноза валютных курсов требует достаточно высокого уровня подготовки специалистов, много времени и сил для анализа потока событий и определения их влияния на биржевую ситуацию. Использование FECM позволит не только повысить достоверность прогнозов, но и сократить время, затрачиваемое на их получение, а отчасти и снизить требования к качеству подготовки специалистов.

Требования.

Минимальная потребная конфигурация вычислительной системы - IBM-совместимый PC-компьютер с Windows '9x, Pentium-133 и ОЗУ 8Mb.

6. Приложение МаркетЭффект для системы FinExpert

Общие замечания.

Приложение **МаркетЭффект** является совместной разработкой компаний "ИНЭКС" и IDM Ltd Co (Украина). Оно предназначено для выработки эффективных маркетинговых решений предприятиями в сфере производства, торговли, оказания услуг. Ориентировано на логистические задачи, связанные как с продвижением (продажей) товаров на рынок, так и закупками сырья, материалов, энергоресурсов и т.п. Создано для руководящего состава предприятий, персонала служб управления, маркетинга и сбыта предприятий, то есть для принимающих участие в выработке стратегий предприятия на рынке. Приложение построено на базе Fuzzy-технологии, эксклюзивно принадлежащей компании "ИНЭКС". Благодаря этому приложение позволяет решать возложенные на него задачи и обрабатывать весь возможный спектр исходной информации на общей идеологической и инструментальной основе, не ограничиваясь при этом использованием только точных, числовых данных о состоянии рынка. Приложение позволяет дополнительно учитывать также очень ценные знания специалистов о рынке и предположения о его развитии, несмотря на то, что эта информация имеет описательный, часто нечисловой, нечеткий характер.

Функционирует Приложение МаркетЭффект в составе системы учета и управления предприятиями FinExpert разработки компании IDM В совокупности с другими приложениями системы FinExpert оно обеспечивает аналитическую поддержку и оперативное решение задач автоматизации и стратегического управления предприятиями.

Назначение.

Приложение МаркетЭффект предназначено для, выработки эффективных маркетинговых решений коммерческими и государственными предприятиями среднего и крупного масштаба в сфере производства, торговли, оказания услуг. Оно направлено на решение задач, связанных с продвижением (продажей) товаров на рынок, с закупками сырья, материалов, энергоресурсов и г.п.

Приложение функционирует в составе системы FinExpert разработки компании IDM. Учетные данные по объемам продаж (покупок), накапливаемые системой FinExpert, служат в МаркегЭффект исходной точкой для анализа рынка (спроса, предложения, цен).

Приложение ориентировано на руководящий состав предприятий, персонал их служб управления, маркетинга и сбыта, на всех, кто принимает участие в выработке стратегии действий предприятия на рынке.

Приложение МаркетЭффект позволяет решать следующие задачи:

1. Анализ рынка.
2. Анализ и прогноз продаж (покупок).
3. Прогнозирование эффективности и рисков.
4. Планирование и анализ маркетинга.
5. Поиск эффективных схем и стратегий.

Решение этого спектра задач основано на использовании учетной информации системы FinExpert, данных, импортируемых из других компьютерных программ, а также информации, вводимой непосредственно пользователем приложения МаркетЭффект.

Технология выработки эффективных маркетинговых решений.

Динамика развития рынка определяется множеством факторов, зависящих от сектора рынка, макроэкономических процессов, активности конкурентов, предпочтений покупателей и т.д. Эти же факторы, в свою очередь, оказывают влияние на работу предприятия, на величины его постоянных и переменных издержек, могут нарушать равновесие в секторе рынка.

Предприятие тоже не является пассивным наблюдателем. В первую очередь, оно определяет наиболее эффективную ценовую политику, проводит маркетинговые мероприятия по изменению ситуации в свою пользу либо по компенсации воздействия негативных факторов. Эти мероприятия согласовываются между собой и объединяются в целостные маркетинговые стратегии.

За счет учета текущего состояния рынка и его динамики, анализа указанных факторов, маркетинговых мероприятий и стратегий определяются возможные (прогнозируемые) объемы продаж (покупок) товаров и услуг, а на основе этого - прогнозные эффективность и риски деятельности предприятия

Для оптимизации принимаемых решений на предприятии проектируются альтернативные схемы и стратегии, влияющие на изменение эффективности и рисков конкретно анализируемого проекта или их совокупности, и проводятся соответствующие расчеты с учетом прогнозного изменения рыночной ситуации. На основании полученных решений в соответствии с определенной системой предпочтений, отвечающей потребностям предприятия, осуществляется оценка альтернативных схем и стратегий и выбор наиболее эффективного решения.

Приложение МаркетЭффект в совокупности с другими приложениями системы FinExpert обеспечивает выработку эффективных маркетинговых решений предприятия в соответствии с приведенными основными положениями технологии Обобщенная схема решения маркетинговых задач показана на рис.13.

В основе приложения МаркетЭффект лежит микроэкономическая модель рынка (рис. 14), базирующаяся на моделировании.

- кривой спроса;
- кривой предложения.

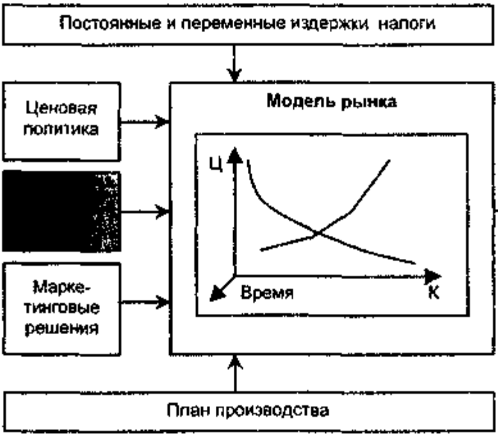


Рисунок 13. Обобщенная схема решения маркетинговых задач

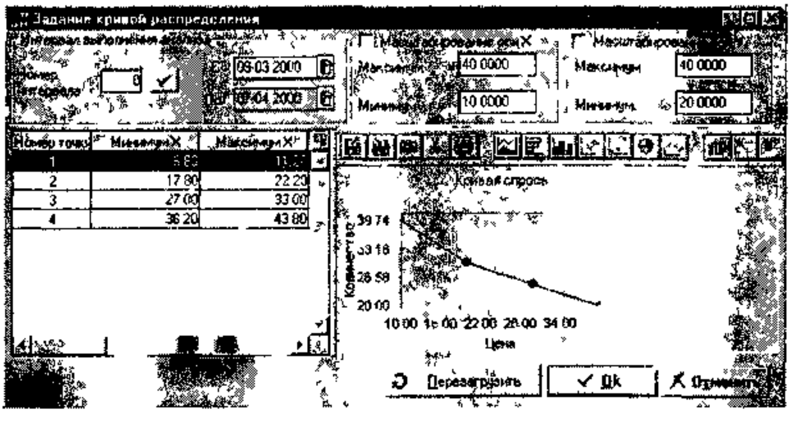


Рисунок 14. Микроэкономическая модель рынка

Микроэкономическая модель рынка локализуется относительно сегмента рынка, типа рынка (сырья, конечной продукции и т.д.), вида товара (группы товара), временного интервала действия модели (год, месяц, квартал и т.д) и других признаков. На основе моделирования определяются прогнозные денежные потоки (cash flow) и другие основные финансово-экономические показатели реализации проектов предприятия. Кроме получения значений этих показателей эффективности деятельности предприятия, на базе микроэкономической модели рынка может определяться ряд дополнительных маркетинговых характеристик:

- рыночное равновесие;
- дефицит;
- избыток;
- эластичность спроса по ценам, по доходам, перекрестная и др.

Использование Fuzzy-технологии позволяет получать диапазоны прогнозных значений величин в соответствии с определенной долей уверенности. Поэтому пользователь приложения всегда имеет возможность оценить степень риска как анализируемого проекта в целом, так и его отдельных показателей (рис. 15).

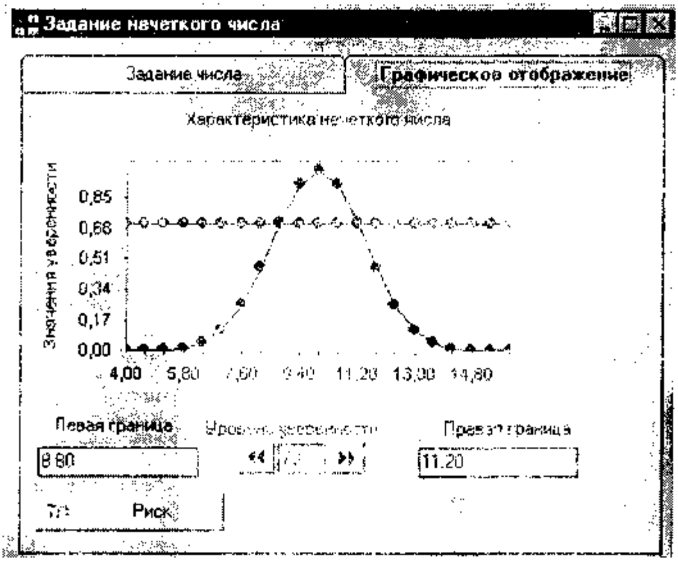


Рисунок 15. Распределение уверенности нечеткого числа.

Моделирование рынка, спроса и предложения с помощью приложения МаркетЭффект практически с такой же эффективностью может быть выполнено с использованием другого, автономного продукта фирмы "ИНЭКС" - **Fuzzy for Excel,** в который встроены специализированные функции (FuzzyIntersection и др.) - аналоги возможностей приложения МаркетЭффект.

Пример

В качестве примера задачи, которая решается приложением МаркетЭффект, предлагается рассмотреть гипотетический проект ввода на рынок "линейки" новых товаров.

Анализ рыночной ситуации

а) Кривая спроса показана на рис. 16.

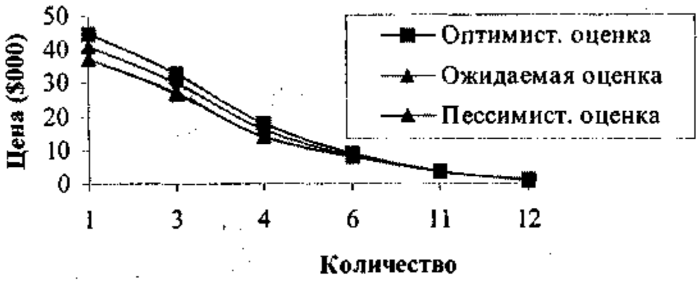


Рисунок 16. Кривая спроса.

б) **Ценовая** политика предприятия первоначально не предполагает изменения во времени и представлена в табл. 3.

Таблица 3. Ценовая политика предприятия

№	Вид товара	Стоимость, $000
1	Товар А	3
2	Товар Б	21
3	Товар В	25
4	Товар Г	30
5	Товар Д	36

в) Распределение затрат на ввод "линейки" товаров на рынок представлено в табл. 4.

Таблица 4. Распределение затрат ($000)

2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.
87	169	169	169	169	169

г) Ставка дисконта составляет около 20%.

д) Налогообложение учитывается как налог с прибыли в размере 32%.

Постановка задачи

На основе анализа наиболее ожидаемых макро- и микроэкономических факторов, воздействия внешних факторов и политики предприятия спрогнозировать значения показателей эффективности проекта на период 2000-2005 гг.

Решение задачи

Как показал анализ, наиболее ожидаемыми макроэкономическими факторами, которые могут влиять на ввод линейки новых товаров, являются факторы, связанные с изменением доходов потребителей вследствие:

- наличия кризисных явлений в экономике;
- изменения уровня странового риска.

Учет изменения доходов потребителей в модели **осуществляется** посредством интегральной корректировки уровня **спроса, значения** которой представлены в табл. 5 и на рис. 17.

Таблица 5. Динамика влияния макропроцессов на изменение доходов потребителей

Величина корректировки, (количество продаж)	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.
Наиболее ожидаемая оценка	-2	-2	-1	-1	0	0
Оптимистическая оценка	-1	-1	-1	-0.5	0.5	0.5
Пессимистическая оценка	-3	-2.5	-1.3	-2	-1	-0.2

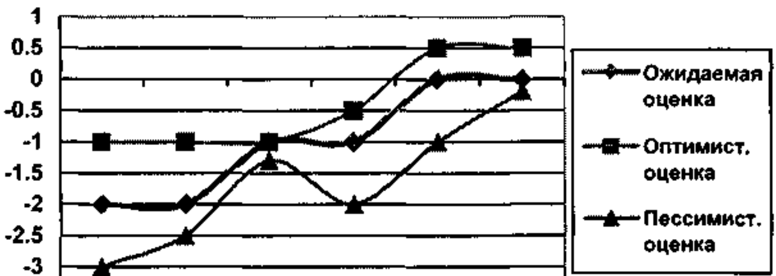


Рисунок 17. Динамика влияния макропроцессов

Анализ микроэкономической ситуации в рассматриваемом секторе рынка показал, что к наиболее ожидаемым факторам микроэкономического характера следует отнести факторы:

- замещение линейкой новых товаров уже существующих на рынке товаров;
- изменение потребительских предпочтений вследствие того, что вводимые товары по качеству выше существующих.

Влияние микроэкономических факторов на модель рынка представлено в табл. 6.

Таблица 6. Влияние микроэкономических факторов на смещение кривой спроса

	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.
Факторы замещения						
Все товары	-3	-2	-1	-1	-1	-1
Факторы предпочтения						
Вид товара						
Товар А	0	0	0	0	0	0
Товар Б	0	0	0	0	0	0
Товар В	0	1	1	1	0	0
Товар Г	0	1	1	1	0	0
Товар Д	0	1	1	2	2	2

В соответствии с действием факторов была скорректирована микроэкономическая модель, на которой затем получены потоки:

- продаж;
- затрат;
- доходов,

а также рассчитаны значения показателей эффективности проекта:

- чистая приведенная прибыль - отрицательная;
- срок окупаемости - ноль;
- внутренняя ставка рентабельности - ноль.

Таким образом, базовый вариант реализации проекта экономически неэффективен. Основной причиной явилось неблагоприятное влияние макроэкономических факторов.

Тогда было принято решение об изменении условий реализации проекта по двум направлениям:

□ проведение мероприятий, повышающих предпочтения потенциальных покупателей;

□ выработка наиболее рациональной ценовой политики.

В процессе решения были выработаны и рассмотрены несколько различных вариантов сочетаний маркетинговых мероприятий и ценовой политики. В результате решено предоставлять покупателям ряд дополнительных услуг, требующих некоторых затрат, но и повышающих качества предлагаемого товара. Влияние таких услуг на кривую спроса отражено в табл. 7.

Таблица 7. Влияние дополнительных услуг на смещение кривой спроса

1999 г.	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.
0	0	1	1	1	1

Также было определено, что наиболее рациональной ценовой политикой является политика скидок на начальном этапе ввода линейки новых товаров на рынок, характеристика которой приведена в табл. 8. Использование скидок позволит скомпенсировать неблагоприятное влияние макроэкономических факторов, основная часть которого приходится на 2000-2001 гг.

Таблица 8. Рациональная ценовая политика

№	Вид товара	Стоимость ($000)	Скидка до 2002 г., %
1	Товар А	3	до 58
2	Товар Б	21	до 62
3	Товар В	25	до 60
4	Товар Г	30	до 64
5	Товар Д	36	до 64

Показатели экономической эффективности проекта для выработанного варианта его реализации приведены в табл. 9.

Таблица 9. Показатели экономической эффективности проекта ($000)

	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г.	2004 г.	2005 г.
Доход	32,1	106,7	327,1	363,1	423,1	423,1
Затраты	(92,446)	(183,93)	(183,93)	(183,93)	(183,93)	(183,93)
Корпоративный налог	0	0	45,8	57,3	76,5	76,5
Дисконтированный поток доходов	32,1	121	348,2	557,1	760	928,2
Дисконтированный поток затрат с учетом налога	(92,446)	(245,13)	(404,7)	(546,3)	(671,1)	(772)
Дисконтированный поток прибыли	**(60,346)**	**(124,13)**	**(56,5)**	**10,8**	**88,9**	**156,2**

Чистая приведенная прибыль NPV (Net Present Value) на конец 2005 года — 156,2

Срок окупаемости — конец 2002 года

Внутренняя ставка рентабельности IRR (Internal Rate of Return) — 0,79

Внутренняя ставка рентабельности IRR 0,65
(Internal Rate of Return) через 5 лет (2000-2004 гг.)

Дополнительно было проведено выявление основных рисков и выполнены прогнозные количественные расчеты их влияния на полученные показатели эффективности. Риски проекта выражаются в потере части прибыли вследствие влияния неблагоприятных факторов (табл. 10).

Таблица 10. Характеристика рисков ($000)

	2000 г.	2001 г.	2002 г.	2003 г	2004 г.	2005 г.
Пессимистические оценки						
Дисконтированный поток доходов	25,7	114,6	341,8	550,7	753,6	921,8
Дисконтированный поток затрат с учетом налога	(92,446)	(245,13)	(404,7)	(546,3)	(671,1)	(772)
Дисконтированный поток прибыли	**(66,746)**	**(130,53)**	**(62,9)**	**4,4**	**82,5**	**149,8**
Срок окупаемости	**Конец 2002 года**					
Внутренняя ставка рентабельности	**0,7**					
Оптимистические оценки						
Дисконтированный поток доходов	38,5	127,4	354,6	563,5	776,4	934,6
Дисконтированный поток затрат с учетом налога	(92,446)	(245,13)	(404,7)	(546,3)	(671,1)	(772)
Дисконтированный поток прибыли	**(53,946)**	**(117,73)**	**(50,1)**	**17,2**	**105,3**	**162,6**
Срок окупаемости	***Конец 2001 года***					
Внутренняя ставка рентабельности	**0,85**					
Возможные потери (ожидаемая оценка минус пессимист.)	**6,4**					

Как видно, неавтоматизированное или с использованием традиционных инструментов решение подобных задач, особенно расчета рисков, весьма трудоемко и проблематично. Оно связано с необходимостью учета ряда неточных, косвенных данных, неопределенности относительно факторов будущего, просчета множества вариантов реализации проекта.

Использование приложения МаркетЭффект позволяет существенно сократить временные и интеллектуальные затраты на подготовку стратегических маркетинговых решений, повысить точность и адекватность прогноза экономической эффективности результатов осуществления проекта, деятельности предприятия.

7. Система анализа данных Data Engine, версия 2.1

Проблема.
В последние годы драматически увеличилось количество данных, с которыми компании вынуждены постоянно работать, и особенно - с хранимыми в электронном виде в компьютерах. Найти зависимости, внутренние взаимосвязи между этими данными, вытащить из них полезную информацию для принятия срочного решения с помощью обычных компьютерных программ удается далеко не всегда. Особенно, если решаются такие сложные задачи как прогнозное моделирование и т.п. В таких ситуациях система интеллектуального анализа данных **Data Engine** разработки германской компании **MIT**-Management Intelligenter Technologien GmbH просто необходима.
Возможности.
Data Engine - это система, удачно сочетающая мощные возможности по обработке данных обычными методами и с помощью новых подходов: **нечетких технологий и нейронных сетей**. Она изначально нацелена на решение очень сложных проблем, в частности, решение задач прогнозирования, классификации, работы с нелинейностями. В то же время имеет несложный интерфейс, обеспечивает прекрасную визуализацию и интерпретацию получаемых решений, что видно из приведенных ниже фрагментов решения задач прогноза пассажиропотока и классификации клиентов (рис. 18, 19).
Хорошие аналитические возможности Data Engine обусловлены использованием современных методов:

- нечеткой логики, правил "если-то";
- классификации и кластеризации;
- нечетких нейронных сетей.

Система Data Engine обеспечивает полную совместимость с типовым офисным программным обеспечением (с электронными таблицами типа MS Excel, базами данных SQL, Paradox и др.), а также возможность комплексного использования системы Data Engine с целым семейством дополнительных к ней модулей разработчика. С помощью Data Engine можно также под свои потребности анализа данных сделать собственные программные приложения, которые будут работать самостоятельно, без Data Engine, под управлением только операционной системы вашего компьютера (Windows, UNIX, SUN или др)

Применение.

Что дает использование Data Engine"? Из имеющегося хаоса данных - **новую** информацию к принятию насущного решения. Не случайно разработчиками Data Engine системе присвоен лозунг

"ОТ ДАННЫХ - К ИНФОРМАЦИИ !"

Data Engine уже успешно используется в

- моделировании, анализе и оптимизации процессов,
- банках и финансовом обслуживании,
- торговле, маркетинговых базах данных;
- диагностике и мониторинге,
- риск-менеджменте,
- образовании

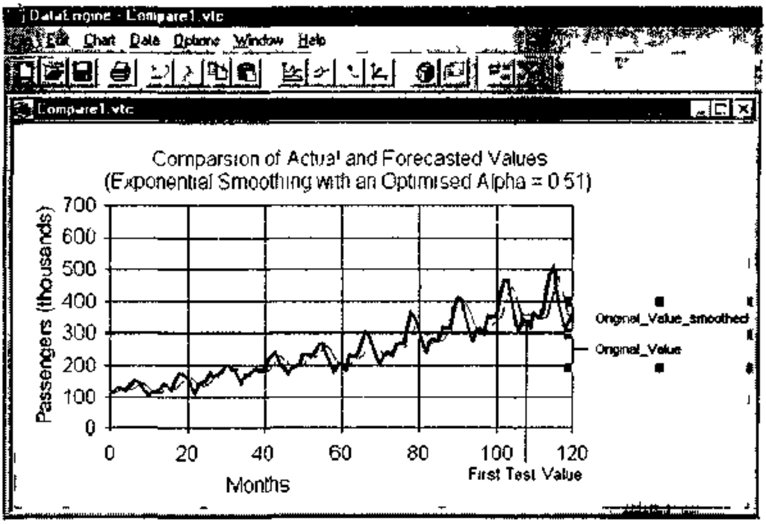


Рисунок 18. Результаты решения задачи прогноза пассажиропотока

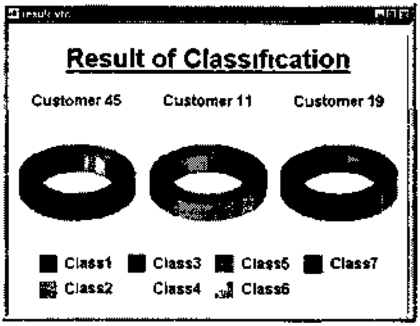


Рисунок 19. Результаты решения задачи классификации клиентов

В частности, Data Engine используется при анализе кредитоплатежности клиентов, оценке объектов страхования, прогнозировании сбыта товаров, подборе потенциальных покупателей итд

Клиентами системы Data Engine уже стали Mercedes Benz, Siemens, Philips и несколько сотен других известных компаний и учебных заведений Германии, США, Великобритании и других стран.

Литература

1. Броневич А.Г., Каркищенко А.Н. Описание нечетких мер в рамках вероятностного подхода // Нечеткие системы и мягкие вычисления, том 2, № 7, 2007. стр. 7 30.
2. Bronevich A.G. An investigation of ideals in the set of fuzzy measures // Fuzzy Sets and Systems, v. 152, 2005, pp. 271 288.
3. Cozman F. A brief introduction to the theory of sets of probability measures, http: // www.cs.cmu.edu/ fgcozman/qBayes.html. 1999.
4. Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. Chapman and Hall, London. 1991.
5. Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. М.: Радио и связь, 1991.
6. Klir G.J. Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2006.
7. Bronevich A.G., Klir G.J. Measures of uncertainty for imprecise probabilities: An axiomatic approach // International Journal of Approximate Reasoning, vol. 51. 2010, pp. 365 390.
8. Dempster A.P. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping /, Ann. Math. Statist., 1967, v.38, pp.325 339.
9. Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton University Press, Princeton. N.J., 1976.

10. Bronevich A.G., Lepskiy A.E. Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition. Proc. of the 10th IFSA World Congress, 2003, Istanbul, Turkey, pp. 151 154.

11. Черников С.Н. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.
[12. Wallev P. Coherent lower (and upper) probabilities. Technical Report 22, Department of Statistics, University of Warwick, U.K., 1981.
13. Bronevich A.G. On the closure of families of fuzzy measures under eventwise aggregations // Fuzzy sets and systems, v. 153. 2005, pp. 45-70.
14. Jaffray J.Y. Bayesian updating and belief functions. IEEE Tr. Systems Man and Cybernetics, 1992, v. 22, pp. 1144 1152.
15. Fagiu R., Halpern J.Y. A new approach to updating beliefs. Uncertainty in Art. Int. 1991, v. 6, 347 374.
16. Smets P. Belief functions and the transferable belief model, http: //www.sipta.org/docuinentatioii/belief/belief.pclf. 1999.

17. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. - М.: Радио и связь, 1990.
18. Denneberg D. Non-additive measure and integral, basic concepts and their role for applications. In M. Grabisch, T. Murofishi, M. Sugeiio (eds.) Fuzzy measures and integrals Theory and applications. Studies on fuzzyness and soft computing, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.
19. De Cooman G. Precision-imprecision equivalence in abroad class of imprecise hierarchical uncertainty models //' Journal of Statistical Planning and Inference, v. 105, 2002, pp 175 198.
20. Denneberg D. Conditioning (updating) non-additive measures // Annals of Operations Research, v. 52, 1994, pp. 21-42.

21. Denneberg D. Totally monotone core and products of monotone measures // International Journal of Approximate Reasoning, v. 24, 2000, pp. 273 281.