

**Парадигма развития науки**

**Методологическое обеспечение**

**А. Е. Кононюк**

**ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ  
МАТЕМАТИКА**

**Книга 4**

**Алгебры и  
дифференциалы**

**Часть 4**

**Киев  
«Освіта України»  
2015**



**Кононюк Анатолий Ефимович**



**УДК 51 (075.8)**

**ББК В161.я7**

**К213**

Рецензенты:

**В. В. Довгай** — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет «КПИ»);

**В. В. Гавриленко** — д-р физ.-мат. наук, проф.,

**О. П. Будя** — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет экономики, туризма и права);

**Н. К. Печурин** — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

**Кононюк А. Е.**

**К213 Дискретно-непрерывная математика. (Алгебры. К.4,Ч.4 (в 7 частях)).** — 15-и кн. Кн 4.— К.: Освіта України. 2015. 690 с.

**ISBN 978-966-373-693-8** (многотомное издание)

**ISBN 978-966-373-694-5** (книга 4)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единую методологически взаимосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

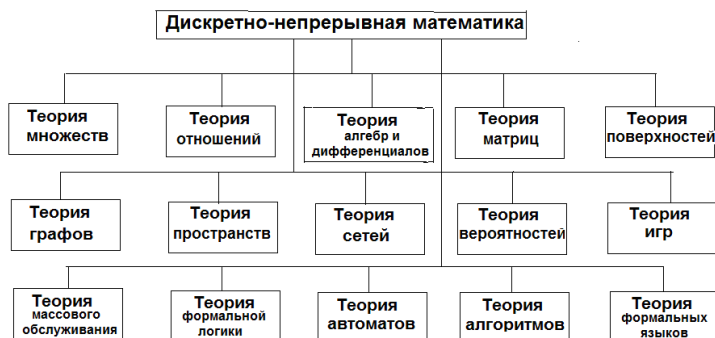
**УДК 51 (075.8)**

**ББК В161.я7**

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание) © Кононюк А. Е.,

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 4) © Освіта України, 2015

Структура  
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)  
"Дискретно-непрерывная математика"



## Оглавление

1. Векторный анализ.....	11
1.1. Кусочно-гладкая ориентированная кривая.....	11
1.2. Криволинейный интеграл первого рода.....	14
1.3. Интеграл от вектора вдоль кривой.....	16
1.4. Поле потенциала.....	22
1.5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах.....	30
1.6. Ориентация плоской области.....	33
1.7. Формула Грина.....	35
1.8. Интеграл по поверхности первого рода.....	40
1.9. Ориентация поверхности.....	42
1.10. Система координат и ориентация поверхности.....	44
1.11. Интеграл по ориентированной плоской области.....	49
1.12. Поток вектора через ориентированную поверхность.....	52
1.13. Дивергенция. Теорема Гаусса — Остроградского.....	57
1.14. Соленоидальное поле.....	65
1.15. Формула Стокса.....	66
1.16. Векторное поле.....	71
2. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА.....	90
2.1. Элементы тензорной алгебры.....	90
2.1.1. Аффинная система координат на плоскости.....	90
2.1.2. Скалярное произведение и ковариантные координаты.....	93
2.1.3. Косое произведение и дополнительный вектор.....	95
2.1.4. Понятие тензора.....	98
2.1.5. Основные действия тензорной алгебры.....	102

2.1.6. Симметричный тензор второй валентности.....	109
2.1.7. Свертывание тензоров.....	115
2.2. Основы тензорного анализа.....	117
2.2.1. Тензорное поле и его дифференцирование.....	117
2.2.2. Механика деформируемой среды.....	130
2.2.3. Ортогональные криволинейные системы координат..	138
2.2.4. Подвижный репер ортогональной криволинейной системы координат и тензорные поля.....	146
2.2.5. Дифференцирование тензорного поля в криволинейных координатах.....	157
3. Тригонометрические ряды и ряды Фурье.....	175
3.1. Тригонометрические ряды.....	175
3.2. Сходимость тригонометрических рядов.....	181
3.3. Ряд Фурье.....	183
3.4. Признаки сходимости рядов Фурье.....	186
3.5. Ортогональные свойства тригонометрических функций.....	190
3.6. Коэффициенты Фурье.....	191
3.7. Оценка коэффициентов Фурье.....	192
3.8. Пространство функций со скалярным произведением.....	193
3.9. Ортогональная система функций.....	197
3.10. Полнота тригонометрических функций.....	200
3.11. Комплексная форма ряда Фурье.....	203
3.12. Понятие интеграла Фурье. Повторный интеграл Фурье.....	205
3.13. Косинус- и синус-преобразования Фурье.....	212
3.14. Примеры.....	213
3.15. Приближение интеграла Фурье.....	216
3.16. Сумма Фейера.....	217
3.17. Полнота систем функций в $C$ и $L^2$ .....	223
3.18. Сведения из теории кратных рядов Фурье.....	225
4. Тензорная тригонометрия.....	237
Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц.....	238
4.1. Коэффициенты характеристических многочленов.....	250
4.1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов.....	250
4.1.2. Генеральное неравенство средних величин.....	252
4.1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями.....	259
4.1.4. Структура и основные свойства скалярных и матричных характеристических коэффициентов.....	264
4.1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы.....	270
4.1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы.....	274

4.1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме.....	276
4.2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы.....	279
4.2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка.....	279
4.2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы и для её приведения к основной канонической форме.....	282
4.2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме.....	284
4.2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы.....	286
4.2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица.....	289
4.3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц.....	292
4.3.1. Минорант матрицы и его применение.....	292
4.3.2. Синусные характеристики матриц.....	296
4.3.3. Косинусные характеристики матриц.....	298
4.3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц.....	299
4.4. Два альтернативных варианта комплексификации.....	301
4.4.1. Сопоставление основных вариантов.....	301
4.4.2. Примеры адекватной комплексификации.....	305
4.4.3. Примеры эрмитовой комплексификации.....	308
Раздел II. Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии.....	309
4.5. Тензорная евклидова и квазиевклидова тригонометрия.....	310
4.5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения.....	310
4.5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы.....	313
4.5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлекторы.....	318
4.5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов - через прямоугольные и через квадратные сингулярные матрицы.....	321
4.5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов.....	324
4.5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа.....	330
4.5.7. Тригонометрическая теория простых корней. $\sqrt{I}$ .....	336
4.5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс.....	338

4.5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами.....	341
4.5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа.....	344
4.5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косогональных проекторов и рефлекторов.....	348
4.5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции.....	352
4.6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия.....	356
4.6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы .....	356
4.6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа.....	359
4.6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиевклидовой и псевдоевклидовой интерпретации.....	365
4.6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости.....	368
4.6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции.....	372
4.7. Тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности.....	373
4.7.1. Коммутативность простых матриц.....	373
4.7.2. Антикоммутативность пары простых матриц.....	375
4.8. Тригонометрические спектры и неравенства.....	379
4.8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы.....	379
4.8.2. Генеральное косинусное неравенство.....	382
4.8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций.....	386
4.8.4. Генеральное синусное неравенство.....	387
4.9. Геометрические нормы матричных объектов.....	392
4.9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиевклидова) пространства.....	392
4.9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм.....	396
4.9.3. Геометрический смысл общих квадратичных норм.....	398
4.9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линеорные фигуры.....	400
4.10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии.....	403
4.10.1. Адекватный вариант.....	403
4.10.2. Эрмитов вариант.....	404
4.10.3. Псевдоизация в бинарных комплексных пространствах.....	406



4.11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств...	409
4.11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства...	409
4.11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций.....	411
4.11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций..	417
4.11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации.....	421
4.12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского.....	426
4.12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий.....	426
4.12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского.....	438
4.12.3. Специальный математический принцип Относительности.....	442
<b>Приложение 1.</b> Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности.....	445
Введение .....	445
Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство-время Минковского как математические абстракции и физическая реальность.....	451
Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца.....	464
Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования.....	468
Глава 4А. Лоренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования.....	473
Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	483
Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в квазиевклидово и в сжатое квазиевклидово пространства.....	505
Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии.....	512
Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии.....	544
Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения?.....	555
Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия.....	583

<b>Приложение 2</b>	<b>УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ</b>	<b>602</b>
1.	Температура тела	602
2.	Задача Дирихле	602
3.	Задача Дирихле для круга	605
4.	Задача Дирихле для полуплоскости	607
5.	Уравнение теплопроводности в стержне	609
6.	Теплопроводность для бесконечного стержня	614
7.	Малые колебания струны	616
8.	Колебание бесконечной струны. Формула Даламбера	620
9.	Колебание круглой мембраны	622
10.	Общая задача Штурма — Лиувилля	626
11.	Интеграл энергии (Дирихле)	628
12.	Применение преобразований Фурье	633
<b>Приложение 3.</b>	<b>Использование тензорного исчисления к</b>	
	<b>вопросам механики и физики</b>	<b>638</b>
1.	Тензор инерции	638
2.	Некоторые свойства кристаллов, связанные с тензорами	
	второй валентности	647
3.	Тензоры напряжений и деформаций	659
4.	Дальнейшие свойства кристаллов	672
	Литература	685

# 1. Векторный анализ

## 1.1. Кусочно-гладкая ориентированная кривая

Кривая

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b) \quad (1)$$

называется *непрерывной кусочно-гладкой*, если функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  непрерывны на  $[a, b]$  и отрезок  $[a, b]$  можно разбить на конечное число частичных отрезков точками

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

так, что на каждом из них функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  имеют непрерывные производные, одновременно не равные нулю. На рис. 1 изображена непрерывная кусочно-гладкая кривая.

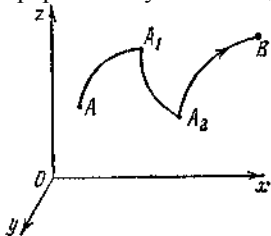


Рис. 1

В точках  $A_1$  и  $A_2$  она непрерывна, но производные  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  все или некоторые терпят разрыв (первого рода!).

Кривую (1) мы будем обозначать одной буквой, например, буквой  $\Gamma$ . Обычно  $\Gamma$  обозначает не только геометрическое место точек  $(x, y, z)$ , определяемых уравнениями (1), но и порядок следования этих точек, когда  $t$  непрерывно возрастает от  $a$  до  $b$  ( $a < b$ !).

В этом смысле говорят, что  $\Gamma$  есть *ориентированная кривая*. Порядок следования обозначают на рисунке стрелкой (рис. 1) — когда  $t$  непрерывно *возрастает* от  $a$  до  $b$ , точка  $(x, y, z)$  движется по  $\Gamma$  в направлении стрелки.

Если  $t = \lambda(\tau)$  есть функция, имеющая непрерывную положительную производную на некотором отрезке  $[c, d]$  и при этом  $\lambda(c) = a$ ,  $\lambda(d) = b$ , то уравнение

$$\mathbf{r}(\lambda(\tau)) = \varphi[\lambda(\tau)]\mathbf{i} + \psi[\lambda(\tau)]\mathbf{j} + \chi[\lambda(\tau)]\mathbf{k} \quad (c \leq \tau \leq d) \quad (1')$$

Определяет ту же ориентированную кривую, что и  $\Gamma$ . Ее обозначают той же буквой  $\Gamma$ , только говорят в случае уравнения (1), что  $\Gamma$  определяется параметром  $t$ , а в случае (1')—параметром  $\tau$ . В обоих случаях при возрастании  $t$  от  $a$  до  $b$  или возрастании  $\tau$  от  $c$  до  $d$  соответствующие точки  $\Gamma$  движутся в одном и том же направлении.

Другое дело, если совершить замену  $t=\lambda(\tau)$ , где  $\lambda(\tau)$  имеет непрерывную отрицательную производную на отрезке  $[c, d]$  ( $c < d!$ ). В этом случае  $\lambda(c)=a$ ,  $\lambda(d)=b$ , и при непрерывном возрастании  $\tau$  от  $c$  до  $d$  параметр  $t$  будет убывать и стрелку на нашем геометрическом объекте придется направить в другую сторону.

Поэтому кривую (1') в случае, когда  $\lambda'(\tau)<0$ , мы будем обозначать другим символом  $\Gamma_-$  и говорить, что  $\Gamma_-$  есть та же кривая, что и  $\Gamma$ , но ориентированная в противоположную сторону. Иногда исходную ориентированную кривую мы будем обозначать символом  $\Gamma_+$ .

Ориентированная кривая (1) называется замкнутой или замкнутым контуром, если  $r(a)=r(b)$  или, что все равно, если

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad \psi(a) = \psi(b), \quad \chi(a) = \chi(b).$$

Иначе говоря, когда значение параметра  $t$  непрерывно возрастает от  $a$  до  $b$ , соответствующая точка  $(x, y, z)$  проходит в пространстве непрерывный путь, начинающийся и кончающийся в одной и той же точке. Если при этом кривая  $\Gamma$  в других точках сама себя не пересекает, то она называется замкнутой само непересекающейся кривой. На рис. 2, а изображена замкнутая самонепересекающаяся кривая, а на рис. 2, б—замкнутая самопересекающаяся кривая.

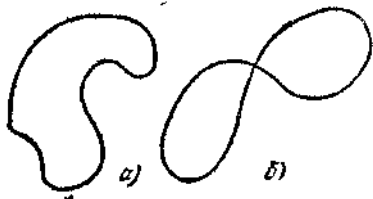


Рис. 2

**Замечание.** Векторное уравнение (1) кривой  $\Gamma$  эквивалентно трем уравнениям

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

**Пример 1.** Пусть кривая  $\Gamma$  задана уравнением

$$r(t) = iR \cos t + jR \sin t$$

$$(x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi).$$

Так как  $x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$ , то данная кривая есть окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат. При возрастании  $t$  от 0 до  $2\pi$  точка  $A = (x, y)$  движется по окружности против часовой стрелки. При этом разным  $t$  соответствуют разные точки  $A$ . При  $t = 0$  и  $t = 2\pi$  имеем  $r(0) = r(2\pi) = iR$ . Значит, окружность является замкнутой самонепересекающейся кривой (рис. 3).

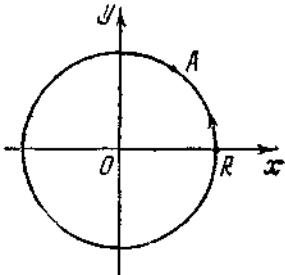


Рис. 3.

**Пример 2.** Кривая

$$r(t) = a(t \cos t + j \sin t) + btk,$$

где  $0 \leq t < \infty$ ,  $a, b$  — положительные числа, называется *винтовой линией*. Ее можно получить следующим образом. Отрезок длины  $a$ , перпендикулярный оси  $z$ , одним концом скользит по оси  $z$  и одновременно поворачивается около оси  $z$ , тогда другой конец отрезка описывает винтовую линию. Мы считаем, что высота подъема отрезка по оси  $z$  пропорциональна углу поворота  $t(z = bt)$ . При возрастании  $t$  точка  $(x, y, z)$  движется как указано на рис. 4.

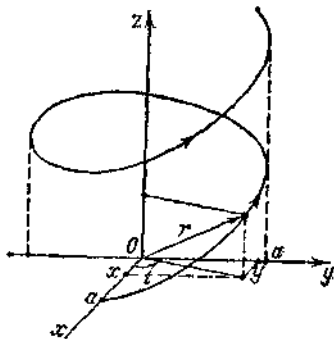


Рис. 4.

Очевидно, что винтовая линия расположена на боковой поверхности кругового цилиндра радиуса  $a$ , с образующей, параллельной оси  $z$ .

## 1.2. Криволинейный интеграл первого рода

Пусть задана непрерывная кусочно-гладкая кривая  $\Gamma$

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} + \chi(t) \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

и пусть на  $\Gamma$  или в окрестности  $\Gamma$  определена непрерывная функция  $F(x, y, z)$ .

*Криволинейным интегралом первого рода от функции  $F(x, y, z)$  по кривой  $\Gamma$  называется число, равное*

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \quad (2)$$

Левая часть (2) есть обозначение интеграла первого рода, а правая часть есть его определение—это обычный определенный интеграл по  $t$  на  $[0, T]$ .

Например, если кривая  $\Gamma$  обладает массой с плотностью распределения  $F(x, y, z)$  в точках  $(x, y, z) \in \Gamma$ , то общая масса  $M$  кривой вычисляется посредством интеграла (2). Ведь элемент материальной кривой, соответствующей отрезку  $[t, t+dt]$  изменения  $t$ , имеет массу, равную, с точностью до бесконечно малой высшего порядка,

$$F ds = F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt,$$

где  $ds$ —дифференциал дуги  $\Gamma$ , это показывает, что  $M$  равна правой части (2).

*Величина интеграла первого рода не изменяется при перемене ориентации кривой:*

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) ds = \int_{\Gamma^-} F(x, y, z) ds. \quad (3)$$

Вычислять массу материальной кривой при помощи интеграла, стоящего в левой части или в правой части (3)—это, очевидно, все равно.

Например, кривую (1) можно задать уравнениями

$$x = \varphi(T - \tau), \quad y = \psi(T - \tau), \quad z = \chi(T - \tau) \quad (0 \leq \tau \leq T),$$

ориентирующими ее в противоположном направлении, и тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^T F[\varphi(T-\tau), \psi(T-\tau), \gamma(T-\tau)] \times \\ & \quad \times \sqrt{\varphi'(T-\tau)^2 + \psi'(T-\tau)^2 + \gamma'(T-\tau)^2} d\tau = \\ & = - \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt = \\ & = \int_0^T F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

**Пример 1.** Пусть вдоль винтовой линии, определенной в примере 2 § 1.1, распределены массы с плотностью  $F(x, y, z) = z^2$ . Найти массу  $M$  участка винтовой линии, когда параметр  $t$  изменяется от 0 до 3 ( $0 \leq t \leq 3$ ).

Запишем уравнение рассматриваемой винтовой линии в виде

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t \leq 3).$$

Тогда

$$\begin{aligned} M &= \int_0^3 F[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \\ &= \int_0^3 b^2 t^2 \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \\ &= b^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^3 t^2 dt = 9b^2 \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл первого рода по эллипсу

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

от функции

$$F(x, y) = \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 + \left(\frac{ay}{b}\right)^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F(x, y) ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) dt = \pi(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

### 1.3. Интеграл от вектора вдоль кривой

#### 1.3.1. Поле вектора.

Пусть  $\Omega$  есть область пространства  $R_3$ , где задана прямоугольная система координат  $x, y, z$  и из каждой точки  $A \in \Omega$  выпущен вектор  $\mathbf{a}$ , зависящий, вообще говоря, от этой точки. Тогда

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in \Omega) \quad (1)$$

или более кратко

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad (1')$$

где  $P, Q, R$ —функции от  $(x, y, z)$ , определенные на области  $\Omega$ .

Говорят, что равенство (1) определяет *поле вектора  $\mathbf{a}$  на области  $\Omega$* .

Если  $P, Q, R$  — непрерывные функции на  $\Omega$ , то и вектор  $\mathbf{a}$  есть непрерывная вектор-функция на  $\Omega$ .

Соответственно, если  $P, Q, R$  имеют непрерывные частные производные, то и про вектор  $\mathbf{a}$  говорят, что он имеет это свойство.

**Пример 1.** Пусть в начале координат  $O$  сконцентрирована масса  $m_1$ . Тогда в области  $\Omega$ , представляющей собой пространство  $R_3$ , без точки  $O$ , возникает поле силы тяготения. Физически его можно обнаружить, если поместить в произвольной точке  $A = (x, y, z)$  (отличной от начала координат  $O$ ) массу  $m_2$ . Тогда масса  $m_2$  будет притягиваться к массе  $m_1$  с силой  $F$ , скалярная величина которой равна

$$|F| = \frac{cm_1m_2}{r^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2)$$

где  $c$ —некоторая постоянная, а  $r$ —расстояние от точки  $A$  до  $O$ . Если считать, что  $cm_1 = 1, m_2 = 1$ , то

$$|F| = \frac{1}{r^2}.$$

Так как вектор  $F$  направлен от точки  $A$  к точке  $O$  (рис. 5), то его компоненты на оси координат  $x, y, z$  соответственно равны

$$P = -\frac{x}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad Q = -\frac{y}{r^3}, \quad R = -\frac{z}{r^3}$$

(вектор  $F$  и направленный отрезок  $\vec{AO}$  образуют с осями координат  $x, y, z$  одинаковые углы, косинусы которых соответственно равны  $-\frac{x}{r}, -\frac{y}{r}, -\frac{z}{r}$ ).



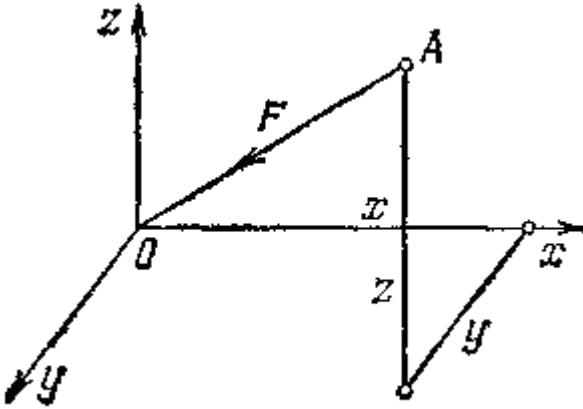


Рис. 5.

В связи с полем вектора тяготения можно рассматривать функцию

$$u(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Легко проверить, что ее частные производные по переменным  $x, y, z$  соответственно равны компонентам вектора  $F$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} = R.$$

Благодаря этому свойству функция  $u$  называется *потенциальной функцией* для вектора  $F$ .

### 1.3.2. Криволинейный интеграл от вектора вдоль кривой

Пусть в пространстве  $R_3$ , где определена прямоугольная система координат  $x, y, z$ , задана ориентированная непрерывная кусочно-гладкая кривая  $\Gamma$  с начальной точкой  $A_0$  и конечной  $A_1$ . Если  $\Gamma$  замкнута, то  $A_0$  совпадает с  $A_1$ . Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

— уравнения  $\Gamma$  и значению  $t = 0$  соответствует точка  $A_0$ , а  $t = T$  — точка  $A_1$ .

В каждой внутренней (не угловой) точке  $A$  любого гладкого куска  $\Gamma$  однозначно определен единичный вектор  $\tau$  касательной к  $\Gamma$ , направленный в сторону возрастания  $t$ .

Пусть на  $\Gamma$  или на множестве  $\Omega$ , содержащем  $\Gamma$ , задано поле непрерывного вектора (задан вектор)

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

где, таким образом,  $P, Q, R$  — непрерывные функции на  $\Gamma$  (или  $\Omega$ ).

Лучше всего представить себе эту картину так (рис. 6): из любой точки  $(x, y, z) \in \Gamma$  (или  $\Omega$ ) выпущен вектор  $\mathbf{a}$ , направление и длина которого зависят от этой точки ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ ).

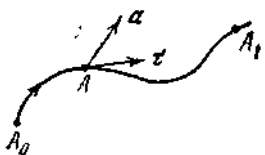


Рис. 6.

Будем считать, что вектор  $\mathbf{a}$  — сила, и надо найти работу этой силы вдоль ориентированного пути  $\Gamma$ .

Пусть  $t$  — значение параметра, которому соответствует точка  $A$  кривой  $\Gamma$ . Значению же  $t+dt$  соответствует точка  $A' \in \Gamma$ . Вектор  $AA'$  приближенно равен вектору

$$d\mathbf{s} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz,$$

$$dx = \varphi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt, \quad dz = \chi'(t) dt,$$

направленному по касательной к  $\Gamma$  в сторону возрастания  $t$  (рис. 7).

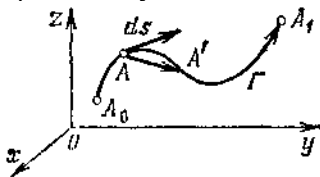


Рис. 7.

Элементарная работа силы  $\mathbf{a}$  при изменении параметра от  $t$  до  $t+dt$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна скалярному произведению векторов  $\mathbf{a}$  и  $d\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{s} = [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) +$$

$$+ Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt.$$

Чтобы получить полную работу вдоль всего ориентированного пути  $\Gamma$ , надо проинтегрировать это выражение по  $t$  на отрезке  $[0, T]$

В результате получим

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}) = \int_0^T [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \quad (3)$$

Левая часть этого равенства называется *криволинейным интегралом вдоль ориентированного пути  $\Gamma$  от вектора  $\mathbf{a}$*  или, короче, *интегралом от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $\Gamma$* .

Правая часть (3) представляет собой обычный интеграл от указанной там функции по  $t$  в пределах  $[0, T]$ .

Левая часть есть обозначение нового понятия — интеграла от вектора  $\mathbf{a}$  по  $\Gamma$ , а правая—есть его определение.

Отметим, что функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны по  $(x, y, z) \in \Gamma$ , функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  непрерывны по  $t$  на отрезке  $[0, T]$ , функции же  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ ,  $\chi'(t)$  непрерывны для всех значений  $t \in [0, T]$ , за исключением конечного числа точек

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T,$$

где они, быть может, имеют разрывы первого рода.

Но тогда подынтегральная функция от  $t$  в правой части (3) непрерывна на каждом из отрезков  $[t_k, t_{k+1}]$  в отдельности и интеграл

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}$$

от этой функции существует, поэтому существует интеграл

$$\int_0^T = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}}.$$

Криволинейный интеграл (3) записывают еще следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\mathbf{a}, d\mathbf{s}) &= \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \\ &= \int_{\Gamma} (P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы вычислить его, надо подставить в него соответственно

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & y &= \psi(t), & z &= \chi(t), \\ dx &= \varphi'(t) dt, & dy &= \psi'(t) dt, & dz &= \chi'(t) dt \end{aligned}$$

и полученное выражение проинтегрировать от 0 до  $T$ .

Как левая, так и правая часть равенства (4) называется еще *криволинейным интегралом второго рода*.

### 1.3.3. Свойства криволинейных интегралов второго рода.

Если ориентированная кривая  $\Gamma$  представляет собой сумму двух различных ориентированных кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ), то

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} \, ds) = \int_{\Gamma_1} (\mathbf{a} \, ds) + \int_{\Gamma_2} (\mathbf{a} \, ds).$$

На рис. 8 изображена ориентированная кривая  $\Gamma$ , разрезанная на две соответственно ориентированные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

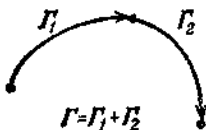


Рис. 8.

На рис. 9 изображены два ориентированных замкнутых контура  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

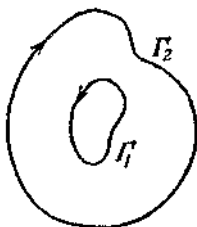


Рис. 9.

Под  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  понимается сложный ориентированный контур—объединение  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

По определению считается, что

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}.$$

Справедливо свойство: если  $\Gamma_-$  есть та же кривая, что и  $\Gamma$ , но ориентированная противоположно, то

$$\int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} \, ds) = - \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \, ds).$$

Из механических соображений это свойство очевидно. Работы одной и той же силы  $\mathbf{a}$  вдоль  $\Gamma$  и вдоль  $\Gamma_-$ , очевидно, равны, но противоположны по знаку.

Докажем все же это свойство формально. Это имеет смысл, чтобы яснее представить себе различие интегралов второго и первого рода. Ведь интеграл первого рода, как мы знаем, не меняет знака при перемене ориентации  $\Gamma$ .

Пусть  $\tau$  есть единичный вектор касательной к  $\Gamma$ , направленный в сторону возрастания параметра  $t$ . Тогда

$$d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} ds,$$

где скаляр  $ds$ —дифференциал дуги  $\Gamma$ . Поэтому

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds.$$

Правая часть этого равенства есть интеграл первого рода от функции  $(\mathbf{a}\boldsymbol{\tau})$  по  $\Gamma$ . Он, как мы знаем, не зависит от ориентации  $\Gamma$ . Поэтому (пояснения ниже)

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds = \int_{\Gamma_-} (\mathbf{a}\boldsymbol{\tau}) ds = - \int_{\Gamma_-} (\mathbf{a}(-\boldsymbol{\tau})) ds = - \int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} d\mathbf{s}).$$

В первом равенстве этой цепи мы заменили в интеграле первого рода  $\Gamma$  на  $\Gamma_-$ , не изменяя подынтегральную функцию. Во втором равенстве мы заменили  $\boldsymbol{\tau}$  на  $-\boldsymbol{\tau}$ , поставив перед интегралом знак минус, чтобы компенсировать это изменение. В третьем равенстве надо учесть, что  $-\boldsymbol{\tau}$  есть единичный вектор касательной к  $\Gamma_-$ .

Итак,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{s}) = - \int_{\Gamma_-} (\mathbf{a} d\mathbf{s}).$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл второго рода (рис. 10)

$$I = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy)$$

вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки  $(0, 0)$  в точку  $(1, 1)$ , и по дуге параболы  $y = x^2$ , соединяющей эти же точки.

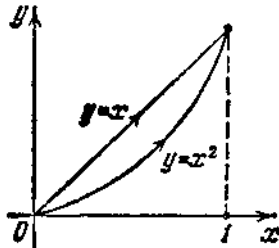


Рис. 10

В первом случае имеем  $(y = x)$

$$I_1 = \int_{AB} (x^2 dx + xy dy) = \int_0^1 (x^2 + x^2) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Во втором случае ( $y = x^2$ )

$$I_2 = \int_0^1 (x^2 dx + x^3 2x dx) = \int_0^1 (x^2 + 2x^4) dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} \left( x^2 y dx + \frac{x^3}{3} dy \right)$$

вдоль тех же кривых, что и в примере 1.

Имеем ( $y=x$ )

$$I_1 = \int_0^1 \left( x^3 dx + \frac{x^3}{3} dx \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Далее, при  $y = x^2$  получаем

$$I_2 = \int_0^1 \left( x^4 dx + \frac{x^3}{3} 2x dx \right) = \int_0^1 \left( x^4 + \frac{2}{3} x^4 \right) dx = \frac{5}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{3}.$$

Эти примеры показывают, что интеграл второго рода, вообще говоря, зависит от кривой, по которой он вычисляется, или, как еще говорят, он зависит от пути интегрирования.

Во втором примере мы получили одно и то же значение по разным путям интегрирования. Оказывается, это не случайно. Причину последнего свойства мы выясним в дальнейшем.

## 1.4. Поле потенциала

### 1.4.1. Понятие потенциала и его свойства.

Важным случаем поля вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

является тот, когда на области  $\Omega$ , где задано поле, существует функция  $U(x, y, z)$ , имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются равенства (на  $\Omega$ )

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Такую функцию называют *потенциальной функцией* или *потенциалом* вектора  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$ . Говорят еще, что вектор  $\mathbf{a}$  есть *градиент функции*  $U$  и пишут

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

**Пример 1.** Функция

$$U_1(x, y, z) = -\frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

определена на всем пространстве, исключая нулевую точку (0, 0, 0). Ее градиент равен

$$\text{grad } U = \frac{x}{r^3} \mathbf{i} + \frac{y}{r^3} \mathbf{j} + \frac{z}{r^3} \mathbf{k} = \mathbf{a}.$$

В равенстве

$$\mathbf{a} = \frac{1}{r^3} \left( \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right)$$

в скобках стоит единичный вектор, направленный в сторону радиус-вектора точки (x, y, z). Но тогда

$$|\mathbf{a}| = \frac{1}{r^3}.$$

Эти факты можно интерпретировать следующим образом. В нулевой точке находится единичный электрический заряд; в точке (x, y, z) тоже находится единичный заряд того же знака. Сила взаимодействия (отталкивания) между этими зарядами есть вектор, приложенный в точке (x, y, z), направленный как радиус-вектор точки (x, y, z); его величина равна  $1/r^2$ .

Мы видим, что вектор  $\mathbf{a}$  имеет потенциал  $U = -1/r$ .

Перейдем к общим свойствам поля вектора, имеющего потенциал.

**Теорема 1.** Для того чтобы поле вектора  $\mathbf{a}$ , заданного в области  $\Omega$  пространства, имело потенциал, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:

1) Интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  по любому замкнутому (кусочно-гладкому) контуру  $\Gamma$ , принадлежащему к  $\Omega$ , равен нулю.

2) Интеграл по любому (кусочно-гладкому) пути  $\Gamma \subset \Omega$ , соединяющему любые две точки  $\Omega$ , не зависит от пути интегрирования.

Если  $U(x, y, z)$  — потенциальная функция вектора  $\mathbf{a}$ , то интеграл от  $\mathbf{a}$  вдоль любого пути  $\Gamma_{AB} \subset \Omega$ , соединяющего точки

$A = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $B = (x, y, z)$ , равен

$$\int_{\Gamma_{AB}} (\mathbf{a} \, ds) = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

#### 1.4.2. Доказательство свойств потенциала.

Прежде всего докажем эквивалентность свойств 1) и 2).

Пусть справедливо свойство 1). Зададим в  $\Omega$  две точки  $A$  и  $B$  (рис. 11).

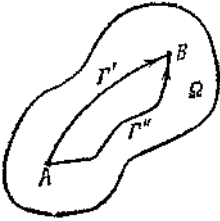


Рис. 11.

Соединим их двумя различными ориентированными от  $A$  до  $B$  кривыми  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , принадлежащими  $\Omega$ . В силу 1)

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = 0,$$

поэтому

$$\int_{\Gamma'} = - \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma''},$$

и мы доказали свойство 2).

Обратно, пусть верно свойство 2). Зададим произвольный ориентированный замкнутый контур  $\Gamma$  (рис. 12).

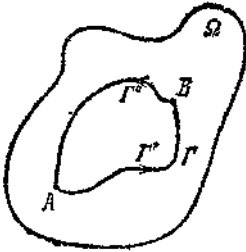


Рис. 12.

Разрежем его в точках  $A$  и  $B$  соответственно на две ориентированные кривые

$$\Gamma = \Gamma' + \Gamma''.$$

По свойству 2)

$$\int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''},$$

откуда

$$\int_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma'} = 0,$$



и мы доказали 1).

Пусть теперь известно, что поле вектора  $a$  имеет в области  $\Omega$  потенциальную функцию  $U(x, y, z)$ .

Зададим на  $\Omega$  точку  $A_0=(x_0, y_0, z_0)$  и переменную точку  $A=(x, y, z)$ .

Соединим  $A_0$  с  $A$  ориентированной от  $A_0$  до  $A$  непрерывной кусочно-гладкой кривой  $\Gamma=\Gamma_{A_0A}$ , определенной уравнениями

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau), \quad z = \chi(\tau) \quad (t_0 \leq \tau \leq t).$$

Таким образом, значениям  $t_0, t$  параметра  $\tau$  соответствуют точки  $A_0, A$ .

Если подставить в  $U$  вместо  $x, y, z$  соответственно функции  $\varphi, \psi, \chi$ , то  $U$  будет непрерывной кусочно-гладкой функцией от  $\tau$ . На основании теоремы о производной сложной функции в точках гладкости  $\Gamma$  (где  $\Gamma$  имеет касательную)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{d\psi}{d\tau} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{d\chi}{d\tau}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz) &= \\ &= \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial x} \varphi'(\tau) + \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial y} \psi'(\tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial U(\varphi, \psi, \chi)}{\partial z} \chi'(\tau) \right) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau = U[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] - \\ &- U[\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0)] = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = \\ &= U(A) - U(A_0) \equiv V(A), \quad (2) \end{aligned}$$

т. е. криволинейный интеграл второго рода при фиксированной точке  $A_0$  зависит только от положения точки  $A \in \Omega$ , но не от пути, по которому она достигается из точки  $A_0$ . Этим доказано свойство 2) и равенство (1), если известно, что вектор  $a$  имеет в области  $\Omega$  потенциальную функцию.

Нам остается доказать, что из свойства 2) следует, что существует определенная на  $\Omega$  потенциальная функция  $U(x, y, z)$ , градиент которой на  $\Omega$  равен  $a$ . В самом деле, зададим фиксированную точку  $A_0 \in \Omega$  (рис. 13).

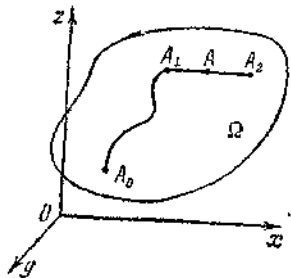


Рис. 13.

Пусть известно, что выполняется свойство 2), т. е. данное поле вектора  $\mathbf{a}$  таково, что криволинейный интеграл по любой непрерывной кусочно-гладкой кривой, соединяющей  $A_0$  с произвольной точкой  $A \in \Omega$ , не зависит от этой кривой, а зависит только от точки  $A$ . Таким образом, существует определенная на  $\Omega$  функция  $V(A)$  такая, что

$$\int_{\Gamma_{A_0 A}} (P dx + Q dy + R dz) = V(A) = V(x, y, z).$$

Чтобы доказать, что  $\frac{\partial V}{\partial x} = P$  в точке  $A$ , будем рассуждать следующим образом. Точку  $A_0$  соединим с  $A$  специальной кривой  $\Gamma_{A_0 A} \subset \Omega$  (см. рис. 13), которая заканчивается некоторым отрезком  $A_1 A$ , параллельным оси  $x$ . Этот отрезок мы продолжим до некоторой точки  $A_2$ . Таким образом, переменная точка  $A$  отрезка  $A_1 A_2$  имеет постоянные координаты  $y$  и  $z$  и только одну переменную координату  $x$ . Кривую  $\Gamma_{A_0 A}$  представим в виде суммы кривых

$$\Gamma_{A_0 A} = \Gamma_{A_0 A_1} + \Gamma_{A_1 A},$$

и тогда

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \int_{\Gamma_{A_0 A}} (\mathbf{a} ds) = \int_{\Gamma_{A_0 A_1}} (\mathbf{a} ds) + \int_{\Gamma_{A_1 A}} (\mathbf{a} ds) = \\ &= K + \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$K = \int_{\Gamma_{A_0 A_1}} (\mathbf{a} ds).$$

— постоянная, не изменяющаяся при движении точки  $A$  по отрезку  $A_1 A_2$ , а  $A_1 = (x_1, y, z)$ . Надо учесть, что уравнения отрезка  $A_1 A_2$  можно

записать в параметрическом виде (через параметр  $t$ )  $x=t, y=y, z=z$ , откуда следует, что

$$\int_{\Gamma_{A_1 A_2}} Q dy = \int_{x_1}^x Q(t, y, z) \cdot 0 dt = 0,$$

$$\int_{\Gamma_{A_1 A_2}} R dz = \int_{x_1}^x R(t, y, z) \cdot 0 dt = 0.$$

Итак, мы получили равенство (3), верное, какова бы ни была точка  $(x, y, z)$  отрезка  $A_1 A_2$ . Здесь  $y, z$  фиксированы, а  $x$  может изменяться. Так как под интегралом по  $t$  в правой части (3) стоит непрерывная функция от  $t$ , то

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt = P(x, y, z).$$

Аналогично можно доказать, что

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \Omega),$$

вводя специальные кривые  $\Gamma_{A_0 A} \subset \Omega$ , оканчивающиеся отрезком, параллельным оси  $y$  в одном случае и параллельным оси  $z$  в другом.

**Пример 2.** Вычислим работу, которую совершает сила  $\mathbf{a}$ , определенная в примере 1, вдоль пути, соединяющего точки  $(1, 2, 2)$  и  $(3, 0, 4)$ . Сила  $\mathbf{a}$  имеет потенциальную функцию

$$U(x, y, z) = -1/r = -1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

на области  $\Omega$ , представляющей собой пространство без нулевой точки. Поэтому криволинейный интеграл не зависит от пути.

В силу формулы (1) интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль любого (кусочно-гладкого) пути  $\Gamma \subset \Omega$ , соединяющего точки  $(1, 2, 2)$  и  $(3, 0, 4)$ , равен

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} ds) = U(3, 0, 4) - U(1, 2, 2) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} + \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{15}.$$

Итак, искомая работа вектора

$$\mathbf{a} = \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

равна  $2/15$ .

**1.4.3. Ротор вектора.** Возникает вопрос, как узнать, имеет ли вектор  $\mathbf{a}$  потенциальную функцию на данной области  $\Omega$ . Для этого введем некоторые новые понятия.

Введем символический вектор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Его называют *оператором Гамильтона*.

*Ротором вектора a* называется вектор

$$\text{rot } a = \nabla \times a =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Таким образом, можно сказать, что ротор вектора *a* равен векторному произведению символического вектора (оператора Гамильтона) на вектор *a*.

Следующие две теоремы дают ответ на поставленный выше вопрос.

**Теорема 2.** *Если вектор a имеет на Ω потенциальную функцию U, имеющую вторые непрерывные частные производные, то*

$$\text{rot } a = \mathbf{0}.$$

В самом деле, по условию теоремы

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R.$$

Поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0$$

на Ω, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение тоже верно, но, вообще говоря, для односвязных областей.

Область Ω называется *односвязной*, если любую, принадлежащую к ней замкнутую кусочно-гладкую кривую *γ* можно стянуть в точку, принадлежащую Ω. При этом в процессе стягивания *γ* все время должна принадлежать к Ω.

В этом определении достаточно считать, что кривые *γ* самонепересекающиеся. Такие кривые являются границами соответствующих односвязных областей  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ .

Примерами односвязных областей могут служить все пространство или шар без его границы (сферической поверхности).

С другой стороны, все пространство (трехмерное!), из которого выкинута прямая, есть пример односвязной области.

**Теорема 3.** Если область  $\Omega$  односвязная и на ней задан вектор  $\mathbf{a}$  с непрерывно дифференцируемыми компонентами, для которого  $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,

то вектор  $\mathbf{a}$  имеет на  $\Omega$  потенциальную функцию (потенциал).

В трехмерном случае теорема 3 следует из формулы Стокса, которая будет доказана в 1.15; в двумерном (плоском) случае она следует из формулы Грина, которая будет доказана в 1.7.

В плоском случае мы рассматриваем поле вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} \quad ((x, y) \in \Omega),$$

где  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  — непрерывные функции на области  $\Omega$  плоскости.

Функция  $U(x, y)$  называется потенциальной для вектора  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$ , если

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega).$$

Изложенные выше факты верны и для плоскости. Надо только всюду опустить  $z$  и считать, что  $R = 0$ .

В плоском случае определение односвязной области сохраняется. Обратим внимание, что плоскость (двумерное пространство), из которой выкинута точка, не есть односвязная область.

**Пример 3.** Вектор  $\mathbf{a}$  с компонентами

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

имеет непрерывные частные производные на области  $G$ , представляющей собой плоскость с выкинутой нулевой точкой.

Если записать вектор  $\mathbf{a}$  в виде

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k},$$

то отсюда видно, что

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Легко проверить, что в данном случае

$$\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{на } (G).$$

Область  $G$  (плоскости!) не односвязна. Она не удовлетворяет условию теоремы 3, и сама теорема, как мы увидим, для нее неверна.

В самом деле, кривая  $\gamma$  (окружность)

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

очевидно, замкнута и принадлежит к  $G$ . Криволинейный интеграл от вектора  $\mathbf{a}$  вдоль  $\gamma$  равен

$$\int_{\gamma} (\mathbf{a} \, ds) = \int_{\gamma} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Мы видим, что нашлась замкнутая кривая  $\gamma \subset G$ , вдоль которой интеграл от  $\mathbf{a}$  равен нулю.

Это показывает на основании теоремы 1, что на  $G$  не существует потенциальной функции для рассматриваемого здесь вектора  $\mathbf{a}$ .

С другой стороны, если из плоскости  $x, y$  выкинуть отрицательную полуось  $x$  или, как говорят, произвести разрез плоскости по отрицательной полуоси  $x$ , то оставшееся множество, которое мы обозначим через  $G_1$  (рис. 14), будет односвязным, и так как на  $G_1$   $\text{rot} \mathbf{a} = 0$ , то на основании теоремы 3 на уже существует потенциальная функция вектора  $\mathbf{a}$ .

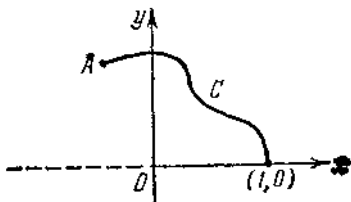


Рис. 14

Эту функцию можно записать следующим образом:

$$U(A) = U(x, y) = \int_C \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

где  $C \subset G_1$ —ориентированная кривая, соединяющая некоторую начальную фиксированную точку  $A_0$ , например  $(1, 0)$ , и переменную точку  $A = (x, y) \in G_1$  (см. рис. 14). Заметим, что кривая  $C$  не должна пересекать отрицательную полуось  $x$ .

## 1.5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (1)$$

где  $M$  и  $N$ —непрерывные функции на некоторой плоской односвязной области  $\Omega$ .

Будем предполагать, что левая часть (1) есть полный дифференциал, т. е. существует на  $\Omega$  функция  $U(x, y)$  такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \quad (2)$$

В этом случае уравнение (1) называется *уравнением в полных дифференциалах*. Его можно записать в виде

$$dU(x, y) = 0. \quad (1')$$

Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию  $V(x, y)$  и приравнять ее произвольной постоянной

$$U(x, y) = C. \quad (3)$$

Равенство (3) дает общий интеграл уравнения (1) как относительно решений вида  $y = y(x)$ , так и относительно решений вида  $x = x(y)$ . Отметим, что в силу равенств (2) функция  $U(x, y)$  есть потенциал вектора

$$\mathbf{a} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j} \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (4)$$

Из предыдущего 1.4 мы знаем, что для нахождения функции  $U$  надо вычислить криволинейный интеграл

$$U(x, y) = \int_C (P dx + Q dy)$$

по кусочно-гладкой кривой  $C \subset \Omega$ , соединяющей фиксированную точку  $A_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  с переменной точкой  $A = (x, y) \in \Omega$

Будем считать, что  $\Omega$  есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям  $x$  и  $y$  (рис 15).

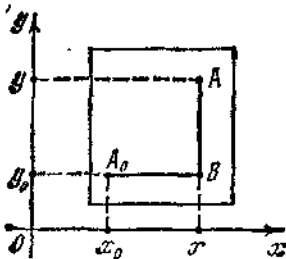


Рис. 15

Достичь точки  $A$  из точки  $A_0$  можно путем  $A_0BA$ , и тогда придется проделать следующие вычисления:

$$U(x, y) = \int_{C_{A \in B}} (P dx + Q dy) + \int_{C_{B \in A}} (P dx + Q dy) = \\ = \int_{x_0}^x P(u, y_0) du + \int_{y_0}^y Q(x, v) dv, \quad (5)$$

потому что

$$\int_{C_{A \in B}} Q dy = 0, \quad \int_{C_{B \in A}} P dx = 0.$$

Напомним, что из теорем 2 и 3 § 1.4 следует, что для односвязной плоской области  $\Omega$  уравнение (1) будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда ( $\text{rot} a = 0$ )

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (6)$$

(конечно, при условии, что  $M, N$  непрерывно дифференцируемы на  $\Omega$ ).

**Пример.** Решить дифференциальное уравнение

$$(x^\alpha + y^{\beta+1}) dx + (\beta + 1) xy^\beta dy = 0, \quad (7)$$

где  $\alpha, \beta$ —действительные числа, в области  $\Omega$  точек  $(x, y)$ , имеющих положительные координаты ( $x > 0, y > 0$ ). Здесь

$$M(x, y) = x^\alpha + y^{\beta+1}, \quad N(x, y) = (\beta + 1) xy^\beta,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (\beta + 1) y^\beta, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (\beta + 1) y^\beta,$$

т. е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{на } \Omega,$$

где  $\Omega$ —односвязная область. Поэтому

$$\text{rot } a = \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) k = 0$$

и, следовательно, по теореме 3 § 1.4 существует функция  $U(x, y)$ , полным дифференциалом которой является левая часть (7). Эту функцию можно получить по формуле (5):

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x (u^\alpha + y_0^{\beta+1}) du + \int_{y_0}^y (\beta + 1) xv^\beta dv = \\ = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy_0^{\beta+1} - x_0 y_0^{\beta+1} + xy^{\beta+1} - x y_0^{\beta+1} = \\ = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

Таким образом, общее решение уравнения (7) в  $\Omega$  есть функция  $u(x)$ , удовлетворяющая уравнению



$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + xy^{\beta+1} = C,$$

где  $C$ —произвольная константа. При  $\alpha = -1$  общее решение находится из уравнения

$$\ln|x| + xy^{\beta+1} = C.$$

## 1.6. Ориентация плоской области

На рис. 16 и 17 в плоскости изображены две различные прямоугольные системы координат. Различие этих систем заключается в том, что невозможно, передвигая их в плоскости, совместить их так, чтобы совпали одновременно их положительные оси  $x$  и положительные оси  $y$ .

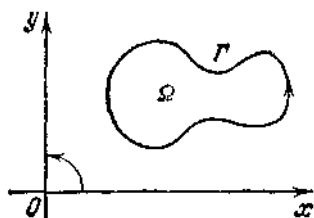


Рис. 16.

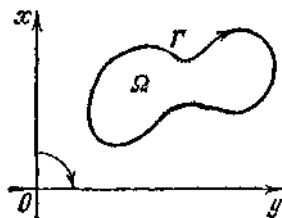


Рис. 17.

Система на рис. 16 характерна тем, что поворот на  $90^\circ$  положительного луча  $x$  около начала координат *против часовой стрелки* приводит к совмещению его с положительным лучом  $y$ .

Система же на рис. 17 характерна тем, что поворот на  $90^\circ$  положительного луча  $x$  около начала приводит к совмещению его с положительным лучом  $y$ , только если этот поворот совершается *по часовой стрелке*.

Будем называть *простым контуром* замкнутую само-непересекающуюся непрерывную кусочно гладкую ориентированную кривую  $\gamma$ .

Рассмотрим в плоскости ограниченную область  $\Omega$ , граница которой  $\Gamma$  состоит из конечного числа не пересекающихся попарно простых контуров:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_N.$$

Если  $N=1$ , т.е. если граница  $\Omega$  есть один простой контур ( $\Gamma = \gamma_1$ ), то область  $\Omega$  называется *односвязной*. Например, область  $\Omega$  на рис. 16 и 17 односвязна.

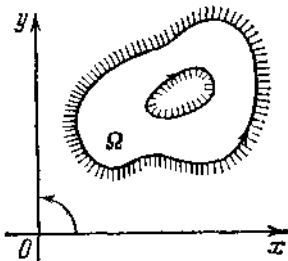


Рис. 18

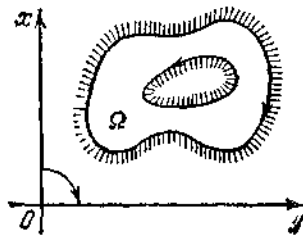


Рис. 19

Если  $N=2$ , как это имеет место на рис. 18 и 19, область  $\Omega$  называется *двусвязной*.

При произвольном  $N$  область  $\Omega$  называется  *$N$ -связной*. Область  $\Omega$  на рис. 20 *трехсвязна*.

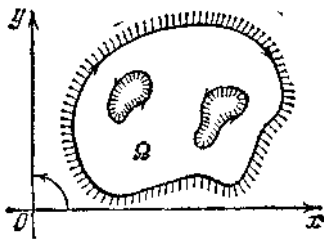


Рис. 20

В случае системы координат, изображенной на рис. 16 (или рис. 18, или рис. 20), область  $\Omega$ , так же как ее граница  $\Gamma$  называется *ориентированной положительно* или *отрицательно* в зависимости от того, остается ли  $\Omega$  слева или справа при движении по  $\Gamma$  в направлении стрелки.

Соответственно в случае системы координат на рис. 17 (или рис. 19) область  $\Omega$ , так же как ее граница  $\Gamma$ , называется *ориентированной положительно* или *отрицательно* в зависимости от того, остается ли  $\Omega$  справа или слева при движении по  $\Gamma$  в направлении стрелки. Например, области  $\Omega$  на рис. 16—19 ориентированы положительно, а область  $\Omega$  на рис. 20 ориентирована отрицательно.

Если  $\Omega$  ориентирована положительно, то  $\Omega_-$  обозначает ту же область, ориентированную отрицательно.

Полезно следующее соглашение. Пусть  $\Omega$  — область в плоскости  $x, y$ ,  $\Omega_+$  — область  $\Omega$ , ориентированная положительно и  $\Omega_-$  — область  $\Omega$ , ориентированная отрицательно. Тогда по определению

$$\iint_{\Omega_+} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

$$\iint_{\Omega_-} f(x, y) dx dy = - \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

где справа стоят обычные двойные интегралы по  $\Omega$  от  $f(x, y)$ .

## 1.7. Формула Грина

Для достаточно общих плоских областей  $\Omega$  с положительно ориентированной границей  $\Gamma$  справедлива формула

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy), \quad (1)$$

называемая *формулой Грина*. Здесь предполагается, что

$$Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, P, \frac{\partial P}{\partial y}$$

непрерывны на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$ .

Начнем с того, что рассмотрим плоскую область  $\Omega$ , изображенную на рис. 21, которую мы будем называть *элементарной  $H_y$ -областью*.

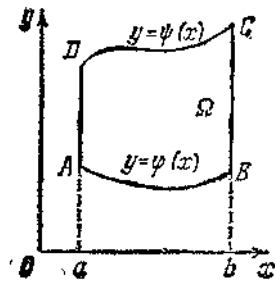


Рис. 21.

Снизу и сверху  $\Omega$  ограничена кусочно-гладкими кривыми, имеющими соответственно уравнения

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x), \\ \varphi(x) \leq \psi(x), \quad (a \leq x \leq b).$$

С боков  $\Omega$  ограничена отрезками прямых параллельных оси ординат. Отметим, что эти отрезки могут вырождаться в точку.

Граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  состоит из четырех частей:

$$\Gamma = \Gamma_{CD} + \Gamma_{DA} + \Gamma_{AB} + \Gamma_{BC}.$$

Для такой области  $\Omega$  имеет место равенство (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P[x, \psi(x)] - P[x, \varphi(x)]] dx = \\ &= - \int_b^a P[x, \psi(x)] dx - \int_a^b P[x, \varphi(x)] dx = \\ &= - \int_{\Gamma_{CD}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{DA}} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx - \\ &\quad - \int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Поясним последнее равенство. Кривая  $\Gamma_{CD}$  имеет параметрические уравнения (с параметром  $x$ )

$$x = x, \quad y = \psi(x).$$

При этом значению  $x = b$  соответствует точка  $C$ , а значению  $x = a$  — точка  $D$ . Кривая  $\Gamma_{AB}$  определяется уравнениями

$$x = x, \quad y = \varphi(x).$$

Значению  $x = a$  соответствует точка  $A$  и значению  $x=b$  — точка  $B$ .

Наконец, отрезок  $BC$  имеет уравнения  $x = b, y = y$  (с параметром  $y$ ).

Вдоль этого отрезка  $dx = 0$ , поэтому на самом деле

$$\int_{\Gamma_{BC}} P(x, y) dx = 0.$$

Аналогично интеграл по отрезку  $DA$  равен нулю:

$$\int_{\Gamma_{DA}} P(x, y) dx = 0.$$

Итак, мы доказали, что

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx.$$

(2)

Эта формула распространяется на любую область  $\Omega$ , которую можно разрезать на конечное число элементарных  $H_y$ -областей. Такую область будем называть просто  $H_y$ -областью.

В самом деле, пусть  $\Omega = \sum_{j=1}^N \Omega_j$ , где  $\Omega_j$ — элементарные  $H_y$ -области с границей  $\gamma_j$ , которые будем считать ориентированными положительно (рис. 22).

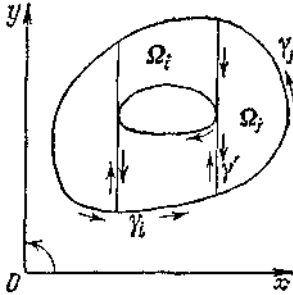


Рис. 22

Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \sum_{j=1}^N \iint_{\Omega_j} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^N - \int_{\gamma_j} P dx = \\ &= - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Пояснения требует третье равенство. Здесь важно отметить, что, если два контура  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  ( $i \neq j$ ) имеют общий кусок  $\gamma'$ , то он как часть  $\gamma_i$  и как часть  $\gamma_j$  ориентирован противоположно, и потому криволинейные интегралы от  $P$  по  $\gamma'$  в обоих случаях отличаются лишь знаком—их сумма равна нулю. Если учесть это, то сумма  $\sum_{j=1}^N$  в цепи (3) сведется к

сумме криволинейных интегралов по кускам  $\gamma_j$ , принадлежащим к  $\Gamma$ , равной интегралу по контуру  $\Gamma$ .

По аналогии можно ввести понятие *элементарной  $H_x$ -области*. В этом случае  $\Omega$  ограничена слева и справа кусочно-гладкими кривыми (рис. 23)

$$x = \lambda(y), \quad x = \mu(y), \quad \lambda(y) \leq \mu(y) \quad (c \leq y \leq d).$$

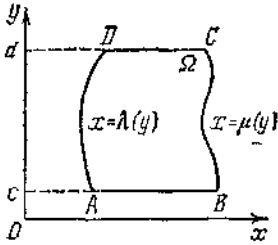


Рис. 23.

Сверху и снизу  $\Omega$  ограничена отрезками прямых параллельных оси  $x$ . Можно также сказать, что элементарная  $H_x$ -область определяется так же, как элементарная  $H_y$ -область, только роль  $y$  теперь играет  $x$ . Для элементарной  $H_x$ -области  $\Omega$  получаем (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(\mu(y), y) - Q(\lambda(y), y)] dy = \\ &= \int_c^d Q(\mu(y), y) dy + \int_d^c Q(\lambda(y), y) dy = \int_{\Gamma_{BC}} Q(x, y) dy + \\ &+ \int_{\Gamma_{DA}} Q(x, y) dy = \int_{\Gamma_{BC}} Q dy + \int_{\Gamma_{CD}} Q dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q dy + \\ &+ \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4)$$

так как  $dy = 0$  на отрезках  $CD$  и  $AB$ , то и

$$\int_{\Gamma_{CD}} Q dy = \int_{\Gamma_{AB}} Q dy = 0.$$

Формула (4) также распространяется на любую область  $\Omega$ , которую можно разрезать на конечное число элементарных  $H_x$ -областей. Такую область будем называть просто  $H_x$ -областью.

Итак, мы доказали предложение:

**Теорема 1.** Если область  $\Omega$  является одновременно  $H_x$ - и  $H_y$ -областью, то для нее имеет место формула Грина.

Для доказательства достаточно вычесть из равенства (4) равенство (3), которые справедливы для области  $\Omega$ , обладающей указанными свойствами.

Примерами областей, одновременно являющихся  $H_x$ -и  $H_y$ -областями, могут служить область

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x^2 < y < 1 \\ -1 < x < 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{y} < x < \sqrt{y} \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}$$

и эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1,$$

Более того, эти области являются элементарными  $H_x$ -и  $H_y$ -областями.

**Замечание 1.** Можно доказать более общее утверждение. Если область  $\Omega$ , ограничена произвольным замкнутым кусочно-гладким самонепересекающимся контуром  $\Gamma$ , то для нее верна формула Грина (1).

**Следствие.** Если плоская область  $\Omega$  односвязна и на ней задан непрерывно дифференцируемый вектор

$$\mathbf{a} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j},$$

для которого

$$\text{rot } \mathbf{a} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0,$$

то  $\mathbf{a}$  имеет на  $\Omega$  потенциал (т. е. имеет место в плоском случае теорема 3 1.4).

В самом деле, зададим произвольный самонепересекающийся непрерывный кусочно-гладкий контур  $\gamma \subset \Omega$ , ориентированный положительно (рис. 24).

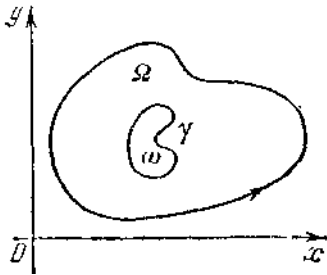


Рис. 24

Он служит границей некоторой области  $\omega$ . Согласно теореме (формуле) Грина (см. замечание 1)

$$\int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \iint_{\omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\omega} 0 dx dy = 0,$$

и так как  $\gamma \subset \Omega$  — произвольный замкнутый самонепересекающийся контур, то на основании теоремы 1.4 вектор  $\mathbf{a}$  имеет потенциал на  $\Omega$ .

**Замечание 2.** Так как двойной интеграл от единичной функции по области  $\Omega$  равен площади (мере) области  $\Omega$ , то, выбирая функции  $P$  и  $Q$  так, чтобы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 1,$$

мы получим различные выражения площади области  $\Omega$  через криволинейный интеграл:

$$m\Omega = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy).$$

В частности, при  $P = -y/2, Q = x/2$  получаем

$$m\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy). \quad (5)$$

**Пример.** Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Согласно формуле (5) имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (-y dx + x dy) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \sin^2 t + ab \cos^2 t) dt = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \end{aligned}$$

## 1.8. Интеграл по поверхности первого рода

Пусть гладкая поверхность  $S$  определяется уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi \mathbf{i} + \psi \mathbf{j} + \chi \mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega \rightleftharpoons S, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| > 0), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и  $\varphi, \psi, \chi$  — непрерывно дифференцируемые на  $\bar{\Omega}$  функции.

Символ  $\Omega \rightleftharpoons S$  обозначает взаимно однозначное соответствие между точками  $(u, v) \in \Omega$  и точками  $S$ .

Пусть, далее, на  $\bar{S}$  или в окрестности  $\bar{S}$  задана непрерывная функция  $F(x, y, z)$ . Произведем разбиение  $\Omega$  на части с кусочно-гладкими границами, пересекающиеся попарно разве что по своим границам.

Каждой части  $\Omega_j$  соответствует определенная часть  $S_j$  поверхности  $S$ .

Пусть  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  — произвольная точка на  $S_j$ . Составим сумму

$$\Pi_N = \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j|,$$

где  $|S_j|$  — площадь  $S_j$ . Предел ее



$$\lim_{\max d(\Omega_j) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N F(A_j) |S_j| = \int_S F(x, y, z) dS \quad (2)$$

называется *интегралом по поверхности S (первого рода)* функции  $F$  (или *поверхностным интегралом первого рода*). Например, если на  $S$  распределена масса с плотностью распределения  $F$ , то интеграл от  $F$  по  $S$  будет выражать общую массу  $S$ .

Интеграл (2) вычисляется по следующей формуле:

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_Q F[\varphi, \psi, \chi] |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| du dv, \quad (3)$$

где справа стоит обычный кратный интеграл по  $(u, v) \in Q$ .

В частности, если гладкая поверхность  $S$  определяется уравнением  $z = f(x, y)$  ( $(x, y) \in G$ ), где  $f$  непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка на  $\bar{G}$ , то можно считать, что она задана параметрически через параметры  $x, y$ :

$$x = x, \quad y = y, \quad z = f(x, y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{r}_x \times \dot{r}_y &= -f_x i - f_y j + k, \\ |\dot{r}_x \times \dot{r}_y| &= \sqrt{1 + p^2 + q^2} \quad \left( p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\int_S F(x, y, z) dS = \int_G F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (4)$$

Докажем формулу (3). Пусть  $A_j = (x_j, y_j, z_j)$  и  $x_j = \varphi(u_j, v_j), \quad y_j = \psi(u_j, v_j), \quad z_j = \chi(u_j, v_j),$   
 $(u_j, v_j) \in \Omega_j \quad (j = 1, \dots, N).$

Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \Pi_N &= \sum_{j=1}^N F(A_j) \int_{\Omega_j} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| du dv = \\ &= \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* |\Omega_j| = \sum_{j=1}^N F(A_j) |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j |\Omega_j| + \epsilon_N \rightarrow \\ &\rightarrow \int_Q F[\varphi, \psi, \chi] |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| du dv \quad (\max d(\Omega_j) \rightarrow 0), \end{aligned}$$

где знак  $|_j$  обозначает, что в  $|$  подставлена точка  $A_j$ , а  $|_j^*$  — что в  $|$  подставлена такая точка, чтобы выполнялась теорема о среднем для интеграла:

$$\int_{\Omega_j} |\dot{r}_u \times \dot{r}_v| du dv = |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* |\Omega_j|$$

Ведь, очевидно, что  $(K > |F(A)|)$  для любого малого  $\eta$

$$|e_N| = \left| \sum_{j=1}^N F(A_j) [|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j^* - |\dot{r}_u \times \dot{r}_v|_j] |\Omega_j| \right| \leq \\ \leq K\eta \sum_{j=1}^N |\Omega_j| = K\eta |\Omega|.$$

если только  $d(\Omega_j) < \delta$ , где  $\delta$  — зависящее от  $\eta$  число, потому что функция  $|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|$  равномерно непрерывна на  $\bar{\Omega}$ .

### 1.9. Ориентация поверхности

Рассмотрим кусок гладкой поверхности  $S$ , определяемый векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}), \quad (1)$$

где функции  $\varphi, \psi, \chi$  — непрерывно дифференцируемые на замыкании  $\bar{\Omega}$  области  $\Omega$  с кусочно-гладкой границей и

$$|\dot{r}_u \times \dot{r}_v| > 0 \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}). \quad (2)$$

Как всегда, мы предполагаем, что имеет место взаимно однозначное соответствие  $\bar{\Omega} \xleftrightarrow{\mathbf{r}} S$  между точками  $(u, v) \in \bar{\Omega}$  и точками  $S$ .

Единичная нормаль в произвольной точке  $S$  определяется по формуле

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\dot{r}_u \times \dot{r}_v}{|\dot{r}_u \times \dot{r}_v|} \quad ((u, v) \in \bar{\Omega}). \quad (3)$$

Знаку «+» соответствует одна сторона поверхности  $S$  со щеткой выпущенных в ее сторону единичных нормальных векторов, непрерывно зависящих от  $(u, v)$ , а знаку «—» — другая сторона  $S$ .

Дадим определение *Если из каждой точки  $A$  гладкой поверхности  $S$  можно выпустить единичную нормаль  $\mathbf{n}(A)$  так, что полученная векторная функция от  $A$  будет непрерывной на всей поверхности  $S$ , то  $S$  называется ориентируемой поверхностью.*

Функцию  $\mathbf{n}(A)$  называют еще *непрерывным полем нормалей*.

Поверхность, для которой определена такая функция  $\mathbf{n}(A)$ , называется *ориентированной при помощи  $\mathbf{n}(A)$* . Если мы говорим, что  $S$  есть ориентированная поверхность, то тем самым считаем, что  $S$  обозначает не только поверхность (множество точек), но и тот факт, что на ней задана указанная непрерывная на  $S$  функция  $\mathbf{n}(A)$ . Говорят еще, что  $\mathbf{n}(A)$  задает определенную сторону ориентированной гладкой

поверхности (куда выходит из  $S$  щетка единичных векторов  $\mathbf{n}(A)$ , непрерывно зависящих от  $A$ ).

Ту же поверхность, но ориентированную противоположным образом (щеткой единичных нормальных векторов, идущих в противоположном направлении) надо уже обозначать другой буквой. Две такие противоположно ориентированные поверхности удобно обозначать буквами  $S_+$  и  $S_-$ . Одна из них произвольно обозначается через  $S_+$ , а другая автоматически получает обозначение  $S_-$ .

Простейшим примером ориентируемой поверхности является плоскость  $xOy$ . Единичные векторы, перпендикулярные плоскости и идущие в положительном направлении оси  $z$ , определяют одну сторону плоскости, а векторы, идущие в отрицательном направлении оси  $z$ , — другую сторону плоскости ( $\mathbf{n}(A) = \pm \mathbf{k}$ ).

Поверхность эллипсоида также ориентируема — выпущенный из какой-либо ее точки единичный вектор нормали во внешность эллипсоида, очевидно, непрерывно продолжается (однозначно!) на всю поверхность.

Этим поверхность ориентирована (определена *внешняя сторона эллипсоида*).

Другая, противоположная, ориентация этой поверхности определяется единичным нормальным к ней вектором, идущим внутрь эллипсоида (*внутренняя сторона эллипсоида*).

Выше мы видели, что если  $S$  есть гладкая поверхность, определенная параметрическими уравнениями (1) с указанными там свойствами, то она ориентируема. Знаку «+» в формуле (3) соответствует определенная ориентация  $S$ , а знаку «-» будет тогда соответствовать противоположная ориентация.

Вообще же существуют гладкие поверхности *не ориентируемые*.

Если прямоугольный лист  $abb'a'$  (рис. 25) перекрутить один раз и его стороны  $ab$ ,  $a'b'$  склеить так, чтобы точки  $a$ ,  $b'$  и  $b$ ,  $a'$  склеились попарно, то получим не ориентируемую поверхность (рис. 26), называемую *листом Мебиуса*.

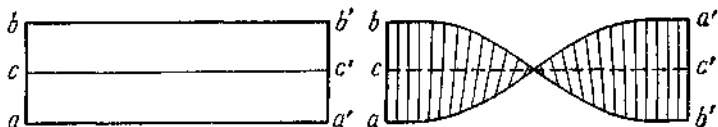


Рис. 25

На рис. 25 отмечен отрезок  $cc'$  — средняя линия прямоугольного листа бумаги.

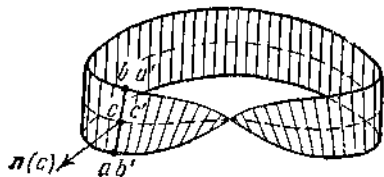


Рис. 26

Этой линии на листе Мёбиуса соответствует замкнутая кривая  $cc'$ , у которой точки  $c$  и  $c'$  слились в одну точку. Выпустим из  $c$  единичную нормаль  $n(c)$  произвольным, но определенным образом. Раз направление  $n(c)$  выбрано (среди двух возможных), то этим уже детерминированно определяется выбор  $n(A)$  для всех точек  $A \in cc'$ , если мы хотим, чтобы вектор  $n(A)$  зависел от  $A$  непрерывно. Однако в точке  $c'$  вектор  $n(c')$  уже выбран,—ведь  $c$  и  $c'$  совпадают. Легко видеть, что если точку средней линии прямоугольника непрерывно двигать от  $c$  к  $c'$ , то единичная нормаль  $n(A)$ , где  $A$ —точка листа Мебиуса будет стремиться к—  $n(c)$ , а не к  $n(c)$  и, следовательно, вектор-функция  $n(A)$  оказывайся разрывной в точке  $c=c' \in S$ . Итак, лист Мебиуса неориентируем.

## 1.10. Система координат и ориентация поверхности

В трехмерном пространстве имеются две существенно различные прямоугольные системы координат, изображенные на рис. 27 и 28.

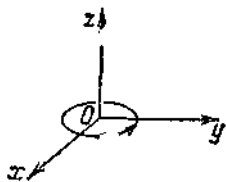


Рис. 27.

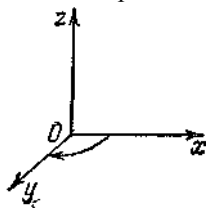


Рис. 28.

Отличие друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем, чтобы в результате его оказались совмещенными точки  $O$  и одноименные положительные полуоси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обеих систем.

Первую систему (рис. 27) называют *правой*, вторую (рис. 28)—*левой*. Если смотреть снизу вверх вдоль положительной оси  $z$ , то для совмещения положительной оси  $x$  с положительной осью  $y$

кратчайшем направлении в случае рис. 27 нужно вращать ось  $x$  в плоскости  $x, y$  слева направо (по часовой стрелке), а в случае рис. 28 — справа налево (против часовой стрелки).

С каждой из рассматриваемых двух систем естественно связать «штопор» — комбинацию, состоящую из единичного, направленного в положительном направлении оси  $z$ , вектора и перпендикулярного к оси  $z$  кружка (головки штопора), на границе которого (окружности) задано направление обхода от оси  $x$  к оси  $y$  в кратчайшем направлении.

Если в случае рис. 27 считать, что ось  $z$  есть ось винта (штопора), скрепленного с головкой и имеющего «правую нарезку», то, вращая головку в направлении стрелки, мы заставим штопор двигаться в направлении положительной оси  $z$  (*правый штопор*). Того же эффекта мы достигнем в случае рис. 28, если ось  $z$  будет осью винта, имеющего левую нарезку (*левый штопор*).

Головка штопора может быть искривлена, т. е. может представлять собой кусок гладкой поверхности, не обязательно плоской, но такой, что ось  $z$  есть нормаль к этому куску в точке  $O$ . И в этом случае комбинация из такой головки, на которой задано направление обхода, и единичной нормали образует штопор — правый или левый.

Наконец, можно представить себе такой штопор правый или левый с нормальным вектором, идущим в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с осью  $z$ . Для дальнейшего будет важно представить себе следующую конструкцию. Пусть в трехмерном пространстве задана прямоугольная система координат (правая или левая) и ориентированная поверхность  $S$ . Таким образом, из каждой точки  $P \in S$  выпущена единичная нормаль  $n(P)$ , непрерывно зависящая от  $P$ . Шар  $V(P)$  достаточно малого радиуса с центром в точке  $P$  высекает из поверхности  $S$  некоторый связный кусок  $a(P)$ , содержащий точку  $P$ . На контуре (на краю)  $y(P)$  этого куска определим направление обхода так, чтобы вектор  $n(P)$  и кусок  $\sigma(P)$  образовали штопор, ориентированный так же, как данная система координат, т. е. если система координат правая (левая), то и штопор должен быть правым (левым).

Если поверхность  $S$  имеет край  $\Gamma$ , то созданная конструкция естественным образом приводит к определенному направлению обхода на  $\Gamma$  (рис. 29).

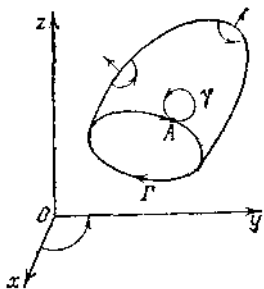


Рис. 29

Обратим, например, внимание на точку  $A$  контура  $\Gamma$ . В ней направление обхода по  $\Gamma$  и по замкнутому искривленному принадлежащему  $S$  кружочку  $\gamma$  совпадают.

Если бы данная поверхность была ориентирована противоположным образом, а система координат осталась прежней, то определенные выше направления обхода нужно было бы заменить на противоположные.

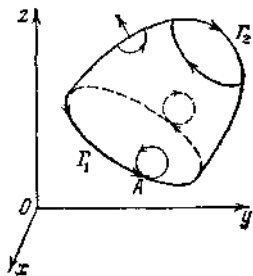


Рис. 30

На рис. 30 нарисована ориентированная поверхность с краем, состоящим из двух замкнутых гладких кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Отметим еще следующий факт. Пусть ориентированная гладкая поверхность  $S$  разрезана на две ориентированные так же поверхности  $S_1$ ,  $S_2$  гладкой дугой  $h$  (рис. 31).

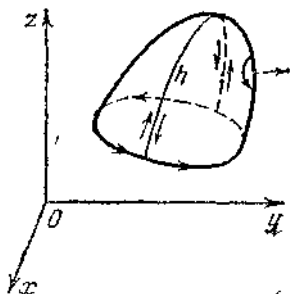


Рис. 31

Тогда направления обхода контуров  $S_1$  и  $S_2$  вдоль дуги  $h$  противоположны.

Это замечание будет руководящим для того, чтобы правильно определить понятие ориентированной кусочно-гладкой поверхности.

*Кусочно-гладкая поверхность  $S$  называется ориентированной, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обхода контуров этих кусков согласованы в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.*

На рис. 32 нарисован куб, поверхность которого ориентирована при помощи ее внешней нормали.

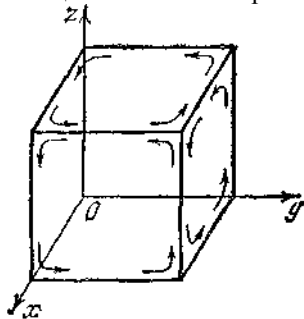


Рис. 32

Малые куски ориентированной поверхности (элементы поверхности) удобно считать векторами.

Пусть  $S$  есть ориентированная гладкая поверхность; таким образом, из каждой точки  $A \in S$  выпущена единичная нормаль  $n(A)$  к  $S$  в  $A$ ,

непрерывно зависящая от  $A$ . Пусть  $\sigma$  есть гладкий кусок  $S$ . Будем считать, что  $\sigma$  есть вектор, скалярная величина которого равна площади  $|\sigma|$  куска  $\sigma$ , а направление определяется вектором  $\mathbf{n}(A)$ , где  $A$  есть какая-либо точка  $\sigma$ . Таким образом,  $\sigma = |\sigma| \mathbf{n}(A)$ .

Этим, конечно, вектор  $\sigma$  однозначно не определен. Однако если диаметр  $d(\sigma)$  мал, то направление  $\mathbf{n}(A)$  не выходит за пределы некоторого малого конуса, и если  $\sigma$  есть переменный кусок, постоянно содержащий фиксированную точку  $A_0$ , то, очевидно,  $\mathbf{n}(A) \rightarrow \mathbf{n}(A_0)$  ( $d(\sigma) \rightarrow 0$ ), где  $d(\sigma)$  есть диаметр  $\sigma$ , независимо от того, как выбиралась точка  $A \in \sigma$  для каждого  $\sigma$ .

Дифференциальный элемент ориентированной поверхности  $S$  в точке  $A \in S$  естественно считать вектором  $dS = \mathbf{n}(A)dS$ , который, таким образом, равен произведению дифференциального элемента площади  $S$  в точке  $A$  на вектор единичной нормали  $\mathbf{n}(A)$ , определяющей ориентацию  $S$ .

Если  $S$  задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \psi \mathbf{i} + \chi \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k} \quad ((u, v) \in \bar{G}),$$

то  $\mathbf{n}(A)$  определяется одним из двух равенств

$$\mathbf{n}(A) = \pm \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} \quad (1)$$

и  $dS = |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| du dv$ . Отсюда

$$dS = \pm (\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v) du dv. \quad (2)$$

Если мы хотим, чтобы при преобразовании параметров  $(u, v)$  в параметры  $(u', v')$  не изменялся знак в этих выражениях, то нужно, чтобы якобиан преобразования  $\frac{D(u, v)}{D(u', v')}$  был положительным. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(A) &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|} = \frac{\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2}} = \\ &= \frac{\frac{D(y, z)}{D(u', v')} \mathbf{i} + \frac{D(z, x)}{D(u', v')} \mathbf{j} + \frac{D(x, y)}{D(u', v')} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u', v')}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u', v')}\right)^2}} \cdot \frac{D(u', v')}{D(u, v)} = \\ &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}}{|\dot{\mathbf{r}}_{u'} \times \dot{\mathbf{r}}_{v'}|} \cdot \text{sign} \frac{D(u', v')}{D(u, v)}. \end{aligned}$$



Таким образом, формула (1) со знаком «+»! для единичной нормали  $\mathbf{n}(A)$  (а вместе о ней и формула (2) *инвариантна только по отношению к преобразованиям параметров, имеющих положительный якобиан.*

Относительно произвольной ориентированной в пространстве  $x, y, z$  поверхности не имеет смысла говорить, что она ориентирована положительно или отрицательно. Другое дело, если поверхность плоская, принадлежащая к одной из координатных плоскостей.

Ориентированная область  $G$ , принадлежащая к плоскости  $xOy$ , называется *положительной (отрицательной)* и обозначается символом  $G_+$  ( $G_-$ ), если соответствующая области  $G$  единичная нормаль  $\mathbf{n}(A) = \mathbf{k}$  ( $\mathbf{n}(A) = -\mathbf{k}$ ), где  $\mathbf{k}$ —орт оси  $z$ . Это определение согласуется с определением, данным в 1.6. Нужно только считать там, что мы смотрим на плоскость  $xOy$  со стороны положительных  $z$ .

Если заменить в этом определении  $x, y$  соответственно на  $y, z$  или  $z, x$ , а также  $\mathbf{k}$ —соответственно на орт  $\mathbf{i}$  оси  $x$  или орт  $\mathbf{j}$  оси  $y$ , то получим определение  $G_+$  для областей, принадлежащих плоскостям  $yOz, zOx$ .

Для областей  $G_-$ , принадлежащих  $xOy$  или  $yOz$  или  $zOx$ , надо соответственно  $\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$  заменить на  $-\mathbf{k}, -\mathbf{i}, -\mathbf{j}$ .

## 1.11. Интеграл по ориентированной плоской области

В 1.6 мы ввели понятие *интеграла от  $f$  по ориентированной области, принадлежащей плоскости  $xOy$ . Именно,*

$$\int_{G_+} f \, dx \, dy = \int_G f \, dx \, dy = - \int_{G_-} f \, dx \, dy$$

Полезность этих определений можно видеть из следующего факта. Зададим две плоскости, где заданы прямоугольные системы координат  $x, y$  и  $x', y'$ , одинаково ориентированные. Пусть  $G$  обозначает ориентированную область плоскости  $x, y$  с кусочно-гладкой (ориентированной) границей  $\Gamma$ , и пусть непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y) \quad ((x, y) \in \bar{G}) \quad (1)$$

отображает взаимно однозначно область  $G$  на область  $G'$  плоскости  $x', y'$  и  $\Gamma$  на границу  $\Gamma'$  области  $G'$ . Будем предполагать, что якобиан

$$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \neq 0 \quad (\text{на } G).$$

При этом преобразовании обход  $\Gamma$  индуцирует на  $\Gamma'$  вполне определенный обход и  $G'$  можно считать ориентированной областью. Если  $D > 0$ , то при переходе от  $\Gamma$  к  $\Gamma'$  ориентация  $\Gamma'$  не меняется.

Если же  $D < 0$ , то обходы  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  противоположны.

Из сказанного следует, что для любой функции  $f(x, y)$ , непрерывной на замыкании  $G$  ориентированной измеримой области  $G$ ,

$$\iint_G f \, dx \, dy = \iint_{G'} f \cdot \frac{D(x, y)}{D(x', y')} \, dx' \, dy',$$

где  $G'$  обозначает соответствующую  $G$  ориентированную область. В этой формуле замены переменных якобиан не пишется под знаком абсолютной величины.

Поясним сказанное относительно связи ориентации  $\Gamma$  со знаком  $D$ . В прямоугольной системе координат  $x, y$  зададим два неколлинеарных вектора  $a' = (a'_1, a'_2)$  и  $a'' = (a''_1, a''_2)$ . Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 \\ a'_2 & a''_2 \end{vmatrix}$$

положителен, то это указывает на тот факт, что система  $a', a''$  ориентирована так же, как оси  $x, y$  (рис. 33).

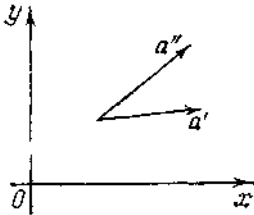


Рис. 33.

Если же  $\Delta < 0$ , то система  $a', a''$  ориентирована противоположно (рис. 34).

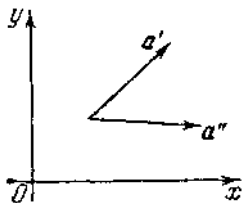


Рис. 34

Преобразование (1) отображает прямоугольную сетку плоскости  $x, y$  в криволинейную (рис. 35—37). При этом могут иметь место два характерных отличных случая отображений, изображенных на рис. 36 и 37.

Квадрат  $ABCD$  переходит в криволинейный параллелограмм  $A'B'C'D'$ , вектор  $\overrightarrow{AB}$  переходит с точностью до бесконечно малых высшего порядка в касательную к дуге  $\overline{A'B'}$  в точке  $A'$ , определяемую вектором  $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}\right)$ , а вектор  $\overrightarrow{AD}$  - в касательную к дуге  $\overline{A'D'}$  в точке  $A'$ , определяемую вектором  $\left(\frac{\partial x'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial y}\right)$ . Если определитель

$D = \frac{D(x', y')}{D(x, y)} > 0$ , то расположение этих векторов будет таким, как

на рис. 36, а это приводит к тому, что направления обхода у  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  совпадают, а следовательно, и обхода  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ .

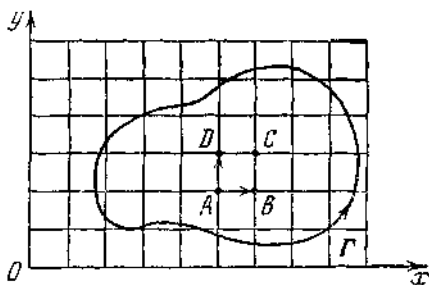


Рис. 35.

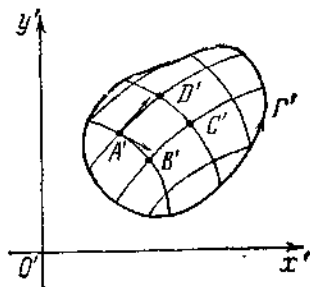


Рис. 36.

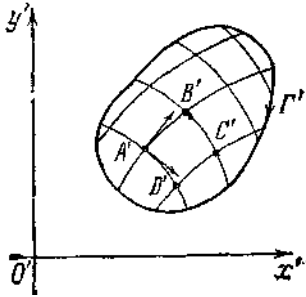


Рис. 37.

Если же  $D < 0$  то расположение касательных векторов к  $\vec{\lambda}'\vec{B}'$  и  $\vec{A}'\vec{D}'$  друг к другу меняется на противоположное, что влечет за собой (рис. 37) тот факт, что обходы у  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  делаются противоположными.

Аналогично определяются интегралы для областей  $G_+$  и  $G_-$ , определенных на других координатных плоскостях  $yz, zx$ .

### 1.12. Поток вектора через ориентированную поверхность

В трехмерном пространстве  $E = E_3$  с прямоугольной системой координат  $x, y, z$  дана область  $H$  и на ней определено поле непрерывного вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

В  $H$  задана ориентированная гладкая поверхность  $S^*$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi\mathbf{i} + \psi\mathbf{j} + \chi\mathbf{k} \quad ((u, v) \in \Omega, |\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v| > 0), \quad (1)$$

где  $\Omega$ —область с кусочно-гладкой границей в плоскости параметров

$(u, v)$  и  $\varphi, \psi, \chi$ —непрерывно дифференцируемые на  $\bar{\Omega}$  функции.

Будем считать, что единичная нормаль к  $S^*$  определяется векторным равенством (в связи со сказанным см. (1), (2) 1.10)

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v}{|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|}. \quad (2)$$

Тогда косинусы углов нормали  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(A)$  с осями  $x, y, z$  выражаются равенствами

$$\left. \begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, x) &= \kappa \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, & \cos(\mathbf{n}, y) &= \kappa \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \\ \cos(\mathbf{n}, z) &= \kappa \frac{D(x, y)}{D(u, v)}, & \kappa &= 1/|\dot{\mathbf{r}}_u \times \dot{\mathbf{r}}_v|. \end{aligned} \right\} (3)$$

Будем еще обозначать через  $S$  ту же поверхность, но не ориентированную—с нее снята ориентация.

Примером указанного поля может служить поле скоростей  $\mathbf{a}$  жидкости, текущей в области  $H$ . Имеется в виду стационарное течение, т. е. такое, что ее скорость в произвольной точке  $A \in H$  зависит от  $A$ , но не зависит от времени  $t$ .

Поставим задачу. Надо определить количество  $W$  жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность  $S^*$ , в направлении  $\mathbf{n}(A)$ , или, как еще можно сказать, в направлении ориентации  $S^*$  (рис. 38).

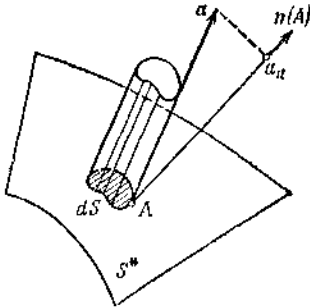


Рис. 38

Для этого рассмотрим малый элемент  $dS$  поверхности  $S$ , содержащей некоторую точку  $A \in S$ . Количество проходящей через него жидкости в направлении  $\mathbf{n}(A)$  в единицу времени, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно считать равным

$$\begin{aligned} \alpha_n dS &= (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = (\mathbf{a} dS^*) \\ (\mathbf{n} &= \mathbf{n}(A), \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(A)), \end{aligned}$$

— произведению проекции  $\mathbf{a}$  на направление нормали  $\mathbf{n}(A)$  на площадь  $dS$  элемента. Это произведение мы записали двумя способами, используя равенство  $dS^* = \mathbf{n} dS$ .

Искомое количество жидкости, проходящей в единицу времени через  $S^*$  равно интегралу первого рода

$$W = \int_S (an) dS, \quad (*)$$

от функции  $(an)$  по поверхности  $S$ .

Заметим, что  $(an)$  есть непрерывная функция от  $A \in \bar{S}$ , потому что по условию  $a$  и  $n$ —непрерывные вектор-функции от  $A \in \bar{S}$ . Это показывает, что интеграл первого рода (\*) существует (см. 1.8).

Этот интеграл условились записывать еще и так:

$$W = \int_{S^*} (a dS^*).$$

В таком виде его называют *интегралом второго рода*. В общем случае, когда  $a$  есть произвольный непрерывный вектор, определенный на  $H$ , величину  $W$  называют потоком вектора  $a$  через ориентированную поверхность  $S^*$ .

*Потоком вектора  $a$  через ориентированную поверхность  $S^*$  называется величина, обозначаемая следующим образом:*

$$\int_{S^*} (a dS^*)$$

*и определяемая при помощи равенства*

$$\int_{S^*} (a dS^*) = \int_S (an) dS, \quad (4)$$

*правая часть которого есть поверхностный интеграл первого рода от скалярного произведения*

$$(an) = P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)$$

*вектора  $a$  и единичной нормали, определяющей ориентацию  $S^*$ .*

Так как  $(an)$  есть непрерывная функция от точки  $A \in S$ , то интеграл в правой части (4) первого рода по  $S$  существует, это было доказано в 1.8. Выражение в левой части (4) называют *поверхностным интегралом второго рода*.

Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_S (an) dS &= \int_S (P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)) dS = \\ &= \iint_{\Omega} \left( P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) du dv, \quad (5) \end{aligned}$$

где в правой части стоит обычный кратный (двойной) интеграл по области, в котором в  $P$ ,  $Q$  и  $R$  надо подставить вместо  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответствующие функции  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  от  $u$ ,  $v$ . Это равенство следует из (3) и формулы (3) 1.8.

Часто удобно вычислять интеграл (5) в декартовых координатах. Покажем, к каким вычислениям это приводит в предположении, что гладкий кусок  $\bar{S}$  поверхности взаимно однозначно проецируется на измеримые части всех трех плоскостей координат. Многие гладкие поверхности можно разбить на конечное число таких кусков.

Итак, пусть гладкий кусок  $S$  описывается любой из трех функций

$$\begin{aligned} x &= f_1(y, z) && ((y, z) \in \bar{S}_x), \\ y &= f_2(z, x) && ((z, x) \in \bar{S}_y), \\ z &= f_3(x, y) && ((x, y) \in \bar{S}_z), \end{aligned}$$

непрерывных соответственно на проекциях  $\bar{S}$  на плоскости  $x=0, y=0, z=0$  и имеющих непрерывные частные производные, вообще говоря, только внутри этих проекций  $S_x, S_y, S_z$  (измеримых множествах).

Обозначим еще через  $S_x^*, S_y^*, S_z^*$  соответствующие ориентированные проекции ориентированной поверхности  $S^*$  на плоскости  $x=0, y=0, z=0$ .

Обход контура  $S^*$  определяет при проектировании соответствующий обход площадок  $S_x, S_y, S_z$  (рис. 39).

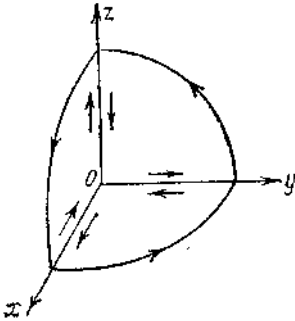


Рис. 39

Нормаль  $n$  к  $S$  образует угол с осью  $z$ , косинус которого равен

$$\cos(n, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\left( p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, q = \frac{\partial f_3}{\partial y} \right),$$

где надо взять «+» или «—» в зависимости от ориентации  $S^*$ . Имеем (см. (4) 1.8 и 1.10)

$$\begin{aligned} \int_S R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}) dS &= \\ &= \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) \frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \sqrt{1+p^2+q^2} dx dy = \\ &= \pm \int_{S_z} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \int_{S_z^*} R(x, y, f_3(x, y)) dx dy = \\ &= \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy, \quad (6) \end{aligned}$$

где предпоследний интеграл взят по ориентированной площадке  $S^*$  (см. 1.8). Что касается последнего интеграла в этой цепи, то его надо рассматривать как обозначение предпоследнего. Это так называемый *интеграл второго рода*. Чтобы его вычислить, надо подставить  $f_3(x, y)$  вместо  $z$  и проинтегрировать по ориентируемой проекции  $S_z^*$ .

Из 1.8 мы знаем, что  $\int_{S_z^*} = \pm \int_{S_z}$ , где надо взять «+» или «-» в

зависимости оттого, будет ли площадка  $S^*$  ориентирована положительно или отрицательно (см. также 1.6). Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в отношении остальных двух интегралов (рис. 39):

$$\begin{aligned} \int_S P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS &= \int_{S_x^*} P(f_1(y, z), y, z) dy dz = \int_{S_x^*} P(x, y, z) dy dz, \\ \int_S Q \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) dS &= \int_{S_y^*} Q(x, f_2(z, x), z) dz dx = \int_{S_y^*} Q(x, y, z) dz dx. \end{aligned}$$

Мы доказали, что поток вектора  $\mathbf{a}$  через ориентированную поверхность  $S^*$ , определяемую нормалью  $\mathbf{n}$ , может быть вычислен по формуле

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS &= \\ &= \int_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy). \quad (7) \end{aligned}$$

Если поверхность  $S^*$  может быть разрезана на конечное число частей,  $S^* = \sum S_k^*$ , каждая из которых проектируется на все три координатные плоскости, то чтобы вычислить поток  $\mathbf{a}$  через  $S^*$ , можно вычислить потоки  $\mathbf{a}$  через каждый из кусков  $S_k^*$  указанным способом и сложить их.

Шаровая поверхность с центром в нулевой точке естественно разрезывается плоскостями координат на восемь кусков, обладающих указанным свойством.



Как уже было отмечено выше, выражение справа в (7) называют *интегралом по поверхности второго рода*.

**Замечание 1.** Если ориентируемая поверхность  $S = G$  в пространстве  $(x_1, x_2, x_3)$  есть кусок координатной плоскости (ее уравнение  $x_j = 0$  при некотором  $j=1,2,3$ ), то поток вектора  $\mathbf{a}$  через  $G_+$  есть просто двойной интеграл от соответствующей проекции вектора  $\mathbf{a}$  на соответствующую ось. В частности, если  $G_+$  есть часть плоскости  $x_3=0$  с нормалью  $\mathbf{n}(A) = +k$ , то  $(\cos(\mathbf{n}, z) = 1)$

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{a}\mathbf{n})dS &= \int_S R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{G_+} R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2 = \int_G R(x_1, x_2, 0) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Обратно, если нам дан, например, двойной интеграл вида

$$\int_G f(x, y) dx dy,$$

то его можно трактовать как поток вектора  $\mathbf{a}$  через площадку  $G_+$ , у которого проекция на ось  $z$  равна  $R(x, y, z) = f(x,y)$ .

**Замечание 2.** Интеграл второго рода от вектора  $\mathbf{a}$  по ориентированной поверхности  $S^*$  изменяется при перемене ориентации поверхности (а именно, меняет знак).

В самом деле, пусть  $S^*$  обозначает ту же поверхность, что и  $S^*$ , но ориентированную противоположно. Тогда

$$\int_{S^*} (\mathbf{a} dS^*) = \int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS,$$

а

$$\int_{S^*_+} (\mathbf{a} dS^*_+) = \int_S (\mathbf{a}, -\mathbf{n}) dS = - \int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = - \int_{S^*} (\mathbf{a} dS^*).$$

### 1.13. Дивергенция. Теорема Гаусса — Остроградского

Пусть  $E$  есть трехмерное пространство, где задана прямоугольная система координат  $x, y, z$  и  $G \subset E$ — область с кусочно-гладкой границей  $S$ , на которой определено поле вектора

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \quad ((x, y, z) \in G). \quad (1)$$

Будем предполагать, что  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны на  $\bar{G}$ , откуда следует, что для вектора  $\mathbf{a}$  имеет смысл непрерывная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad ((x, y, z) \in \bar{G}), \quad (2)$$

называемая *дивергенцией вектора*  $\mathbf{a}$ .

Легко видеть, что

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} \quad \left( \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right),$$

т. е. *дивергенция равна скалярному произведению символического вектора  $\nabla$  (оператора Гамильтона) (см. 1.4) и вектора  $\mathbf{a}$ .*

Будем считать, что поверхность  $S$  ориентирована при помощи единичной нормали  $\mathbf{n}$ , направленной во внешность  $G$ .

Целью нашей будет доказать равенство

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{a} dG = \int_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS \quad (3)$$

при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на  $G$ . Это равенство называют *формулой Гаусса—Остроградского*.

Формула Гаусса—Остроградского говорит, что *объемный (тройной) интеграл от дивергенции вектора по области  $G$  равен потоку вектора через границу этой области, ориентированную в направлении ее внешней нормали*.

Начнем с того, что рассмотрим область  $\Lambda$ , изображенную на рис. 40, которую мы будем называть *элементарной  $H_z$ -областью*.

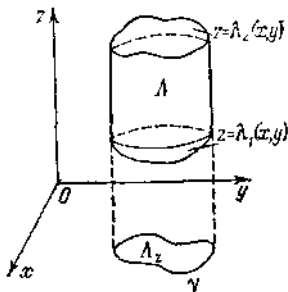


Рис. 40.

Снизу и сверху  $\Lambda$  ограничена поверхностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  с кусочно-гладкими краями, определяемыми соответственно уравнениями

$$z = \lambda_1(x, y), \quad z = \lambda_2(x, y) \quad (\lambda_1(x, y) \leq \lambda_2(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Lambda}_z),$$

где  $\Lambda_z$ —плоская область с кусочно-гладкой границей  $\gamma$ , а  $\lambda_1, \lambda_2$  непрерывны на  $\bar{\Lambda}_z$  и имеют непрерывные частные производные на открытом множестве  $\Lambda_z$ . С боков  $\Lambda$  ограничена цилиндрической поверхностью  $\sigma^*$  с направляющей  $\gamma$  и образующей параллельной оси  $z$ .

Пусть  $S^*$  есть граница  $\Lambda$ , ориентированная при помощи внешней к  $\Lambda$  нормали (пояснения ниже). Тем самым нижний и верхний куски  $\sigma^*_1$ ,  $\sigma^*_2$ , так же как боковая поверхность  $\sigma^*$  области  $\Lambda$ , соответственно ориентированы. Для области  $\Lambda$  имеют место равенства (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} \frac{\partial R}{\partial z} d\Lambda &= \iint_{\Lambda_z} dx dy \int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_{\Lambda_z} \{R(x, y, \lambda_2(x, y)) - R(x, y, \lambda_1(x, y))\} dx dy = \\ &= \iint_{\sigma^*_2, z} R(x, y, \lambda_2(x, y)) dx dy + \iint_{\sigma^*_1, z} R(x, y, \lambda_1(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{S^*} R(x, y, z) dx dy. \quad (4) \end{aligned}$$

Нормаль  $n$  к  $\sigma^*_1$ ,  $\sigma^*_2$  образует с осью  $z$  соответственно тупой и острый углы, поэтому проекции  $\sigma^*_{1, z}$ ,  $\sigma^*_{2, z}$  кусков  $\sigma^*_1$ ,  $\sigma^*_2$  на плоскость  $z = 0$  ориентированы первая отрицательно, а вторая положительно. Это обосновывает переход от третьего члена цепи (4) к четвертому. К сумме, составляющей четвертый член, можно формально добавить интеграл

$$\iint_{\sigma^*} R(x, y, z) dx dy = 0,$$

потому что  $\cos(n, z) = 0$  вдоль  $\sigma^*$ . Но тогда полученная сумма трех интегралов равна интегралу, стоящему в качестве последнего члена цепи (4) (поток вектора  $(0, 0, R)$  через  $S^*$ ).

Этим мы доказали теорему Гаусса—Остроградского для элементарной  $H_z$ -области и вектора  $(0, 0, R)$ .

Назовем теперь область  $G$   $H_z$ -областью, если ее замыкание  $\bar{G}$  можно разрезать на конечное число элементарных  $H_z$ -областей

$$\bar{G} = \sum_{k=1}^N \bar{G}_k$$

так, что нижние и верхние куски границы  $G_k$  суть части ориентированной границы  $S^*$  области  $G$ , и докажем, что для  $G$  и вектора  $(0, 0, R)$  тоже справедлива теорема Гаусса—Остроградского. В самом деле, обозначим соответственно через  $S_{1, k}$ ,  $S_{2, k}$  нижние и верхние куски границ  $\bar{G}_k$  и через  $S_k$ —боковые куски  $G_k$ . Тогда (пояснения ниже)

$$\int_G \frac{\partial R}{\partial z} dG = \sum_{k=1}^N \int_{G_k} \frac{\partial R}{\partial z} dG =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left( \int_{S_{1,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \int_{S_{2,k}^*} R(x, y, z) dx dy + \right.$$

$$\left. + \int_{S_k^*} R(x, y, z) dx dy \right) = \int_{S^*} R(x, y, z) dx dy,$$

потому что интегралы по  $S_k^*$  очевидно, равны нулю, а куски  $S_{1,k}^*$  и  $S_{2,k}^*$  либо составляют в совокупности поверхность  $S^*$ , либо, если это не так, то множество

$$\sigma = S^* - \sum_1^N S_{1,k}^* - \sum_1^N S_{2,k}^*$$

есть часть  $S^*$ , нормаль в любой точке которой перпендикулярна оси  $z$ . Но тогда интеграл по  $\sigma$  равен нулю.

По аналогии можно ввести понятия  $H_x$ -области и  $H_y$ -области. Например,  $H_x$ -область обладает тем свойством, что ее замыкание можно разрезать на конечное число замыканий элементарных  $H_x$ -областей. Элементарная же  $H_x$ -область определяется так же, как элементарная  $H_z$ -область, только роль  $z$  теперь играет  $x$ . По аналогии доказывается, что для  $H_x$ -области  $G$  имеет место равенство

$$\int_G \frac{\partial P}{\partial x} dG = \iint_{S^*} P(x, y, z) dy dz,$$

т. е. формула Гаусса—Остроградского для вектора  $(P, 0, 0)$ , а для  $H_y$ -области  $G$ —формула

$$\int_G \frac{\partial Q}{\partial y} dG = \iint_{S^*} Q(x, y, z) dz dx.$$

Если теперь  $G$  есть одновременно  $H_x$ ,  $H_y$  и  $H_z$ -область, то для нее, очевидно, верна теорема Гаусса—Остроградского для произвольного непрерывно дифференцируемого на  $G$  вектора  $a = (P, Q, R)$ , т. е. верно равенство

$$\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \iint_{S^*} (P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy), \quad (5)$$

где интеграл справа есть интеграл по поверхности  $S^*$ , ориентированной внешней нормалью к  $G$ .

Если в формуле Гаусса—Остроградского положить  $P = x$ ,  $Q = y$ ,  $R = z$ , то получим выражение для объема области  $G$

$$|G| = \frac{1}{3} \iiint_{S^*} (x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy)$$

через интеграл по ее ориентированной внешней нормали границе  $S^*$ . Области, с которыми приходится обычно иметь дело, являются одновременно  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$ -областями.

**Пример 1.** Шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  есть  $H_z$ -область, даже элементарная  $H_z$ -область, потому что вся его внутренность ограничена двумя лежащими друг над другом гладкими на круге  $x^2 + y^2 < 1$  поверхностями

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

непрерывными на замкнутом круге  $x^2 + y^2 \leq 1$ , имеющем гладкую границу. Очевидно, шар есть также  $H_x$  и  $H_y$ -область.

**Пример 2.** Тор. В плоскости  $x, y$  зададим окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $(b, 0)$  ( $0 < a < b$ ). Ее уравнение имеет вид  $(x-b)^2 + y^2 = a^2$ . Вращение данной окружности как твердого тела в пространстве  $x, y, z$  вокруг оси  $y$  приводит к поверхности  $T$ , называемой тором (на рис. 41 показана половина тора).

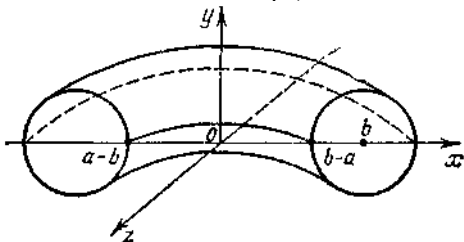


Рис. 41

Уравнение тора в декартовых координатах имеет вид

$$(\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 = a^2.$$

Чтобы убедиться в том, что  $T$  есть  $H_y$ -область, достаточно поверхность  $T$  разделить на две части плоскостью  $x, z$ . Далее, плоскости  $x = b-a$ ,  $x = a-b$  пересекают  $T$  на четыре элементарные  $H_z$ -области, а плоскости  $z = b-a$ ,  $z = a-b$ —на четыре элементарные  $H_x$ -области.

Формула Гаусса—Остроградского преобразует объемный интеграл в интеграл по поверхности.

Чтобы выяснить физический смысл понятия дивергенции, будем считать, что в  $G$  имеет место стационарное течение жидкости, скорость которой в произвольной точке  $(x, y, z)$  равна  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ . Зададим произвольную, но фиксированную точку  $A = (x, y, z) \in G$  и окружим ее шаром  $V_\varepsilon \subset G$  радиуса  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $S_\varepsilon^*$  есть его граница (шаровая

поверхность), ориентированная посредством внешней нормали. Тогда на основании формулы Гаусса —Остроградского

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) = \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz.$$

Левая часть этого равенства выражает количество жидкости, вытекающее из  $V_\varepsilon$  (вовне  $S_\varepsilon$ ) за единицу времени. Применяя к правой его части теорему о среднем, получим

$$\iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) = |V_\varepsilon| \operatorname{div} \mathbf{a}_1, \quad (6)$$

где  $|V_\varepsilon|$  есть объем  $V_\varepsilon$ , а  $\mathbf{a}_1$ —скорость жидкости в некоторой точке из  $V_\varepsilon$ . Разделив обе части полученного равенства на  $|V_\varepsilon|$  и перейдя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим в силу непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ , что существует предел, равный дивергенции  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|V_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} (\mathbf{a} d\mathbf{S}) \quad (7)$$

в точке  $(x, y, z)$ . Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  представляет собой производительность источников, непрерывно распределенных по  $G$  в точке  $A = (x, y, z)$ . Если в точке  $A$  (или всюду на  $G$ )  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , то это значит, что в  $A$  (или всюду на  $G$ ) производительность источников равна нулю. Если  $\operatorname{div} \mathbf{a} < 0$ , то это значит, что на самом деле в соответствующей точке имеет место сток.

Из физических соображений ясно, что  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  есть инвариант относительно любых преобразований прямоугольных координат. Но это заключение можно сделать и на основании математических соображений.

Как мы знаем, скалярное произведение векторов есть инвариант при преобразованиях координат, поэтому и дивергенция (равная скалярному произведению символического вектора  $\nabla$  и вектора  $\mathbf{a}$ ) есть инвариант относительно преобразований прямоугольных координат. Конечно, мы считаем (по определению), что координаты символического вектора  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  преобразуются по тем же формулам, что и координаты обычных векторов. Точнее, если формулы преобразования от координат  $(x_1, x_2, x_3)$  точки (вектора) в первой системе координат к ее координатам  $(y_1, y_2, y_3)$  во второй системе имеют вид

$$y_i = \sum_{s=1}^3 \alpha_{is} x_s \quad (i=1, 2, 3), \quad (8)$$

где  $\alpha = (\alpha_{il})$ —соответствующая ортогональная матрица, то

$$\frac{\partial}{\partial y_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Оператор Гамильтона применяется к дифференцируемой функции  $f$ . В результате мы получаем вектор

$$\nabla f = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right),$$

называемый, как мы знаем, *градиентом функции  $f$* . Функция  $f$  в этом исчислении считается скаляром. Таким образом,  $\nabla f = \text{grad} f$  есть произведение вектора  $\nabla$  на скаляр  $f$ —результат есть вектор. В системе координат  $y_1, y_2, y_3$

$$\nabla f = \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3} \right) = \frac{\partial f}{\partial y_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \mathbf{j}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_3} \mathbf{k}_1,$$

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ —орты системы  $y_1, y_2, y_3$ . При этом в силу (9)

$$\frac{\partial f}{\partial y_l} = \left( \alpha_{l1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{l2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{l3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial f}{\partial x_s} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Формулы (10) согласуются с правилами дифференцирования сложной функции  $f(x_1, x_2, x_3)$ , у которой

$$x_s = \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} y_l \quad (s = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Формулы (11) являются обратными к формулам (8) ( $\alpha^{-1} = \alpha^*$ , т. е. координаты  $x_s$  выражаются через координаты  $y_k$  с помощью  $s$ -го столбца матрицы  $\alpha$ ).

Здесь мы получили формулы (10), пользуясь только символическим исчислением.

Теперь, если одно и то же поле вектора определено в двух прямоугольных системах координат  $x_1, x_2, x_3$  и  $y_1, y_2, y_3$  соответственно функциями

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1(x_1, x_2, x_3) \mathbf{i} + a_2(x_1, x_2, x_3) \mathbf{j} + a_3(x_1, x_2, x_3) \mathbf{k} = \\ &= b_1(y_1, y_2, y_3) \mathbf{i}_1 + b_2(y_1, y_2, y_3) \mathbf{j}_1 + b_3(y_1, y_2, y_3) \mathbf{k}_1, \end{aligned}$$

где координаты  $(b_1, b_2, b_3)$  и  $(a_1, a_2, a_3)$  связаны по формулам (8), (11) (с заменой в них  $x, y$  на  $a, b$ ), то в одной и той же точке

$$\begin{aligned} \text{div } \alpha &= \\ &= \sum_{l=1}^3 \frac{\partial b_l}{\partial y_l} = \sum_{l=1}^3 \left( \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) b_l = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \sum_{l=1}^3 \alpha_{ls} b_l \right) = \sum_{s=1}^3 \frac{\partial a_s}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы еще раз доказали инвариантность дивергенции при преобразованиях прямоугольных координат, пользуясь только символическим исчислением.

Формулу Гаусса—Остроградского можно записать в плоском случае, когда  $G$  есть область в плоскости  $x, y$  и

$$\mathbf{a}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

— определенное на ней поле. Если  $\mathbf{n}(A)$  есть внешняя нормаль к кусочно-гладкому контуру  $\Gamma$  области  $G$  ( $A \in \Gamma$ ), то имеет место равенство

$$\iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (\mathbf{a}\mathbf{n}) ds,$$

где  $ds$  — дифференциал дуги  $\Gamma$ .

Если считать, что направление касательной в точке  $\Gamma$  совпадает с положительным направлением обхода по  $\Gamma$ , вдоль которого исчисляется также длина дуги контура  $\Gamma$ , то (рис. 42)

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, x) &= \cos(\mathbf{T}, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \cos[\pi - (\mathbf{T}, x)] = \\ &= -\cos(\mathbf{T}, x) = -\frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

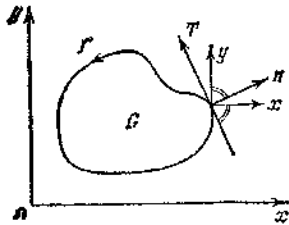


Рис. 42

Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\mathbf{n}) ds &= P dy - Q dx, \\ \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{\Gamma} (P dy - Q dx). \end{aligned}$$

Если в этой формуле заменить соответственно  $P, Q$  на  $Q, -P$ , то мы придем к формуле Грина, которая была получена в 1.7.



### 1.14. Соленоидальное поле

Поле (область)  $\Omega$  вектора  $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  называется *соленоидальным (трубчатым)*, если дивергенция  $\mathbf{a}$  на  $\Omega$  равна нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \quad ((x, y, z) \in \Omega).$$

В силу теоремы Гаусса—Остроградского для соленоидального поля имеет место равенство

$$\iint_S (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = \iiint_{\omega} \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz = 0$$

для любой замкнутой ориентированной (во вне  $\omega$ ) кусочно-гладкой поверхности  $S$ , являющейся границей области  $\omega \subset \omega \subset \Omega$ , т. е. находящейся строго внутри  $\Omega$ . В частности, если  $\omega$  находится внутри замкнутой поверхности  $S_2$  и вне замкнутой поверхности  $S_1$  ( $S = S_1 + S_2$ ), как на рис. 43, то

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS + \iint_{S_2} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = 0$$

или

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = - \iint_{S_2} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS,$$

где  $S_2^-$ —та же поверхность, что  $S_2$ , но ориентированная противоположно (во внутрь  $\omega$ ).

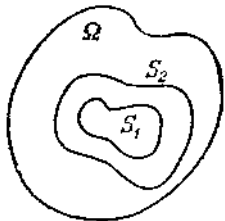


Рис. 43.

Рассмотрим в  $\Omega$  область  $\omega$  специального вида (рис. 44)—трубку с границей  $S$ , состоящей из трех гладких кусков:

$$S = S_1 + S_2 + S_3;$$

при этом по условию в любой точке  $S_3$  вектор  $\mathbf{a}$  касательный к  $S_3$ .

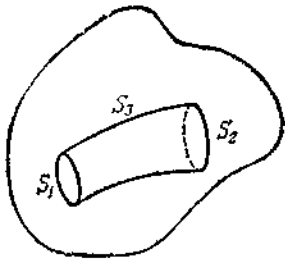


Рис 44.

Тогда

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = 0$$

и

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS + \iint_{S_2} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = 0$$

или

$$\iint_{S_1} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS = \iint_{S_2} (\mathbf{a}\mathbf{n}) dS.$$

Мы видим, что поток вектора  $\mathbf{a}$  через  $S_2$  равен потоку его через  $S_1$ , т. е. если, например,  $\mathbf{a}(x, y, z)$  есть скорость текущей в  $\Omega$  жидкости, то количество жидкости, втекающее в единицу времени в трубку, равно количеству вытекающей из трубки жидкости.

## 1.15. Формула Стокса

Пусть в некоторой области пространства  $E_3$  задано поле непрерывно дифференцируемого вектора

$$\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

В 1.4 мы определили понятие ротора вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Из векторной алгебры известно, что векторное произведение двух векторов инвариантно относительно преобразований прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же ориентацию, т. е. таких, что правая система переходит в правую, а левая—в левую. Поэтому

$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$  инвариантен относительно преобразований прямоугольных систем координат, не меняющих их ориентацию. Следовательно, мы можем, не вычисляя, сказать, что если наш вектор  $\mathbf{a}$  имеет в новой (также ориентированной) прямоугольной системе координат компоненты

$$\mathbf{a} = P_1(x', y', z') \mathbf{i}' + Q_1(x', y', z') \mathbf{j}' + R_1(x', y', z') \mathbf{k}',$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ = \left( \frac{\partial R_1}{\partial y'} - \frac{\partial Q_1}{\partial z'} \right) \mathbf{i}' + \left( \frac{\partial P_1}{\partial z'} - \frac{\partial R_1}{\partial x'} \right) \mathbf{j}' + \left( \frac{\partial Q_1}{\partial x'} - \frac{\partial P_1}{\partial y'} \right) \mathbf{k}', \end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  — единичные орты в системе  $x', y', z'$ .

Если ориентированный контур  $\Gamma$  замкнут, то взятый вдоль него криволинейный интеграл от  $\mathbf{a}$  будем называть *циркуляцией вектора  $\mathbf{a}$  по  $\Gamma$*  и обозначать символом

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{l}) = \int_{\Gamma} (P dx + Q dy + R dz).$$

Здесь  $d\mathbf{l}$  есть направленный в положительном направлении касательной к  $\Gamma$  вектор, длина которого равна дифференциалу дуги  $\Gamma$ .

Наша цель заключается в том, чтобы обосновать *формулу Стокса*

$$\iint_{S^*} (\operatorname{rot} \mathbf{a} d\mathbf{S}^*) = \iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) dS = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} d\mathbf{l}), \quad (1)$$

выражающую тот факт, что *поток вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  через ориентированную поверхность  $S^*$  равен циркуляции  $\mathbf{a}$  по контуру  $\Gamma$  этой поверхности, ориентированному соответственно ориентации  $S^*$* . Отметим, что через  $S^*$  мы обозначили некоторым образом ориентированную поверхность  $S$ . Начнем с доказательства теоремы Стокса (т. е. формулы (1)) для гладкого куска, взаимно однозначно проектируемого на все три координатные плоскости.

Зададим ориентированный гладкий кусок  $S^*$  поверхности с кусочно-гладким краем  $\Gamma$ , который можно записать тремя способами:

$$\begin{aligned} z = f_1(x, y) \quad (x, y) \in S_z, \quad x = f_2(y, z) \quad (y, z) \in S_x, \\ y = f_3(z, x) \quad (z, x) \in S_y. \end{aligned}$$

Предполагается, таким образом, что любое из этих уравнений разрешается относительно любой из переменных, а функции  $f_1, f_2, f_3$  непрерывно дифференцируемы на соответствующих проекциях  $S$  на координатные плоскости. Имеем

$$\iint_S (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) dS = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(\mathbf{n}, y) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) \right\} dS. \quad (2)$$

Выберем в правой части (2) члены, содержащие  $P$ . Тогда (пояснения ниже)

$$\begin{aligned} & - \iint_S \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, y) \right\} dS = \\ & = - \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cos(\mathbf{n}, z) dS = \\ & = - \iint_{S_2^*} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, f_1(x, y)) dx dy = \\ & = \int_{\Gamma_2} P(x, y, f_1(x, y)) dx = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad (3) \end{aligned}$$

Так как  $\operatorname{grad}(f_1(x, y) - z)$  ортогонален поверхности  $z = f_1(x, y)$ , то направляющие косинусы нормали в точке  $(x, y, f_1(x, y))$  пропорциональны координатам градиента:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y} : (-1) = \cos(\mathbf{n}, x) : \cos(\mathbf{n}, y) : \cos(\mathbf{n}, z).$$

Отсюда

$$\cos(\mathbf{n}, y) = - \frac{\partial f_1}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z),$$

что влечет первое равенство в цепи (3). Второе равенство следует из формулы (6) 1.12 и правила дифференцирования сложной функции. Третье равенство следует из формулы Грина и, наконец, последнее следует из того, что уравнения контура  $\Gamma$  имеют вид

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) = f_1(\varphi(s), \psi(s)),$$

т. е. в обоих последних криволинейных интегралах в (3)

$$dx = \varphi'(s) ds$$

и на контуре  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} P(x, y, f_1(x, y)) &= \\ &= P(\varphi(s), \psi(s), f_1(\varphi(s), \psi(s))) = P(\varphi(s), \psi(s), \chi(s)), \end{aligned}$$

что равно  $P(x, y, z)$  на  $\Gamma$ .

По аналогии доказывается, что

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x) \right) dS = \int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy, \quad (4)$$

$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y) \right) dS = \int_{\Gamma} R(x, y, z) dz. \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) следует формула Стокса (1).

Мы доказали теорему Стокса для куска ориентируемой поверхности, одновременно проектирующегося на все три плоскости координат. Имеется еще один важный простой случай, который непосредственно не охвачен нашими рассмотрениями. Мы имеем в виду тот случай, когда  $\sigma^*$  есть кусок, принадлежащий некоторой плоскости, параллельной одной из осей координат. Для такого куска теорема Стокса тоже верна. В этом можно убедиться непосредственными вычислениями, подобными (3). Но можно рассуждать так. Интегралы, входящие в формулу Стокса, инвариантны относительно преобразований прямоугольных координат, не меняющих ориентацию последних. Всегда можно подобрать преобразование этого типа так, что  $\sigma^*$  будет проектироваться на любую из плоскостей координат новой системы (например, совместим нашу плоскость с плоскостью, проходящей через точки (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)). А в этом случае теорема доказана.

Формула Стокса остается верной для любой ориентированной поверхности  $S^*$  с кусочно-гладким краем  $\Gamma$ , которую можно разбить при помощи кусочно-гладких линий на конечное число гладких кусков, проектирующихся на все три плоскости координат.

В самом деле, пусть  $S^* = \sigma^*_1 + \dots + \sigma^*_N$  есть такое разбиение, и пусть  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$  — соответственно ориентированные контуры  $\sigma^*_1, \dots, \sigma^*_N$ . Тогда, согласно доказанному выше,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{a} \, d\sigma) = \sum_{i=1}^N \iint_{\sigma_i} (\text{rot } \mathbf{a} \, d\sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (\mathbf{a} \, d\mathbf{l}) = \int_{\Gamma} (\mathbf{a} \, d\mathbf{l}),$$

потому что части интегралов

$$\int_{\Gamma_j} \quad (j = 1, \dots, N),$$

берущихся вдоль внутренних кусков  $\Gamma_j$  (не принадлежащих  $\Gamma$ ), проходятся два раза в противоположном направлении и дают эффект, равный нулю.

Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число треугольников (плоских), называется *полиэдральной* поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Сделаем еще одно замечание. Пусть  $\sigma_\varepsilon^*$  обозначает круглую определенным образом ориентированную площадку в центре в точке  $A = (x, y, z)$  радиуса  $\varepsilon$  с ориентирующим ее единичным вектором  $\mathbf{n}$  и  $\gamma_\varepsilon$  — ее ориентированный контур. Согласно формуле Стокса

$$\int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{a} \, d\mathbf{l}) = \int_{\sigma_\varepsilon} (\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}) \, d\sigma_\varepsilon = \int_{\sigma_\varepsilon} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} \, d\sigma_\varepsilon = |\sigma_\varepsilon| \cdot \operatorname{rot}_n \mathbf{a}_1,$$

где  $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$  есть скалярная функция, равная проекции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  на направление  $\mathbf{n}$ , а  $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}_1$  есть значение этой функции в некоторой средней точке  $\sigma_\varepsilon$ . Отсюда следует, что значение функции  $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$  в точке  $A$  равно

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\sigma_\varepsilon|} \int_{\gamma_\varepsilon} (\mathbf{a} \, d\mathbf{l}), \quad (6)$$

где при предельном переходе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предполагается, что вектор  $\mathbf{n}$  неизменный. В любой правой (левой) системе координат правая часть (6) есть одно и то же число. Однако при замене правой системы на левую и неизменном  $\mathbf{n}$  направлении обхода  $\sigma_\varepsilon$  изменяется на противоположное, что влечет изменение знака в правой части (6). Таким образом, мы снова, но другим путем убедились в инвариантности  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  относительно преобразований прямоугольных координат, сохраняющих ориентацию последних.

**Замечание.** Приведем ряд формул с участием оператора Гамильтона  $\nabla$ , которые оказываются полезными в векторном анализе.

Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla, \mathbf{a}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}, \quad \operatorname{grad} f = \nabla f,$$

где  $f$  — скалярная функция, а  $\mathbf{a}$  — вектор.

$$1) \quad \operatorname{rot} [\operatorname{grad} f] = \nabla \times \nabla f = 0,$$

так как символические векторы  $\nabla$  и  $\nabla f$  отличаются только скалярным множителем. Непосредственно этот факт доказан в теореме 2 1.4)

$$2) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = (\nabla, \nabla \times \mathbf{a}) = 0,$$

так как вектор  $\nabla$  ортогонален вектору  $\nabla \times \mathbf{a}$ .

$$3) \quad \operatorname{div} (f\mathbf{a}) = (\nabla, f\mathbf{a}) = (\nabla f, \mathbf{a}) + f(\nabla, \mathbf{a}).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} (\nabla, f\mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x} (fP) + \frac{\partial}{\partial y} (fQ) + \frac{\partial}{\partial z} (fR) = \\ &= f'_x P + f'_y Q + f'_z R + f(P'_x + Q'_y + R'_z) = (\nabla f, \mathbf{a}) + f(\nabla, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

4) Легко проверить, что  $\operatorname{grad} fg = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$  или в символическом виде  $\nabla fg = f \nabla g + g \nabla f$ . Таким образом, оператор  $\nabla$

действует на произведение двух функций как обычный оператор дифференцирования.

$$5). \operatorname{rot}(fa) = f \operatorname{rot} a + \operatorname{grad} f \times a \text{ или } \nabla \times fa = f(\nabla \times a) + \nabla f \times a$$

$$6) \quad \operatorname{div}(a \times b) = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$$

или

$$(\nabla, a \times b) = (b, \nabla \times a) - (a, \nabla \times b).$$

$$7) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \Delta f,$$

где  $\nabla$  называется *оператором Лапласа*. Очевидно, что

$$(\nabla, \nabla f) \equiv \Delta f.$$

## 1.16. Векторное поле

Кратные интегралы непосредственно применяются в теории векторного поля. Мы дадим представление об этих применениях в настоящем разделе, перед чтением которого следует вспомнить определение поля.

**1. Векторные линии.** Мы говорим, что задано *векторное поле*  $\mathbf{A}$  (или *поле вектора*  $\mathbf{A}$ ), если в каждой точке  $M$  пространства или некоторой его области определено значение векторной величины  $\mathbf{A}$ , т. е.  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(M)$ . Мы будем считать поле стационарным, т. е. не меняющимся с течением времени; если такое изменение имеет место, то наши рассуждения будут относиться к состоянию поля в любой зафиксированный момент времени. Характерными физическими примерами векторных полей являются поле скоростей  $\mathbf{v}$  или поле *массовых скоростей*  $\rho \mathbf{v}$  ( $\rho$  — плотность) для потока жидкости или газа, поле сил  $\mathbf{F}$ , поле электрической напряженности  $\mathbf{E}$  и т. д.

*Векторной линией* поля  $\mathbf{A}$  называется линия (L), в каждой точке которой вектор  $\mathbf{A}$ , отвечающий этой точке, касается (L); другими словами, это — линия, идущая в каждой своей точке вдоль поля. В зависимости от физического смысла поля векторная линия может называться *линией тока* для поля скоростей, *силовой линией* для силового поля и т. д.

Задача о построении векторных линий заданного векторного поля геометрически равносильна задаче о построении интегральных линий для заданного поля направлений. Поэтому эта задача сводится к интегрированию

системы дифференциальных уравнений; для этого надо ввести в пространство какую-либо систему координат. Если, например, ввести декартовы координаты  $x, y, z$ , то вектор  $\mathbf{A}$  можно разложить:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{i} + A_y(x, y, z)\mathbf{j} + A_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (1)$$

Систему дифференциальных уравнений векторных линий поля  $\mathbf{A}$  можно записать в симметричной форме

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}$$

Для плоских полей эта система превращается в уравнение

$$\frac{dx}{A_x(x, y)} = \frac{dy}{A_y(x, y)}.$$

Как подробно разбиралось в теории дифференциальных уравнений, через каждую неособую точку проходит ровно одна векторная линия. Таким образом, вся область, в которой задано поле, оказывается заполненной векторными линиями. При этом в достаточной близости от любой *обыкновенной*, т. е. неособой точки эти линии напоминают совокупность параллельных отрезков, но несколько искривленных. Вблизи особых точек поля семейство векторных линий может иметь очень сложный вид.

**2. Поток вектора через поверхность.** Пусть в пространстве, в котором задано поле вектора  $\mathbf{A}$ , выбрана ориентированная замкнутая или незамкнутая поверхность  $(\sigma)$ ; напомним, что ориентированность означает указание наружной и внутренней сторон у поверхности

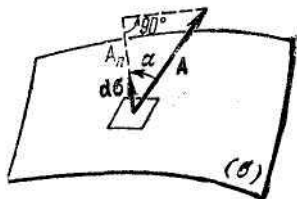


Рис.45.

*Потоком вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность  $(\sigma)$*  называется интеграл по поверхности

$$Q = \int_{(\sigma)} A_n d\sigma,$$



где  $A_n$  — проекция вектора  $\mathbf{A}$  на внешнюю нормаль к  $(\sigma)$ . Применяя вектор площадки и скалярное произведение векторов, можно переписать выражения для потока в виде (рис. 45)

$$Q = \int_{(\sigma)} A \cos \alpha \, d\sigma = \int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

При вычислении потока, если вектор  $\mathbf{A}$  задан можно воспользоваться преобразованием

$$\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (\cos(\hat{\mathbf{n}}, x) \mathbf{i} + \cos(\hat{\mathbf{n}}, y) \mathbf{j} + \cos(\hat{\mathbf{n}}, z) \mathbf{k}) \, d\sigma = A_x \cos(\hat{\mathbf{n}}, x) \, d\sigma + A_y \cos(\hat{\mathbf{n}}, y) \, d\sigma + A_z \cos(\hat{\mathbf{n}}, z) \, d\sigma.$$

Интеграл

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

разбивается на сумму трех интегралом, которые вычисляются аналогично. Например, первый интеграл

$$\int_{(\sigma)} A_x \cos(\hat{\mathbf{n}}, x) \, d\sigma$$

можно вычислить, если заметить, что

$$\cos(\hat{\mathbf{n}}, x) \, d\sigma = \pm d\sigma_x,$$

где справа стоит элемент площади проекции  $(\sigma_x)$  поверхности  $(\sigma)$  на плоскость  $y, z$ , а знак в правой части определяется знаком  $\cos(\hat{\mathbf{n}}, x)$ . Если этот знак всюду  $+$ , то можем написать

$$\int_{(\sigma)} A_x \cos(\hat{\mathbf{n}}, x) \, d\sigma = \int_{(\sigma_x)} A_x \, d\sigma_x = \iint_{(\sigma_x)} A_x(x, y, z) \, dy \, dz,$$

причем в подынтегральную функцию надо подставить выражение  $x=x(y, z)$  для поверхности  $(\sigma)$ . Аналогично рассматривается случай, когда этот знак всюду  $-$ . Если

$\cos(\hat{\mathbf{n}}, x)$  на  $(\sigma)$  сменяет знак, то  $(\sigma)$  надо предварительно разбить на куски, на которых этот знак постоянен, после чего преобразовывать интегралы по каждому из этих кусков порознь.

*Поток, очевидно, есть величина скалярная.* Будучи частным случаем интеграла по поверхности, он обладает всеми свойствами таких интегралов. Отметим свойство, характерное для потока: при перемене ориентации поверхности поток множится на  $-1$ , так как  $A_n$  меняет знак. Поток существенно зависит от «направления» поверхности  $(\sigma)$ : если поверхность расположена так, что поле пересекает ее всюду изнутри наружу, то  $Q > 0$ , а если всюду снаружи внутрь, то  $Q < 0$ ; если же поле частично пересекает  $(\sigma)$  изнутри наружу, а частично снаружи внутрь, то поток равен сумме положительной и отрицательной

величин и может оказаться положительным, отрицательным или равным нулю. Всегда равен нулю поток через поверхность, целиком заполненную дугами векторных линий, так как для нее поле  $\mathbf{A}$  касается поверхности и потому  $A_n = 0$ .

Физический смысл потока зависит от вида поля. Пусть, например, рассматривается поле  $\mathbf{v}$  скоростей при течении газа. Тогда

$$dQ = \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

равен объему элементарного столба газа, проходящего через площадку ( $d\sigma$ ) за единицу времени. Поэтому весь поток в этом случае равен объему газа, пронесимого через воображаемую поверхность ( $\sigma$ ) за единицу времени изнутри наружу. Аналогично легко проверить, что для поля  $\mathbf{A} = \rho\mathbf{v}$  массовых скоростей поток равен массе газа, пронесимого через ( $\sigma$ ) за единицу времени изнутри наружу.

Поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность ( $\sigma$ ) иначе называется *количеством векторных линий* поля  $\mathbf{A}$ , пересекающих ( $\sigma$ ) изнутри наружу. Это название несколько условное, так как указанное количество, как правило, имеет размерность и получается дробным, но из-за своей наглядности широко применяется. Надо иметь в виду, что это «количество» понимается в алгебраическом смысле. Так, если одна часть поверхности ( $\sigma$ ) пересекается линиями изнутри наружу, а другая часть — снаружи внутрь, то количество линий может быть любого знака или равным нулю в зависимости от того, какую часть пересекает больше линий.

**3. Дивергенция.** Представим себе в пространстве, где задано поле вектора  $\mathbf{A}$ , некоторый объем ( $\Omega$ ), ограниченный поверхностью ( $\sigma$ ), которую мы будем считать ориентированной так, что ( $\Omega$ ) прилегает к ее внутренней стороне. Если поток

$$Q = \oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

положителен (кружок у знака интеграла выписывать не обязательно; он подчеркивает, что интеграл берется по замкнутой поверхности), то это значит, что через ( $\sigma$ ) наружу проходит больше векторных линий, чем внутрь. Тогда говорят, что в ( $\Omega$ ) имеется *источник* векторных линий, а  $Q$  называется *обильностью* этого источника. Если  $Q < 0$ , то говорят, что в ( $\Omega$ ) имеется *сток* или, что то же, источник отрицательной обильности, для простоты мы будем всегда считать сток частным случаем источника. Если  $Q=0$ , то либо в ( $\Omega$ ) нет ни источников, ни стоков, либо же они взаимно компенсируются.

Впрочем, и при  $Q \neq 0$  в  $(\Omega)$  могут быть как источники, так и стоки, которые, однако, в этом случае компенсируются не полностью. Представление о линиях, начинающихся в объеме  $(\Omega)$ , оправдывается следующим простым фактом: если тело  $(\Omega)$  с помощью каких-то поверхностей мысленно разбито на несколько тел  $(\Omega_1), (\Omega_2), \dots, (\Omega_k)$ , то поток поля  $\mathbf{A}$  через поверхность тела  $(\Omega)$  изнутри наружу равен сумме аналогичных потоков, взятых для каждого из тел  $(\Omega_1), (\Omega_2), \dots, (\Omega_k)$ .

Источники векторного поля могут быть сосредоточенными в отдельных точках или быть распределенными по линиям, поверхностям и, наконец, по пространству. Рассмотрим сначала последний случай. Здесь можно говорить не только о средней плотности источника  $Q/\Omega$  (под  $\Omega$  понимается численное значение объема  $(\Omega)$ ), но и о плотности источника в любой точке  $M$  пространства, равной

$$\lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\Delta Q}{\Delta\Omega} = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \left( \int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} / \Delta\Omega \right), \quad (2)$$

где под  $(\Delta\Omega)$  понимается малый объем, содержащий точку  $M$ , а под  $(\Delta\sigma)$ —его поверхность. Эта плотность источника называется также *дивергенцией (расходимостью)* векторного поля  $\mathbf{A}$  и обозначается через  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ . Таким образом, можно сказать, что *дивергенция векторного поля—это количество векторных линий, начинающихся в бесконечно малом объеме (или, что то же, поток поля  $\mathbf{A}$  через поверхность этого объема), в расчете на единицу этого объема*. Отметим, что дивергенция векторного поля есть величина скалярная, более точно, образует скалярное поле, так как она принимает в каждой точке пространства свое значение.

Формулу (2) можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{dQ}{d\Omega}, \quad \text{т. е. } dQ = \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega.$$

Получилось выражение для количества векторных линий, начинающихся в элементарном объеме  $(d\Omega)$ . Производя суммирование, получаем выражение для количества векторных линий, начинающихся в конечном объеме  $(\Omega)$ , т. е. для потока вектора  $\mathbf{A}$ ,

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(\Omega)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\Omega, \quad (3)$$

где  $(\Omega)$  — конечный объем, а  $(\sigma)$  — его поверхность. Эта важная формула называется *формулой Остроградского*. Она

справедлива всегда, если в  $(\Omega)$  поле  $\mathbf{A}$  и его дивергенция не обращаются в бесконечность или если дивергенция обращается в бесконечность, но так, чтобы интеграл в правой части (3) сходился.

Физический смысл дивергенции поля зависит от физического смысла вектора  $\mathbf{A}$ . Так, если рассматривается поле скоростей  $\mathbf{v}$  при течении газа, то  $\text{div } \mathbf{v}$  в силу п. 2 равна скорости относительного увеличения бесконечно малого объема, а  $\text{div}(\rho\mathbf{v})$  равна плотности источника масс. Например, если в процессе течения газа его масса не меняется (такое изменение может получиться в результате химической или какой-либо подобной реакции), то  $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ ; в то же время  $\text{div } \mathbf{v} > 0, < 0$  или  $= 0$  в зависимости от того, будет ли газ в процессе течения расширяться, сжиматься или не менять своей плотности. Для электрического поля  $\mathbf{E}$  дивергенция, т. е.  $\text{div } \mathbf{E}$ , пропорциональна плотности заряда, распределенного в пространстве, и т. д.

Если поле имеет источники, распределенные по линиям или поверхностям (так может быть, только если оно имеет разрывы), то можно говорить о плотности их распределения. В этом случае в правой части формулы (3) должны быть добавлены криволинейные или поверхностные интегралы по линиям и поверхностям, несущим источники и расположенным в  $(\Omega)$ , а также отдельные слагаемые, отвечающие точечным источникам, расположенным в  $(\Omega)$ , если такие имеются. Если пользоваться обобщенными функциями, то формула (3) справедлива всегда.

В случае плоского поля формула (2) для дивергенции упрощается: именно, в этом случае

$$(\text{div } \mathbf{A})_M = \lim_{(\Delta\sigma) \rightarrow M} \left( \oint_{(\Delta l)} A_n dl / \Delta\sigma \right), \quad (4)$$

где  $(\Delta\sigma)$ —малая фигура в плоскости поля, содержащая точку  $M$ , а  $(\Delta l)$ —контур этой фигуры. Как известно, плоское поле может иметь двойкий физический смысл. Если поле задано только в плоскости, то числитель в правой части (4) по определению равен потоку вектора  $\mathbf{A}$  через линию  $(\Delta l)$ . Если же поле задано в пространстве, но не зависит от одной из декартовых координат, например  $z$ , то числитель равен потоку вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность цилиндра, построенного на  $(\Delta\sigma)$ , с единичной высотой, параллельной оси  $z$ , а знаменатель равен объему этого цилиндра.

Формула Остроградского для плоского поля имеет вид

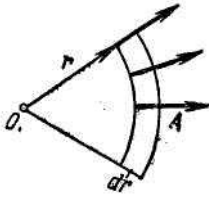


Рис.46.

$$\oint_{(l)} A_n dl = \int_{(\sigma)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\sigma,$$

где  $(\sigma)$  — конечная фигура, а  $(l)$  — ее контур.

Иногда оказывается возможным подсчитать дивергенцию непосредственно на основе ее определения (2). Рассмотрим, например, центрально-симметричное поле в пространстве, определенное формулой

$$\mathbf{A} = \bar{f}(r) \mathbf{r} = \frac{\bar{f}(r)}{r} \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор текущей точки, а  $f(r)$  — некоторая заданная непрерывная функция его модуля (рис.46). Тогда поток поля через сферу радиуса  $r$  равен

$$Q(r) = \int A_n d\sigma = \int A_r d\sigma = \int \bar{f}(r) d\sigma = \bar{f}(r) 4\pi r^2,$$

а потому количество векторных линий, начинающихся в тонком сферическом слое ширины  $dr$ , равно

$$dQ = 4\pi d[r^2 \bar{f}(r)] = 4\pi[2r \bar{f}(r) + r^2 \bar{f}'(r)] dr.$$

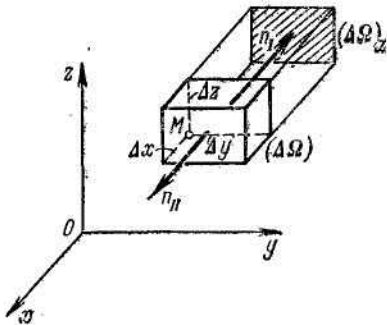


Рис.47.

Значит, на единицу объема этого слоя приходится

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{dQ}{4\pi r^2 dr} = \frac{2}{r} l'(r) + l'(r).$$

**4. Выражение дивергенции в декартовых координатах.** Пусть в пространстве задана система декартовых координат, так что поле  $\mathbf{A}$  можно задать в форме (1). Тогда можно получить удобную формулу для вычисления  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ . Для этого воспользуемся тем, что в формуле (2) для дивергенции форма элементарного объема  $(\Delta\Omega)$  несущественна, и выберем в качестве этого объема малый прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат (рис. 47), Тогда поток вектора  $\mathbf{A}$  через поверхность параллелепипеда, т. е. числитель дроби, стоящей в выражении (2), можно представить в виде шести слагаемых, отвечающих шести граням параллелепипеда. Рассмотрим сумму двух из этих слагаемых, отвечающих задней и передней граням, которые мы обозначим соответственно цифрами 1 и 11. Тогда (см. рис.47)

$$(\dot{A}_n)_1 = - (A_x)_1,$$

а на основе формулы Тейлора

$$(A_n)_{11} = (A_x)_{11} = (A_x)_1 + (\partial_x A_x)_1 + \dots,$$

где

$$\partial_x A_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x$$

означает частный дифференциал по  $x$ , получающийся из-за того, что точки передней грани отличаются от соответствующих точек задней грани значением координаты  $x$ , а многоточием обозначены члены высшего порядка малости. Так как интегрирование по указанным граням сводится к интегрированию по их проекции на плоскость  $yz$ , т. е. по  $(\Delta\Omega)_x$ , то

$$\begin{aligned} \int_{(1)} A_n d\sigma + \int_{(11)} A_n d\sigma &= \iint_{(\Delta\Omega)_x} (A_n)_1 dy dz + \iint_{(\Delta\Omega)_x} (A_n)_{11} dy dz = \\ &= \iint_{(\Delta\Omega)_x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_1 \Delta x dy dz + \dots = \left( \iint_{(\Delta\Omega)_x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_1 dy dz \right) \Delta x + \dots = \\ &= \left( \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{cp} \Delta y \Delta z \right) \Delta x + \dots = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z + \dots \end{aligned}$$

Здесь многоточиями все время обозначаются члены высшего порядка, чем выписанные; в предпоследнем переходе применена формула среднего значения (п. 3, свойство 10), а в последнем переходе — формула

$$\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{cp} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M + \text{бесконечно малая.}$$

Проводя аналогичные вычисления для двух других пар граней, получим выражение для потока через всю поверхность параллелепипеда

$$\int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z + \dots,$$

и так как в данном случае

$$\Delta\Omega = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

то

$$\frac{1}{\Delta\Omega} \int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M + \dots$$

Переходя к пределу, получаем окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (5)$$

мы не пишем индекс  $M$ , так как эта формула справедлива в *любой* точке поля.

Для плоского поля в правой части формулы (5) отсутствует третье слагаемое.

**5. Линейный интеграл и циркуляция.** Пусть в пространстве, в котором задано поле вектора  $\mathbf{A}$ , выбрана ориентированная линия  $(L)$ , т. е. линия, для которой указано направление ее обхода. Тогда *линейным интегралом вектора  $\mathbf{A}$  по линии  $(L)$*  называется криволинейный интеграл

$$I = \int_{(L)} A_\tau dL, \quad (6)$$

где  $A_\tau$  — проекция вектора  $\mathbf{A}$  на касательную к  $(L)$ , проведенную в направлении обхода (рис.48). Так как вектор  $d\mathbf{r}$  идет по  $\boldsymbol{\tau}$ , а  $|d\mathbf{r}| = dL$ , то выражение для линейного интеграла можно переписать так:

$$I = \int_{(L)} A \cos \alpha |d\mathbf{r}| = \int_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \quad (7)$$

*Линейный интеграл есть величина скалярная* и обладает обычными свойствами криволинейных интегралов. При перемене ориентации линии  $(L)$  он множится на  $-1$ . Если угол  $\alpha$  (рис. 48) во всех точках линии  $(L)$  острый, то  $I > 0$ , а если он тупой, то  $I < 0$ . Интеграл равен нулю ( $I = 0$ ), если угол  $\alpha$  все время прямой или, что бывает чаще, если интегралы по частям  $(L)$ , в которых  $\alpha$  острый и  $\alpha$  тупой, взаимно уничтожаются.

Физический смысл линейного интеграла особенно прост, если  $\mathbf{A}$  — поле сил; в этом случае интеграл (6) равен работе,

совершаемой по полю, когда точка, на которую действует сила, проходит линию (L).

Если (L) — замкнутая линия, то линейный интеграл называется циркуляцией.

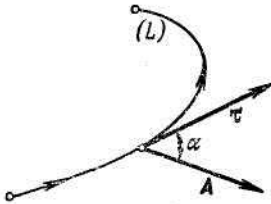


Рис.48.

**6. Ротор.** Нам понадобится выражение для циркуляции по бесконечно малому контуру  $(\Delta L)$ . Для этого допустим, что вектор  $A$  разложен по ортам декартовых осей, т. е. имеет вид (1), а контур  $(\Delta L)$  расположен вблизи некоторой точки  $M_0$ , и вычислим интеграл от первого слагаемого в правой части формулы (7):

$$\oint_{(\Delta L)} A_x(x, y, z) dx = \oint_{(\Delta L)} \left[ (A_x)_0 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_0 (x-x_0) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 (y-y_0) + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 (z-z_0) + \dots \right] dx. \quad (8)$$

Здесь мы воспользовались формулой Тейлора, причем индекс «нуль» говорит о том, что указанные величины берутся в точке  $M_0$ , а многоточием обозначены члены высшего порядка малости.

Ранее были доказаны формулы

$$\begin{aligned} \oint_{(\Delta L)} \left[ (A_x)_0 + \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_0 (x-x_0) - \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 y_0 - \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 z_0 \right] dx = \\ = \oint_{(\Delta L)} [C_1 + C_2 x] dx = 0, \end{aligned}$$

$$\oint_{(\Delta L)} y dx = -\Delta S \cos(\widehat{n, z}), \quad \oint_{(\Delta L)} z dx = \Delta S \cos(\widehat{n, y}),$$

где  $\Delta S$  — площадь фигуры, ограниченной линией  $(\Delta L)$  (с точностью до малым высшего порядка эту фигуру можно считать плоской), а  $\mathbf{n}$  — нормаль к  $(\Delta S)$ , причем направление этой нормали согласовано с направлением обхода  $(\Delta L)$  по правилу винта. Подставляя эти результаты в (8), получим



$$\oint_{(\Delta L)} A_x dx = \left[ \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y}) - \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{z}) \right] \Delta S + \dots \quad (9)$$

Вычисляя аналогично два других интеграла в правой части формулы (7), для чего достаточно в формуле (9) провести два раза циклическую перестановку координат, и суммируя результаты, получим

$$\begin{aligned} \oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = & \left\{ \left[ \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y}) - \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{z}) \right] + \right. \\ & + \left[ \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{z}) - \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{x}) \right] + \\ & \left. + \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{x}) - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_0 \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y}) \right] \right\} \Delta S + \dots = \\ = & \left\{ \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_0 - \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_0 \right] \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{x}) + \left[ \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_0 \right] \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y}) + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} \right)_0 - \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \right] \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{z}) \right\} \Delta S + \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Полученный результат становится более обозримым, если ввести вектор, называемый *ротором* (*вихрем*, *вихревым вектором*) поля  $\mathbf{A}$  и обозначаемый буквами  $\text{rot } \mathbf{A}$ , по формуле

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (11)$$

Так как этот вектор в каждой точке пространства имеет, вообще говоря, иное значение, то *ротор векторного поля образует новое векторное поле*.

Если заметить дополнительно, что  $\mathbf{n}$ , как и каждый единичный вектор, имеет разложение

$$\mathbf{n} = \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{x}) \mathbf{i} + \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{y}) \mathbf{j} + \cos(\widehat{\mathbf{n}}, \widehat{z}) \mathbf{k},$$

то можно переписать формулу (11.260) в более простом виде

$$\oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\text{rot } \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{n} \Delta S + \dots = (\text{rot}_n \mathbf{A})_0 \Delta S + \dots; \quad (12)$$

в последнем выражении индекс  $n$  указывает на то, что берется проекция ротора на нормаль  $\mathbf{n}$ , а многоточием, как и выше, обозначены члены высшего порядка малости. Формула (12) и дает выражение для циркуляции по бесконечно малому контуру.

Если обе части формулы (12) разделить на  $\Delta S$ , а затем перейти к пределу, то мы получим, при естественных обозначениях,

$$(\operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{A})_M = \lim_{(\Delta L) \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S} \quad (13)$$

Итак, в любой точке  $M$  проекция ротора поля на любое направление  $\mathbf{n}$  равна отношению циркуляции поля по бесконечно малому контуру, перпендикулярному к  $\mathbf{n}$ , к площади, охватываемой этим контуром. Отсюда, в частности, видно, что ротор, определение (11) которого привязано к выбранной системе координат, на самом деле связан с полем инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы координат, так как правая часть формулы (13) не зависит от такого выбора, а знание проекции вектора на любое направление определяет этот вектор однозначно.

В то же время формула (13) показывает, что ротор является псевдовектором, так как при перемене правила винта направление обхода  $(\Delta L)$  надо переменить, что приведет к перемене знака правой части.

На рис. 49 показано несколько простых примеров векторных полей и указан их ротор, который можно подсчитать по формуле (11) либо же по

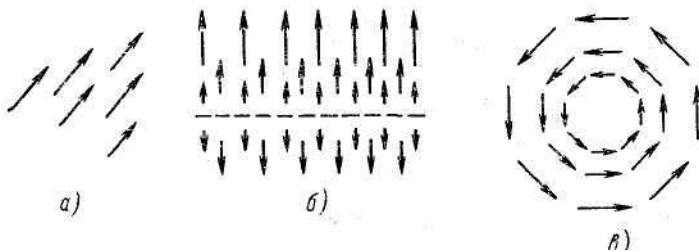


Рис.49.

а)  $\mathbf{A}=\text{const. rot } \mathbf{A}=0$ ,

б)  $\mathbf{A}=\lambda y\mathbf{j}$ ,  $\operatorname{rot } \mathbf{A}=0$ ;

в)  $\mathbf{A}=-\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ ,  $\operatorname{rot } \mathbf{A}=2\omega\mathbf{k}$ .

формуле (13); для этого  $(\Delta L)$  надо выбрать соответствующим образом. Третий пример изображает поле скоростей при вращении абсолютно твердого тела вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ ; из рис. 49,в следует, что при таком вращении поле линейных скоростей имеет постоянный ротор, равный удвоенному вектору угловой скорости. Коши показал, что при

произвольном движении сплошной среды — газа, жидкости или твердого тела — каждый малый объем участвует одновременно в нескольких движениях, для которых поля скоростей имеют вид, изображенный на рис. 49 (поступательное, деформационное и вращательное движения). Так как ненулевой ротор получается лишь для вращательного движения, то мы видим, что при произвольном движении среды ротор поля линейных скоростей частиц равен в каждой точке удвоенному вектору угловой скорости соответствующей частицы. Конечно, в общем случае ротор получается в различных точках различным. Таким образом, при течении жидкости или газа отличие ротора поля линейных скоростей от нуля указывает на наличие завихренности, чем и объясняется название «ротор».

Особенно простой вид имеет ротор плоского поля  $\mathbf{A} = A_x(x, y)\mathbf{i} + A_y(x, y)\mathbf{j}$ : действительно, в силу формулы (11) получаем в этом случае

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

**7. Формулы Грина и Стокса.** Формулы Грина и Стокса осуществляют преобразование циркуляции вектора по замкнутому контуру в двойной интеграл по поверхности, ограниченной этим контуром, причем формула Грина относится к плоскому полю, а формула Стокса — к пространственному. Хотя первая формула непосредственно следует из второй, мы приведем сначала независимый вывод формулы Грина из-за его простоты.

Рассмотрим циркуляцию плоского поля

$$\mathbf{A} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

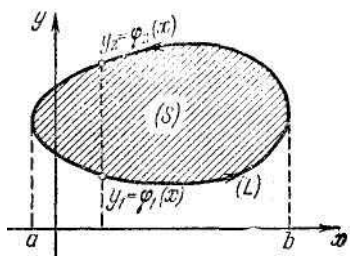


Рис.50.

по замкнутому контуру (L), проходимому в положительном направлении и ограничивающему плоскую конечную область

(S) (рис. 50). И силу формулы (11) рассматриваемую циркуляцию можно записать в виде

$$\Gamma = \oint_{(L)} P(x, y) dx + \oint_{(L)} Q(x, y) dy. \quad (14)$$

Первый интеграл равен (см. рис. 50)

$$\int_a^b P(x, y_1) dx + \int_b^a P(x, y_2) dx = - \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)] dx. \quad (15)$$

Под знаком интеграла стоит частное приращение функции  $P$  по  $y$ , которое можно представить в виде интеграла от производной

$$P(x, y_2) - P(x, y_1) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Подставляя в (15), получаем

$$- \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = - \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Аналогичное преобразование второго интеграла (14) и сложение результатов приводят к формуле Грина

$$\oint_{(L)} (P dx + Q dy) = \iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS. \quad (16)$$

Этой формулой можно пользоваться, если все функции  $P$ ,  $Q$ ,  $\partial Q/\partial x$ ,  $\partial P/\partial y$  конечны всюду в  $(S)$ . Из нее вытекает, в частности, утверждение о том, что если в односвязной области  $(G)$  удовлетворяется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то в этой области выражение

$$P dx + Q dy$$

будет полным дифференциалом. В самом деле, тогда в силу формулы (16) для любого замкнутого контура  $(L)$  в  $(G)$  будет

$$\oint (P dx + Q dy) = 0$$

Условие односвязности нужно затем, чтобы для любого такого  $(L)$  вся часть плоскости, расположенная внутри  $(L)$ , также принадлежала  $(G)$ , что не всегда выполнимо для многосвязной области.

Перейдем теперь к аналогичной формуле в пространстве. Эта формула, найденная в 1864 г. английским физиком и

математиком Дж. Стоксом (1819—1903), широко применяется в теории векторного поля. Пусть задан *конечный* ориентированный контур  $(L)$ , ограничивающий ориентированную поверхность  $(S)$ , причем ориентации  $(L)$  и  $(S)$  согласованы (рис. 51). Разобьем  $(S)$  на малые площадки  $(\Delta S_1)$ , ...,  $(\Delta S_m)$  с контурами  $(\Delta L_1)$ , ..., ...,  $(\Delta L_m)$ , которые ориентируем в соответствии с ориентацией  $(L)$  и  $(S)$ . Тогда легко видеть, что

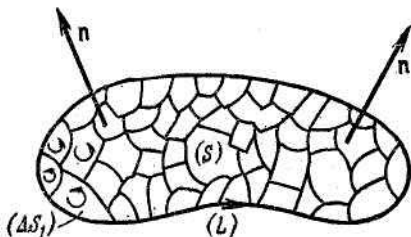


Рис.51.

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m \oint_{(\Delta L_i)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (17)$$

так как в правой части интегралы по всем дугам, лежащим внутри  $(L)$ , взаимно уничтожаются, а оставшиеся интегралы как раз дают левую часть формулы (17). К отдельным слагаемым в правой части формулы (17) можно применить представление (12), что даст

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m (\text{rot}_n \mathbf{A})_i \Delta S_i + \dots,$$

где индекс  $i$  показывает, что соответствующие значения относятся к  $i$ -й площадке. Сумма в правой части — это интегральная сумма (п. 2), и потому, переходя к пределу при бесконечном измельчении разбиения, получим

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \text{rot}_n \mathbf{A} \, dS \left( = \int_{(S)} \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \right). \quad (18)$$

Итак, *циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную указанным контуром*. Это и есть *формула Стокса*. Она справедлива, если на поверхности  $(S)$  поле  $\mathbf{A}$  и его ротор конечны, а если ротор и обращается в бесконечность, то так, чтобы интеграл в правой части (18) сходиллся.

Отметим, что в формуле Стокса контур  $(L)$  может состоять из нескольких кусков; тогда они должны быть ориентированы соответственным образом (рис.52). Это же замечание относится и к формуле Остроградского (п. 23).

Из формулы Стокса вытекает, в частности, достаточность условий для независимости интеграла от контура интегрирования. Для этого надо рассмотреть поле  $A = Pi + Qj + Rk$ ,

для которого будет  $\text{rot}A = 0$ , а затем, натянув на любой замкнутый контур  $(L)$  «пленку»  $(S)$ , получить в силу формулы Стокса известное равенство. При этом односвязность области, в которой осуществляются все построения, нужна, чтобы гарантировать возможность такого натягивания пленки: в самом деле, при стягивании контура  $(L)$  в точку в пределах области он сам опишет требуемую поверхность  $(S)$  (рис. 53).

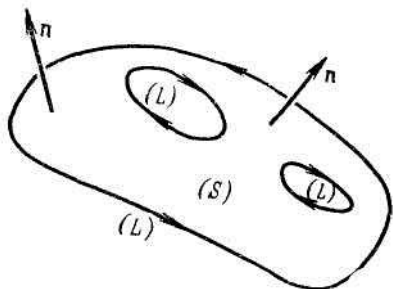


Рис.52.

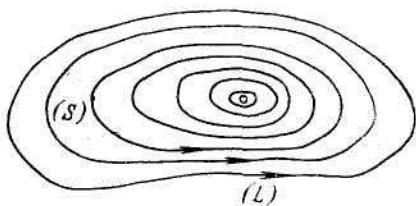


Рис.53.

**8. Выражение векторных операций в криволинейной ортогональной системе координат.** Рассмотрим (рис. 54) какую-либо криволинейную *ортогональную* систему координат  $\lambda, \mu, \nu$  в пространстве. Здесь естественно участвующие векторные поля разлагать в любой точке по системе единичных векторов, касательных к координатным линиям:

$$\Lambda = A_\lambda \mathbf{e}_\lambda + A_\mu \mathbf{e}_\mu + A_\nu \mathbf{e}_\nu.$$

Для выражения градиента скалярного поля  $u$  в любой точке  $M$  напомним, что при подсчете градиента с помощью формулы

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

систему декартовых координат можно располагать произвольно, в частности, можно принять

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_\lambda, \quad \mathbf{j} = \mathbf{e}_\mu, \quad \mathbf{k} = \mathbf{e}_\nu$$

Тогда получим

$$\text{grad } u = \frac{\partial_\lambda u}{\partial s_\lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial_\mu u}{\partial s_\mu} \mathbf{e}_\mu + \frac{\partial_\nu u}{\partial s_\nu} \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{l_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{l_\mu} \frac{\partial u}{\partial \mu} \mathbf{e}_\mu + \frac{1}{l_\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathbf{e}_\nu$$

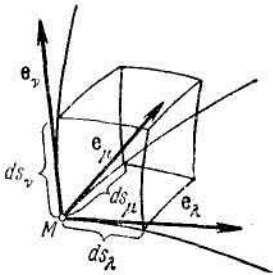


Рис.54.

где  $l_\lambda, l_\mu, l_\nu$ —коэффициенты Ламе (п. 15).

При подсчете дивергенции векторного поля нельзя непосредственно воспользоваться формулой (1), так как если принять, как в предыдущем абзаце,  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_\lambda$  и т. д., то равенство  $A_x = A_\lambda$  будет соблюдаться лишь в точке  $M$  и потому равенство  $\partial A_x / \partial x = \partial A_\lambda / \partial \lambda$ , вообще говоря, несправедливо. Здесь можно воспользоваться доказательством, приведенным в начале п. 4, рассмотрев поток поля через поверхность бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, ограниченного координатными линиями (рис. 54). Рассматривая сумму потоков через грани, перпендикулярные к линии  $\lambda$ , получим, что эта сумма с точностью до малых высшего порядка равна

$$\partial_\lambda (A_\lambda ds_\mu ds_\nu) = \partial_\lambda (l_\mu l_\nu A_\lambda) d\mu d\nu = \frac{\partial (l_\mu l_\nu A_\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda d\mu d\nu.$$

Суммируя потоки через две другие пары граней и деля на элементарный объем

$$d\Omega = l_\lambda l_\mu l_\nu d\lambda d\mu d\nu,$$

получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{l_\lambda l_\mu l_\nu} \left[ \frac{\partial (l_\mu l_\nu A_\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (l_\lambda l_\nu A_\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial (l_\lambda l_\mu A_\nu)}{\partial \nu} \right].$$

Чтобы получить выражение для ротора, можно исходить из его определения (13). Циркуляция вектора  $\mathbf{A}$  по бесконечно малому прямоугольнику, перпендикулярному к вектору  $\mathbf{e}_\lambda$ , с точностью до малых высшего порядка, равна (рис. 55)

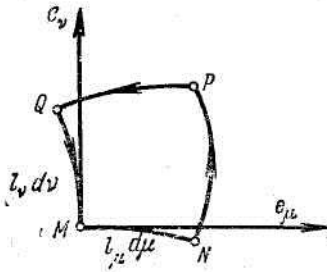


Рис.55.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \left( \int_{NP} - \int_{MQ} \right) - \left( \int_{QP} - \int_{MN} \right) = \\ &= \partial_\mu (A_\nu ds_\nu) - \partial_\nu (A_\mu ds_\mu) = \\ &= \partial_\mu (l_\nu A_\nu d\nu) - \partial_\nu (l_\mu A_\mu d\mu) = \\ &= \left[ \frac{\partial (l_\nu A_\nu)}{\partial \mu} - \frac{\partial (l_\mu A_\mu)}{\partial \nu} \right] d\mu d\nu. \end{aligned}$$

Производя деление на элементарную площадку

$$dS = l_\mu l_\nu d\mu d\nu,$$

а затем циклическую перестановку индексов, получим

$$dS = l_\mu l_\nu d\mu d\nu,$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\lambda = \frac{1}{l_\mu l_\nu} \left[ \frac{\partial (l_\nu A_\nu)}{\partial \mu} - \frac{\partial (l_\mu A_\mu)}{\partial \nu} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\mu = \frac{1}{l_\lambda l_\nu} \left[ \frac{\partial (l_\lambda A_\lambda)}{\partial \nu} - \frac{\partial (l_\nu A_\nu)}{\partial \lambda} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\nu = \frac{1}{l_\lambda l_\mu} \left[ \frac{\partial (l_\mu A_\mu)}{\partial \lambda} - \frac{\partial (l_\lambda A_\lambda)}{\partial \mu} \right].$$



Для плоских полей все указанные формулы естественно упрощаются: надо положить  $A_v = 0$ ,  $l_v=1$  и считать все участвующие величины не зависящими от  $v$ .

**9. Общая формула для преобразования интегралов.** Оказывается, что формулы Стокса, Остроградского и аналогичные формулы в  $n$ -мерном пространстве можно записать в виде единой формулы. Для этого допустим, что в  $k$ -мерном пространстве  $E_k$  с мерой Лебега дано ориентированное  $(p+1)$ -мерное ( $p=1, 2, \dots, k-1$ ) многообразие  $(\Omega)$  с  $p$ -мерной границей  $(\Omega')$ . Ориентация  $(\Omega)$  порождает соответствующую ориентацию  $(\Omega')$  по следующему правилу: если некоторый малый  $(p + 1)$ -мерный тетраэдр  $A_1A_2A_3\dots A_{p+1}A_{p+2}$ , вершины которого перечислены в соответствии с ориентацией  $(\Omega)$ , расположен так, что его грань  $A_1A_2A_3\dots A_{p+1}$  принадлежит  $(\Omega')$ , то этот порядок вершин должен соответствовать ориентации  $(\Omega')$ . ( Если  $(\Omega)$  — поверхность в трехмерном пространстве, то это правило совпадает с обычным правилом согласования ориентации поверхности и ее контура.)

Пусть рассматривается интеграл вида

$$\int_{(S)} \dots \int_{m_1, \dots, m_p=1}^k u_{m_1, m_2, \dots, m_p}(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_{m_1} dt_{m_2} \dots dt_{m_p}.$$

где  $(S) = (\Omega')$ . Подынтегральное выражение

$$\omega = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_p=1}^k u_{m_1, \dots, m_p}(t_1, \dots, t_k) dt_{m_1} \dots dt_{m_p}, \tag{19}$$

однородное, измерения  $p$  относительно  $dt_1 \dots, dt_k$ , называется *дифференциальной формой* измерения  $p$ .

Над дифференциальными формами можно производить некоторые действия. Так, формы одинакового измерения можно складывать; по существу, и выражение (19) представляет собой сумму простейших форм—одночленов. Формы можно перемножать, причем в соответствии с определением интеграла принято считать, что при перестановке двух дифференциалов в одночленной форме она множится на  $-1$ , а при наличии двух одинаковых дифференциалов она равна нулю. Форму можно умножить на константу или на функцию от  $t_1, t_2, \dots, t_k$ ; впрочем, последнюю можно рассматривать как форму нулевого измерения. При этом соблюдаются обычные правила сложения и умножения, однако умножение, вообще говоря, не перестановочно.

Дифференциальную форму можно дифференцировать по правилу

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left(\sum u_{m_1, m_2, \dots, m_p} dt_{m_1} \dots dt_{m_p}\right) = \sum du_{m_1, \dots, m_p} dt_{m_1} \dots dt_{m_p} = \\ &= \sum \left(\frac{\partial u_{m_1, \dots, m_p}}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial u_{m_1, \dots, m_p}}{\partial t_k} dt_k\right) dt_{m_1} \dots dt_{m_p}, \end{aligned} \quad (20)$$

где надо еще раскрыть скобки и привести подобные члены. Как видим, при дифференцировании формы ее измерение повышается на единицу.

Оказывается, что при таких определениях имеет место следующая *общая формула преобразования интеграла*

$$\underbrace{\int \dots \int}_{(S)} \sum_{m_1, \dots, m_p=1}^k u_{m_1, m_2, \dots, m_p}(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_{m_1} dt_{m_2} \dots dt_{m_p} : \\ \int \dots \int_{(\Omega')} \omega = \int \dots \int_{(\Omega)} \omega. \quad (21)$$

Рассмотрим, например, случай  $\kappa = 2, p=1$ . Если писать  $x, y$  вместо  $t_1, t_2$  и обозначить

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

то

$$\begin{aligned} d\omega &= dP dx + dQ dy = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy, \end{aligned}$$

откуда формула (21), с точностью до обозначений, приобретает вид формулы Грина (16).

## 2. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО АНАЛИЗА

### 2.1. Элементы тензорной алгебры

#### 2.1.1. Аффинная система координат на плоскости

1. *Общая декартова* или *аффинная* система координат на плоскости определяется заданием точки — начала координат и двух

независимых между собой векторов  $m_1$  и  $m_2$ , которые называются *масштабными*.

Всякий вектор  $a$  можно разложить по масштабным векторам системы, представив его в виде линейной комбинации

$$a = a^1 m_1 + a^2 m_2. \quad (1)$$

Коэффициенты разложения  $a^1, a^2$  вектора  $a$  по масштабным векторам системы называются *координатами* этого вектора. Разложение (1) можно записать также сокращенно

$$a = \sum_{i=1}^2 a^i m_i$$

или еще короче

$$a = a^i m_i, \quad (2)$$

условившись подразумевать знак суммирования во всяком выражении, содержащем два одинаковых индекса, если один находится вверху, а другой внизу тех букв, при которых они поставлены. В дальнейшем мы без особых напоминаний будем пользоваться этим правилом для сокращенной записи сумм.

Одно из важнейших свойств координат вектора выражается следующей теоремой: *для того чтобы векторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты находились в той же линейной зависимости.*

Действительно, линейная зависимость векторов выражается равенством нулю некоторой их линейной комбинации

$$\lambda a + \mu b + \dots + \sigma s = 0,$$

причем не все коэффициенты этой комбинации равны нулю. Выразив каждый вектор через его координаты, перепишем то же соотношение в следующем виде:

$$\lambda a^i m_i + \mu b^i m_i + \dots + \sigma s^i m_i = 0,$$

или, перегруппировав члены,

$$(\lambda a^i + \mu b^i + \dots + \sigma s^i) m_i = 0.$$

Но масштабные векторы независимы, и последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, если каждый из скалярных коэффициентов левой части равен нулю. Таким образом,

$$\lambda a^i + \mu b^i + \dots + \sigma s^i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Проведя рассуждение в обратном порядке, мы докажем также и достаточность условия.

2. При преобразовании системы координат масштабные векторы новой системы  $'m_i$  могут быть выражены линейно через векторы старой системы  $m_i$  так, что

$$'m_i = p_i^k m_k. \quad (3)$$

Матрицу коэффициентов этого разложения

$$(P) \equiv \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

мы будем называть *матрицей преобразования*. Ее определитель

$$p = \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

должен быть отличен от нуля, для того чтобы векторы  $m_i$  были независимы между собой.

Разрешая уравнения (3) относительно векторов старой системы, мы получим соотношение вида

$$m_i = q_i^{k'} m_k.$$

Матрица

$$(Q) = \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

есть *матрица обратного преобразования*. Ее элементы выражаются через элементы матрицы (4) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q_1^1 &= \frac{p_2^2}{p}, & q_1^2 &= -\frac{p_2^1}{p}, \\ q_2^1 &= -\frac{p_1^2}{p}, & q_2^2 &= \frac{p_1^1}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, элементы матрицы обратного преобразования равны приведенным минорам матрицы прямого преобразования. Легко видеть также, что элементы обеих матриц связаны между собой соотношением

$$p_k^i q_j^k = q_k^i p_j^k = \delta_j^i, \quad (8)$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронеккера, который равен нулю при  $i \neq j$  и единице при  $i = j$ .

Сравнивая выражения вектора в старой и новой системе координат, т. е. полагая

$$a^i m_i = 'a^i' m_i$$

и заменяя новые координатные векторы по формулам (3), мы получим

$$a^i m_i = 'a^i p_i^k m_k = 'a^k p_k^i m_i$$

(Так как замена обозначений индекса суммирования не изменяет значения суммы.) Сравнивая коэффициенты при одинаковых векторах в правой и левой частях, мы получим формулы преобразования координат вектора

$$a^i = p_k^i 'a^k. \quad (9)$$

Аналогично этому получим формулы обратного преобразования

$$'a^i = q_i^k a^k. \quad (10)$$

## 2.1.2. Скалярное произведение и ковариантные координаты

1. Скалярное произведение двух векторов выражается через координаты векторов двойной суммой

$$ab = (a^i m_i)(b^j m_j) = m_i m_j a^i b^j$$

или *бипланарной* формой двух рядов переменных  $a^1, a^2$  и  $b^1, b^2$ .

Если ввести для коэффициентов этой формы обозначения

$$g_{ij} = m_i m_j,$$

то

$$ab = g_{ij} a^i b^j, \quad (1)$$

или

$$ab = g_{11} a^1 b^1 + g_{22} a^2 b^2 + g_{12} (a^1 b^2 + a^2 b^1). \quad (2)$$

В частности, скалярный квадрат вектора выражается квадратичной формой

$$a^2 = g_{ij} a^i a^j,$$

или

$$a^2 = g_{11}(a^1)^2 + g_{22}(a^2)^2 + 2g_{12}a^1a^2, \quad (3)$$

которая называется *метрической формой* плоскости.  
Матрица

$$(G) \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (4)$$

также называется *метрической*; эта матрица симметрична, так как

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (5)$$

Рассматривая векторное произведение масштабных векторов и применяя известное векторное тождество, мы получим соотношение

$$w^2 = [m_1 m_2]^2 = m_1^2 m_2^2 - (m_1 m_2)^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, \quad (6)$$

которое показывает, что *дискриминант* метрической формы  $w^2$  положителен.

2. Рассмотрим скалярные произведения

$$a_i = m_i a \quad (7)$$

вектора на масштабные векторы системы; эти произведения называются *ковариантными координатами* вектора. В отличие от ковариантных координат те, которые мы рассматривали ранее, называются *контравариантными*.

Координаты обоих типов просто выражаются друг через друга. Действительно, из (2) п.5.1 следует

$$a_i = m_i (m_j a^j) = (m_i m_j) a^j$$

или

$$a_i = g_{ik} a^k. \quad (8)$$

Разрешая эти уравнения относительно  $a^i$  и вводя следующие обозначения приведенных миноров метрической матрицы

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{w^2}, \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{w^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{w^2}, \quad (9)$$

мы получим выражение контравариантных координат через ковариантные

$$a^i = g^{ik} a_k. \quad (10)$$

Заметим, что элементы метрической матрицы и ее приведенные миноры тоже связаны соотношением

$$g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i, \quad (11)$$

где  $\delta_j^i$  — символ Кронеккера.

Соотношения (8) и (10) показывают, что линейная зависимость между ковариантными координатами равносильна линейной зависимости между контравариантными координатами. Отсюда следует, что и линейная зависимость векторов равносильна такой же линейной зависимости между ковариантными координатами. Понятие ковариантных координат позволяет получить простое выражение для скалярного произведения. Действительно, в силу

$$ab = a_i b^i = a^i b_i = a_1 b^1 + a_2 b^2 = a^1 b_1 + a^2 b_2. \quad (12)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений ковариантных координат одного из них на контравариантные координаты другого.

Скалярные произведения можно выразить также и через ковариантные координаты обоих сомножителей, подставляя в (12) выражение  $a^i$  из (10). После этого мы будем иметь

$$ab = g^{ij} a_i b_j. \quad (13)$$

### 2.1.3. Косое произведение и дополнительный вектор

1. Всякая плоскость делит пространство на два полупространства. Условимся считать одно из этих полупространств *внешним* по отношению к плоскости, другое же полупространство будем называть *внутренним*. В согласии с этим будем также называть *внешней* ту *сторону плоскости*, которая обращена во внешнее пространство, а *внутренней* — в другую сторону. Плоскость с определенной таким образом внешней и внутренней сторонами называют *ориентированной*. Ориентацию плоскости удобнее всего указать, задав такой единичный вектор  $n$ , которому соответствует отрезок, перпендикулярный к плоскости и ориентированный так, что если его начало помещено на плоскости, то его конец находится во внешнем пространстве. Такой вектор мы будем называть *ориентирующим вектором данной плоскости*.

2. Будем называть *косым произведением* двух векторов ориентированной плоскости смешанное произведение этих векторов и ориентирующего вектора плоскости

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = (\mathbf{abn}). \quad (1)$$

Легко видеть также, что

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = ab \sin \alpha, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  — модули перемножаемых векторов, а  $\alpha$  — угол кратчайшего вращения, переводящего первый сомножитель во второй, причем этот угол считается положительным, если это вращение, рассматриваемое с внешней стороны плоскости, совершается против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае.

Косое произведение равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы коллинеарны. Если же эти векторы независимы, то модуль косого произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах. Отметим, наконец, следующие очевидные свойства косого произведения:

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = -\langle \mathbf{ba} \rangle, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \langle \mathbf{ac} \rangle + \langle \mathbf{bc} \rangle, \\ \langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Выражая перемножаемые векторы через их координаты, получим

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = \langle a^i m_i, b^j m_j \rangle = \langle m_i m_j \rangle a^i b^j,$$

или

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = e_{ij} a^i b^j, \quad (5)$$

где

$$e_{ij} = \langle m_i m_j \rangle. \quad (6)$$

Коэффициенты билинейной формы (5), выражающей косое произведение через координаты перемножаемых векторов, образуют матрицу

$$(\mathbf{e}) \equiv \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

которую мы будем называть *дискриминантной*. Эта матрица кососимметрична, так как

$$e_{ij} = -e_{ji} \quad (8)$$

или



$$e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = e,$$

так что

$$(e) \equiv \begin{vmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$e = e_{12}. \quad (10)$$

Чтобы найти  $e$ , рассмотрим соотношение

$$e_{ij}e_{kl} = (nm_i m_j)(nm_k m_l) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (m_i m_k) & (m_i m_l) \\ 0 & (m_j m_k) & (m_j m_l) \end{vmatrix},$$

откуда

$$e_{ij}e_{kl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}. \quad (11)$$

В частности,

$$e^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Таким образом,

$$e = \omega = \sqrt{g_{11}g_{12} - g_{12}^2}. \quad (12)$$

Если векторы  $m_1, m_2, n$  образуют правую тройку, то  $e > 0$ , что мы и будем, как правило, предполагать в дальнейшем.

3. Повернув вектор  $a$ , расположенный в ориентированной плоскости, в положительном направлении на прямой угол, мы получим новый вектор, который обозначим  $\tilde{a}$  и будем называть *дополнительным* к вектору  $a$ . Дополнительный вектор  $\tilde{a}$  вектора  $\tilde{a}$

$$\tilde{\tilde{a}} = -a. \quad (13)$$

Легко видеть, что

$$\tilde{a} = [na], \quad (14)$$

вследствие чего ковариантные координаты дополнительного вектора

$$\tilde{a}_i = (nam_i) = (nm_k m_i) a^k$$

или

$$\tilde{a}_i = a^k e_{ki}, \quad (15)$$

где  $e_{ki}$  есть элемент дискриминантной матрицы (чтобы избежать ошибки в знаке, следует особо отметить, что в формуле (15) суммирование происходит по первому индексу элемента дискриминантной матрицы.).

Умножая обе части (15) на  $b^i$  и суммируя, мы получим

$$\tilde{a}_i b^i = e_{ki} a^k b^i = - e_{ik} b^i a^k$$

или

$$\tilde{a}b = -a\tilde{b} = \langle ab \rangle = ab \sin \alpha. \quad (16)$$

Кроме того,

$$\tilde{a}\tilde{b} = ab = ab \cos \alpha, \quad (17)$$

так как скалярное произведение не изменяется от поворота обоих перемножаемых векторов на прямой угол.

## 2.1.4. Понятие тензора

1. В геометрии и различных разделах физики часто приходится рассматривать скалярные функции векторных аргументов.

Особенно важную роль играет рассмотрение таких функций, которые обладают свойством линейности.

Будем говорить, что задана *скалярная функция векторного аргумента*  $x$ , если всякому значению  $x$  поставлено в соответствие число

$$\omega = \omega(x).$$

Эта функция называется *линейной*, если для всяких значений  $x_1$  и  $x_2$  ее аргумента выполняется условие

$$\omega(x_1 + x_2) = \omega(x_1) + \omega(x_2) \quad (1)$$

и для всякого значения аргумента  $x$  и числа  $\lambda$ — условие

$$\omega(\lambda x) = \lambda \omega(x). \quad (2)$$

Выражая вектор  $x$  через его координаты и пользуясь свойствами линейности, мы получим

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega(x^1 m_1 + x^2 m_2) = \omega(x^1 m_1) + \omega(x^2 m_2) = \\ &= x^1 \omega(m_1) + x^2 \omega(m_2) = x^i \omega(m_i). \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор  $a$ , ковариантные координаты которого равны результатам подстановки масштабных векторов системы координат под знак рассматриваемой линейной функции

$$a_i = \omega(m_i).$$

В таком случае мы будем иметь

$$\omega = \omega(x) = a_i x^i. \quad (3)$$

Величина  $\omega$ , а следовательно, и вектор  $a$  не будут зависеть от выбора масштабных векторов. Таким образом, *всякой линейной функции одного векторного аргумента можно сопоставить некоторый постоянный вектор так, что значение функции будет равно скалярному произведению этого вектора на значение векторного аргумента.*

2. Скалярная функция многих векторных аргументов

$$\omega = \omega(x, y, \dots)$$

называется *линейной*, если она удовлетворяет условиям линейности по отношению к каждому из своих аргументов так, что

$$\left. \begin{aligned} \omega(x_1 + x_2, y, \dots) &= \omega(x_1, y, \dots) + \omega(x_2, y, \dots), \\ \omega(x, y_1 + y_2, \dots) &= \omega(x, y_1, \dots) + \omega(x, y_2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и т. д.

$$\left. \begin{aligned} \omega(\lambda x, y, \dots) &= \lambda \omega(x, y, \dots), \\ \omega(x, \lambda y, \dots) &= \lambda \omega(x, y, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и т. д.

По аналогии с тем, как функции одного аргумента соответствует некоторый вектор, считается, что всякой линейной функции многих векторных аргументов соответствует величина особого рода, которая называется *тензором*.

Число независимых аргументов, входящих под знак линейной функции, называется *валентностью* тензора; с точки зрения этого определения *вектор есть одновалентный тензор*.

Подставляя в выражение линейной функции координатные векторы во всевозможных комбинациях, мы получим систему величин, которые будем обозначать одной буквой с индексами внизу так, чтобы эти индексы соответствовали индексам подставленных координатных векторов:

$$a_{11} \dots = \omega(m_1, m_1, \dots), \quad a_{12} \dots = \omega(m_1, m_2, \dots),$$

$$a_{21} \dots = \omega(m_2, m_1, \dots), \quad a_{22} \dots = \omega(m_2, m_2, \dots),$$

вообще

$$a_{ij} \dots = \omega(m_i, m_j, \dots). \quad (6)$$

Величины  $a_{ij} \dots$ , получающиеся в результате подстановки координатных векторов в выражение линейной векторной функции, называются *ковариантными координатами тензора*, соответствующего этой функции. Одновалентный тензор, как нам это уже известно, имеет две ковариантные координаты:

$$a_1 = am_1 \quad \text{и} \quad a_2 = am_2,$$

двухвалентный тензор имеет четыре координаты:

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{22},$$

трехвалентный тензор имеет восемь координат:

$$a_{111}, \quad a_{122}, \quad a_{112}, \quad a_{121}, \\ a_{211}, \quad a_{222}, \quad a_{231}, \quad a_{212}.$$

Вообще  $n$ -валентный тензор имеет  $2^n$  координат.

Значение всякой линейной функции можно выразить через ковариантные координаты соответствующего тензора и контравариантные координаты векторных аргументов. Для этого выразим каждый аргумент через его координаты и подставим его значение в выражение функции.

Пользуясь свойствами линейности, мы можем представить (для определенности мы рассматриваем случаи трехвалентного тензора, однако все наши рассуждения сохраняют смысл и в общем случае)

$$\omega = \omega(x^i m_i, y^j m_j, z^k m_k)$$

в виде многократной (в данном случае трехкратной) суммы

$$\omega = x^i y^j z^k \omega(m_i, m_j, m_k).$$

величины

$$a_{ijk} = \omega(m_i, m_j, m_k)$$

являются ковариантными координатами тензора, соответствующего линейной функции и

$$\omega = \omega(x, y, z) = a_{ijk} x^i y^j z^k$$

или в развернутом виде

$$\omega = a_{111} x^1 y^1 z^1 + a_{122} x^1 y^2 z^2 + a_{112} x^1 y^1 z^2 + a_{121} x^1 y^2 z^1 + \\ + a_{211} x^2 y^1 z^1 + a_{222} x^2 y^2 z^2 + a_{212} x^2 y^1 z^2 + a_{221} x^2 y^2 z^1.$$

Пользуясь терминологией, принятой в алгебре, мы можем сказать, что значение линейной функции  $n$  векторных аргументов выражается  $n$ -линейной формой, содержащей  $n$  рядов

переменных, значения которых равны контрарриантным координатам векторных аргументов

$$x^1x^2, y^1y^2, z^1z^2,$$

а коэффициенты этой формы равны значениям ковариантных координат тензора, соответствующего данной функции.

3. Перейдем к рассмотрению примеров.

Скалярное произведение двух векторов

$$\omega = \mathbf{x}\mathbf{y}$$

является линейной функцией этих векторов, и следовательно, ему соответствует некоторый тензор второй валентности. Этот тензор называется *метрическим тензором* плоскости. Ковариантные координаты метрического тензора по определению равны скалярным произведениям масштабных векторов, т. е. элементам метрической матрицы

$$g_{ij} = m_i m_j;$$

они удовлетворяют условиям

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad (7)$$

т. е. не меняются при перестановке индексов. Тензор, удовлетворяющий этим условиям, называется *симметричным*. Таким образом, *метрический тензор есть симметричный тензор второй валентности*.

Косое произведение двух векторов

$$\omega = \langle \mathbf{x}\mathbf{y} \rangle$$

тоже является линейной функцией этих векторов, и следовательно, ему также соответствует некоторый тензор второй валентности. Этот тензор называется *дискриминантным*. Ковариантные координаты этого тензора равны косым произведениям координатных векторов, т. е. элементам дискриминантной матрицы

$$e_{ij} = \langle m_i m_j \rangle;$$

они удовлетворяют условиям

$$e_{ij} = -e_{ji}.$$

Тензор, удовлетворяющий таким условиям, называется *кососимметричным*. Таким образом, *дискриминантный тензор есть кососимметричный тензор второй валентности*.

## 2.1.5. Основные действия тензорной алгебры

1. Вводя понятие тензора, мы назвали его величиной. Но характерной особенностью различных величин действительных, комплексных и гиперкомплексных чисел, векторов и т. д. является то, что для них устанавливаются действия, аналогичные, в той или иной мере, действиям арифметики действительных чисел. Аналогичные действия вводятся и для тензоров. Однако, прежде чем мы перейдем к описанию этих действий, установим понятие равенства двух тензоров.

*Два тензора одинаковой валентности называются равными между собой, если значения линейных функций, соответствующих этим тензорам, равны для одинаковых значений их векторных аргументов.*

Таким образом, для того чтобы тензоры  $a_{ijk}$  и  $b_{ijk}$  (для того чтобы обозначить тензор, выписывают общее выражение его координат) были равны, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующих им функций имело место равенство

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

которое является тождественным по отношению к векторным переменным  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , т. е. справедливо для всех значений этих переменных.

В координатах то же равенство имеет вид

$$a_{ijk}x^i y^j z^k \equiv b_{ijk}x^i y^j z^k.$$

Но такое тождественное равенство двух полилинейных форм может иметь место только при условии равенства коэффициентов при соответствующих комбинациях переменных. Таким образом, *необходимым и достаточным условием равенства двух тензоров является равенство их соответствующих координат*

$$a_{ijk} = b_{ijk}. \tag{1}$$

В частности, тензор считается равным нулю, если соответствующая ему линейная функция тождественно равна нулю, а условие

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0,$$

очевидно, равносильно равенству нулю всех координат этого тензора.

**2. Сложение тензоров.** Рассмотрим два тензора, имеющих одинаковую валентность (например, валентность, равную трем),  $a_{ijk}$  и  $b_{ijk}$  и соответствующие им линейные функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$ .

Складывая значения этих функций при одинаковых значениях соответствующих переменных, мы получим третью функцию тех же переменных

$$h(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z). \quad (2)$$

Так как оба слагаемых правой части удовлетворяют условиям линейности (4), (5) п.5.4, то и левая часть удовлетворяет этим условиям, т. е.

$$h(x_1 + x_2, y, z) = h(x_1, y, z) + h(x_2, y, z),$$

$$h(x, y_1 + y_2, z) = h(x, y_1, z) + h(x, y_2, z),$$

$$h(x, y, z_1 + z_2) = h(x, y, z_1) + h(x, y, z_2),$$

$$h(\lambda x, y, z) = h(x, \lambda y, z) = h(x, y, \lambda z) = \lambda h(x, y, z)$$

и, следовательно,  $h(x, y, z)$  есть линейная функция своих аргумен-

тов. Но всякой такой функции по определению соответствует тензор и тензор, соответствующий функции  $h(x, y, z)$ , называется *суммой тензоров*, соответствующих функциям  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$ . Очевидно, что валентность суммы тензоров равна валентности слагаемых тензоров.

Подставляя в левую и правую части (2) масштабные векторы, мы получим

$$h(m_i, m_j, m_k) = f(m_i, m_j, m_k) + g(m_i, m_j, m_k)$$

или

$$c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}, \quad (3)$$

где координаты тензора  $c_{ijk}$ , соответствующего функции

$$h(x, y, z), \text{ равны сумме тензоров } a_{ijk} \text{ и } b_{ijk}.$$

Итак, *координаты суммы тензоров равны сумме соответствующих координат слагаемых тензоров.*

**3. Умножение тензора на число.** Линейность функции  $f(x, y, z)$  влечет за собой линейность функции

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \lambda f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

где  $\lambda$  — некоторое число, не зависящее от  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ .

В силу этого функции  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  соответствует некоторый тензор, который называется *произведением числа  $\lambda$  на тензор*, соответствующий функции  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Очевидно, что валентности обоих этих тензоров одинаковы.

Обозначая координаты этих тензоров через

$$b_{ijk} = g(m_i, m_j, m_k), \quad a_{ijk} = f(m_i, m_j, m_k),$$

мы будем иметь

$$b_{ijk} = \lambda a_{ijk}. \quad (4)$$

Таким образом, *координаты произведения тензора на число равны произведениям, соответствующих координат данного тензора на это число.*

**4. Умножение тензора на тензор.** Рассмотрим два тензора, вообще говоря, различных валентностей и линейные функции, соответствующие этим тензорам. Составим произведение значений этих функций при *независимых значениях их векторных аргументов*. Это произведение будет функцией всех переменных, от которых зависит значение каждой из данных функций. Так, например, если даны тензоры  $a_{ijk}$  и  $b_{pq}$ , то

новая функция определяется произведением

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

где функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  соответствует первому, а  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  — второму тензору. Но функция  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$  будет линейна относительно каждого из переменных  $x, y, z, u, v$  и, следовательно, ей соответствует некоторый тензор, который и называется *произведением двух данных тензоров*.

Валентность этого тензора равна сумме валентностей перемножаемых тензоров.

Для координат тензора, равного произведению двух данных, мы будем иметь

$$c_{ijkpq} = h(m_i, m_j, m_k, m_p, m_q) = f(m_i, m_j, m_k) \cdot g(m_p, m_q)$$

или

$$c_{ijkpq} = a_{ijk} \cdot b_{pq}. \quad (5)$$



Таким образом, *координаты произведения двух тензоров равны произведениям координат перемножаемых тензоров, взятых при всевозможных значениях своих индексов.*

Действие умножения позволяет получить из тензоров низших валентностей тензоры более высоких валентностей. Так, например, перемножая два вектора, мы получим тензор второй валентности

$$c_{ij} = a_i b_j,$$

и умножая этот тензор на третий вектор, получим тензор третьей валентности

$$d_{ijk} = c_{ij} c_k = a_i b_j c_k$$

и т. д.

**5. Симметрирование тензора.** Тензор второй валентности  $a_{ij}$  называется симметричным при условии

$$a_{ij} = a_{ji},$$

которое равносильно условию

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

для функции, соответствующей этому тензору. Если тензор не симметричен, то ему можно отнести другой уже симметричный тензор, пользуясь следующим приемом, называемым *симметрированием*.

Если  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  есть линейная функция, соответствующая тензору  $a_{ij}$ ,

то функция

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \quad (6)$$

остаётся линейной, но удовлетворяет условию

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Тензор, соответствующий этой функции, называется *симметричной частью* тензора  $a_{ij}$  и его координаты обозначаются через  $a_{(ij)}$ .

Подставляя координатные векторы в левую и правую части (6), получим

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}).$$

Если тензор  $a_{ij}$  симметричен, то его симметричная часть совпадает с ним самим.

Процесс симметрирования обобщается и на случай тензоров любой валентности. Так, например, тензору третьей валентности  $a_{ijk}$  относится тензор

$$a_{(i; k)} = \frac{1}{3!} [a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{kji} + a_{jik} + a_{ikj}]. \quad (8)$$

В заключение докажем две теоремы, которые будут нам полезны впоследствии. Предположим, что для некоторого тензора  $a_{ijk}$  имеет место равенство

$$a_{ijk}x^i x^j x^k = 0, \quad (9)$$

выполняющееся тождественно для любого вектора  $x^i$ . В развернутом виде это равенство имеет вид

$$a_{111}(x^1)^3 + a_{222}(x^2)^3 + (a_{112} + a_{121} + a_{211})(x^1)^2 x^2 + \\ + (a_{221} + a_{212} + a_{122})x^1(x^2)^2 = 0.$$

Но для того, чтобы многочлен обращался в нуль тождественно, необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты были равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} a_{111} &= 0, & a_{222} &= 0, \\ a_{112} + a_{121} + a_{211} &= 0, \\ a_{221} + a_{212} + a_{122} &= 0. \end{aligned}$$

Однако легко видеть, что эти равенства равносильны обращению в нуль всех координат тензора  $a_{(ijk)}$ . Итак, для того чтобы равенство (9) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы симметричная часть тензора  $a_{ijk}$  была равна нулю, т. е.

$$a_{(ijk)} = 0. \quad (10)$$

Еще проще убедиться в том, что и для тензора второй валентности условие

$$a_{ij}x^i x^j = 0 \quad (9')$$

равносильно условиям

$$a_{(ij)} = 0. \quad (10')$$

Предположим, что квадратичная форма

$$\omega = a_{ij}x^i x^j$$

с коэффициентами  $a_{ij} = a_{ji}$  инвариантна, т. е. ее значение не меняется при преобразовании координат произвольного вектора  $x^i$ . В таком случае инвариантны и выражение

$$\omega = a_{ij}(\lambda y^i + \mu z^i)(\lambda y^j + \mu z^j) = \lambda^2 a_{ij} y^i y^j + \mu^2 a_{ij} z^i z^j + 2\lambda\mu a_{ij} y^i z^j, \quad (7)$$

а следовательно, и билинейная форма

$$u = a_{ij} y^i z^j.$$

Но в таком случае  $u$  есть линейная функция векторов  $y^i, z^j$  и ей

соответствует тензор с координатами  $a_{ij}$ . Итак, коэффициенты инвариантной квадратичной формы являются координатами симметричного тензора.

**6. Альтернирование тензора.** Если тензор  $a_{ij}$  — кососимметричен, т. е.  $a_{ij} = -a_{ji}$ , тогда для соответствующей ему функции имеет место тождество

$$f(x, y) = -f(y, x).$$

Если же тензор не является кососимметричным, то ему можно отнести другой кососимметричный тензор, рассматривая линейную функцию

$$h(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) - f(y, x)].$$

Тензор, соответствующий этой функции, называется *кососимметричной частью тензора*  $a_{ij}$  его координаты обозначаются через  $a_{[ij]}$ , а процесс перехода от тензора  $a_{ij}$  к тензору  $a_{[ij]}$  называется *альтернированием*. Легко видеть, что

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2} [a_{ij} - a_{ji}]. \quad (11)$$

Очевидно также, что кососимметричная часть кососимметричного тензора равна ему самому, а кососимметричная часть симметричного тензора равна нулю. Для всякого тензора второй валентности мы будем также иметь

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}. \quad (12)$$

**7.** Рассмотрим кососимметричную часть произведения двух векторов  $a_{[i} b_{j]}$ .

Равенство

$$a_{1i}b_{j1} = 0 \tag{13}$$

сводится к единственному равенству

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

которое показывает, что векторы коллинеарны.

Таким образом, коллинеарность двух векторов характеризуется обращением в нуль кососимметрической части их произведения.

**8. Перебрасывание индексов.** Формула

$$\omega = a_{ijk}x^i y^j z^k$$

дает выражение значения линейной функции, соответствующей тензору  $a_{ijk}$  через его ковариантные координаты и контравариантные координаты векторных аргументов. Выражая последние через их ковариантные координаты по формулам (10) п.2.1.2, будем иметь выражение

$$\omega = a_{ijk}g^{ip}g^{jq}g^{kr}x_p y_q z_r,$$

содержащее в правой части переменные  $x_p, y_q, z_r$ , которые являются ковариантными координатами векторных аргументов. Введем следующие обозначения для коэффициентов этого многочлена:

$$a^{pqr} = g^{pi}g^{qj}g^{rk}a_{ijk} \tag{14}$$

и будем называть их контравариантными координатами данного тензора.

Аналогичным образом вводятся смешанные координаты тензора, определяемые по формулам

$$a^i_{.jk} = g^{is}a_{sjk}, \quad a^i_{i.k} = g^{is}a_{isk}, \quad a^{ij}_{.k} = g^{is}g^{jr}a_{srk} \tag{15}$$

и т. д.

Значение линейной функции может быть, таким образом, выражено через различные комбинации ковариантных и контравариантных координат векторов и тензоров

$$\omega = a_{ijk}x^i y^j z^k = a^i_{.jk}x_i y^j z^k = a^{ij}_{.k}x_i y_j z^k = \dots$$

Операция перехода от каждого такого выражения к другому носит название *перебрасывания индексов*.

9. Поднимая индексы  $i, j$  в (11) п.5.3, получим новое соотношение

$$e^{ij}e_{kl} = \delta_k^i \delta_l^j - \delta_k^j \delta_l^i \quad (16)$$

и

$$e^{ip}e_{kp} = \delta_k^i. \quad (17)$$

10. При преобразовании координат точек и координаты тензора преобразуются. Чтобы найти закон этого преобразования, сравним выражения полилинейной функции через координаты векторов, относящиеся к различным системам:

$$\omega = a_{ijk}x^i y^j z^k = 'a_{pqr} 'x^p 'y^q 'z^r.$$

Выразив новые координаты векторов через старые по формулам (10) п.2.1.1, получим тождество

$$a_{ijk}x^i y^j z^k = 'a_{pqr} q^p q^q q^r x^i y^j z^k,$$

которое равносильно соотношениям

$$a_{ijk} = 'a_{pqr} q^p q^q q^r, \quad (18)$$

выражающим закон преобразования ковариантных координат тензора. Аналогичным образом выводятся формулы преобразования для контравариантных и смешанных координат тензора

$$\left. \begin{aligned} a^{ijk} &= 'a^{pqr} p^i p^j p^k, \\ a^i{}_{.jk} &= 'a^p{}_{.qr} p^i q^q q^r \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и т. д.

## 2.1.6. Симметричный тензор второй валентности

1. Симметричный тензор второй валентности играет особенно важную роль в вопросах приложений тензорного анализа. Чтобы изучить эти свойства, рассмотрим значение функции

$$\omega(x, y) = a_{ij}x^i y^j = a_{ij}y^i x^j, \quad (1)$$

соответствующее совпавшим значениям ее аргументов

$$\omega(x, x) = a_{ij}x^i x^j. \quad (2)$$

Приведенным значением вектора  $x^i$  мы будем называть коллинеарный ему вектор

$$\xi^i = \frac{x^i}{\sqrt{|\omega(x, x)|}}. \quad (3)$$

Направление отрезка  $\overline{OM}$ , изображающего вектор  $\xi^i$ , совпадает с направлением вектора  $x^i$  (рис. 1), а его длина не зависит от длины этого вектора.

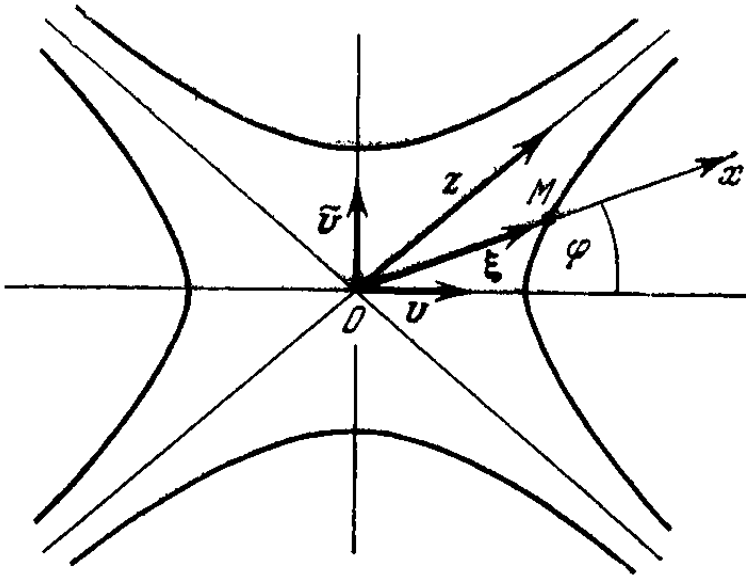


Рис. 1.

Таким образом, по каждому направлению, исходящему из точки  $O$ , будет отложен единственный отрезок, а геометрическое место концов этих отрезков будет плоской кривой, которую мы будем называть *индикатрисой* данного тензора.

Уравнение индикатрисы имеет вид

$$a_{11}(\xi^1)^2 + 2a_{12}\xi^1\xi^2 + a_{22}(\xi^2)^2 = \pm 1, \quad (4)$$

причем знак плюс в правой части соответствует тем направлениям вектора  $x$ , для которых значение функции  $\omega(x, x)$  положительно, а минус тем, для которых оно отрицательно.

Вид этого уравнения показывает, что *индикатриса тензора является центральной кривой второго порядка или парой таких кривых с центром в точке  $O$ .*

Известные формулы аналитической геометрии показывают, что направления, удовлетворяющие условию

$$a_{ij}x^i y^j = 0, \quad (5)$$

*сопряжены* относительно индикатрисы, а направление, удовлетворяющее условию

$$a_{ij}z^i z^j = 0, \quad (6)$$

является ее *асимптотическим направлением*. Мы будем говорить, что *направления векторов  $x^i$  и  $y^j$  сопряжены относительно тензора  $a_{ij}$ , а направление  $z^i$  есть нулевое направление этого тензора*. Пользуясь фактом, известным из аналитической геометрии, отметим, что направления, сопряженные относительно тензора, разделяются гармонически его нулевыми направлениями.

2. *Главными направлениями* тензора называют такие направления, которые сопряжены и взаимно ортогональны между собой, а орты этих направлений  $v^i$ ,  $\tilde{v}^i$  называют *главными ортами тензора* (см. рис. 1). Разложим два произвольных вектора  $x^i$ ,  $y^j$  по главным ортам тензора и пусть

$$x^i = x(v^i \cos \varphi + \tilde{v}^i \sin \varphi),$$

$$y^j = y(\tilde{v}^j \cos \psi + v^j \sin \psi).$$

Подставляя в (1) и пользуясь (5), получим

$$\omega = xy(a_{ij}v^i v^j \cos \varphi \cos \psi + a_{ij}\tilde{v}^i \tilde{v}^j \sin \varphi \sin \psi). \quad (7)$$

Результаты подстановки главных ортов в выражение функции (1), т. е. величины

$$\rho = a_{ij}v^i v^j, \quad \sigma = a_{ij}\tilde{v}^i \tilde{v}^j, \quad (8)$$

называются *главными значениями* тензора или его характерными числами.

Представив (7) в виде

$$\omega = xy(\rho \cos \varphi \cos \psi + \sigma \sin \varphi \sin \psi) \quad (9)$$

и заметив, что

$$\begin{aligned} x \cos \varphi &= x^i v_i, & y \cos \psi &= y^j v_j, \\ x \sin \varphi &= x^i \tilde{v}_i, & y \sin \psi &= y^j \tilde{v}_j, \end{aligned}$$

Получим

$$\omega = a_{ij} x^i y^j = (\rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j) x^i y^j,$$

а вследствие произвольности векторов  $x^i, y^j$

$$a_{ij} = \rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (10)$$

Таким образом, симметричный тензор второй валентности определяется заданием главных ортов и главных значений и выражается через них по формуле (10).

Представление (10) называется каноническим представлением тензора. В частном случае метрического тензора  $g_{ij}$  условие сопряженности (5) совпадает с условием ортогональности, вследствие чего всякие два взаимно ортогональных направления являются главными направлениями метрического тензора. Кроме того, из (8) следует, что в этом случае

$$\sigma = \rho = 1,$$

так что главные значения метрического тензора равны единице, и он представляется канонически через любые два взаимно ортогональных орта по формуле

$$g_{ij} = v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (11)$$

С этим каноническим представлением метрического тензора полезно сопоставить более общее его представление через два произвольных единичных вектора

$v_i$  и  $w_j = v_j \cos \omega + \tilde{v}_j \sin \omega$ , образующих между собой угол  $\omega$ . Из тождества

$$\begin{aligned} w_i \tilde{v}_j - v_i w_j &= (v_i \cos \omega + \tilde{v}_i \sin \omega) \tilde{v}_j - v_i (\tilde{v}_j \cos \omega - v_j \sin \omega) = \\ &= (v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j) \sin \omega \end{aligned}$$



следует, что

$$g_{ij} = \frac{w_i \tilde{v}_j - v_i \tilde{w}_j}{\sin \omega}. \quad (12)$$

Отсюда, применяя (15) п.2.1.3 и (17) п.2.1.5, в свою очередь получаем, что дискриминантный тензор

$$e_{ij} = g_{ik} e^k{}_i$$

может быть представлен в следующем виде:

$$e_{ij} = \frac{v_i w_j - w_i v_j}{\sin \omega}, \quad (13)$$

или, в частности,

$$e_{ij} = v_i \tilde{v}_j - \tilde{v}_i v_j. \quad (14)$$

3. Если масштабные векторы совпадают с главными ортами тензора, то последние имеют координаты  $v_i(1, 0)$  и  $\tilde{v}_i(0, 1)$ , и из (10) следует, что

$$a_{11} = \rho, \quad a_{22} = \sigma, \quad a_{12} = 0,$$

а уравнение индикатрисы (4) имеет канонический вид

$$\rho x^2 + \sigma y^2 = \pm 1, \quad (15)$$

где  $\rho$  и  $\sigma$ —характерные числа тензора. Как известно из аналитической геометрии, эти коэффициенты являются корнями характеристического уравнения

$$z^2 - 2Sz + N = 0 \quad (16)$$

С коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} 2S = \rho + \sigma &= \frac{a_{11}g_{22} - 2a_{12}g_{12} + a_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\ N = \rho\sigma &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

являющимися инвариантами преобразования координат. Мы будем называть их *инвариантами тензора*, первый из них — *следом*, а второй — *нормой* тензора.

Свертывая с  $g^{ij}$  правую часть (10), получим

$$2S = g^{ij} a_{ij} = a^i{}_i, \quad (18)$$

а принимая во внимание, что (напомним, что  $v_p$  — единичный вектор)

$$e^{pq}v_p\tilde{v}_q = -e^{pq}\tilde{v}_p v_q = 1,$$

получим опять-таки из (10)

$$e^{pq}a_{pi}a_{qj} = \rho\sigma(v_i\tilde{v}_j - \tilde{v}_i v_j)$$

или в силу (14) и (17)

$$e^{pq}a_{pi}a_{qj} = Ne_{ij}, \tag{19}$$

откуда

$$2N = e^{pq}e^{rs}a_{pr}a_{qs}. \tag{20}$$

4. Свойства тензора существенно зависят от типа индикатрисы. Если она является эллипсом, т. е. если

$$N = \rho\sigma > 0,$$

то тензор не имеет нулевых направлений. Если индикатриса является гиперболой (вернее, парой сопряженных гипербол, каждая из которых соответствует определенному знаку левой части ее уравнения), т. е. если  $N < 0$ , то тензор имеет два различных нулевых направления. Предположим, что вектор нулевого направления

$$z^i = \lambda v^i + \mu \tilde{v}^i, \tag{21}$$

где  $v^i$  и  $\tilde{v}^i$  — главные орты. В таком случае

$$a_{ij}z^i z^j = \rho\lambda^2 + \sigma\mu^2 = 0,$$

и если  $\sigma > 0$  и  $\rho < 0$ , то нулевые направления определяются векторами

$$z_{\mathbf{1}} = \sqrt{\sigma}v_i + \sqrt{-\rho}\tilde{v}_i, \quad z_{\mathbf{2}} = \sqrt{\sigma}v_i - \sqrt{-\rho}\tilde{v}_i, \tag{22}$$

а тензор может быть представлен в следующем виде:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_{\mathbf{1}}\tilde{z}_{\mathbf{2}} + \tilde{z}_{\mathbf{2}}\tilde{z}_{\mathbf{1}}). \tag{23}$$

Если индикатриса является линией параболического типа, т. е.

$$N = 0,$$

то она распадается на пару параллельных прямых, и если  $\rho \neq 0$ ,  $\sigma = 0$ , то тензор представляется в следующем виде:

$$a_{ij} = \rho v_i v_j. \quad (24)$$

5. Два симметричных тензора с координатами  $a_{ij}$  и  $\check{a}^{ij}$  называются *взаимными*, если они удовлетворяют уравнениям

$$\check{a}^{ik} a_{kj} = \delta_j^i. \quad (25)$$

Координаты взаимного тензора определяются через координаты данного однозначно из этих уравнений, если норма данного тензора отлична от нуля.

Если данный тензор представлен каноническим разложением (10), то взаимный ему

$$\check{a}^{ij} = \frac{v^i v^j}{\rho} + \frac{\tilde{v}^i \tilde{v}^j}{\sigma}, \quad (26)$$

так как в таком случае (25) удовлетворяются. Отсюда легко вытекает следующее тождество:

$$\check{a}^{ij} = \frac{1}{N} e^i p e^j q a_{pq}, \quad (27)$$

где  $N$  есть норма тензора  $a_{ij}$ .

## 2.1.7. Свертывание тензоров

1. Рассмотрим некоторую полилинейную функцию трех или большего числа переменных

$$\omega = a_{ijkl} x^i y^j u^k v^l.$$

Если мы придадим определенные значения некоторым переменным, например двум последним, то  $\omega$  станет полилинейной функцией двух первых, и мы будем иметь

$$\omega = b_{ij} x^i y^j,$$

где  $b_{ij}$  — координаты некоторого тензора второй валентности. Но в силу произвольности  $x^i$ ,  $y_j$  мы будем иметь

$$a_{ijkl} u^k v^l = b_{ij}.$$

Таким образом, суммы произведений координат тензора на координаты векторов, соответствующие некоторым его индексам, являются координатами тензора более низкой валентности. Рассмотрим теперь суммы следующего вида:

$$c_{ij} = a_{ijk} \cdot g^k = a_{ijk} g^{kl}. \quad (1)$$

Пользуясь каноническим представлением метрического тензора через единичный вектор  $u^i$ , получим

$$c_{ij} = a_{ijk} u^k u^l + a_{ijk} \tilde{u}^k \tilde{u}^l,$$

откуда согласно предыдущему следует, что и величины  $c_{ij}$  являются координатами тензора второй валентности. Мы будем говорить, что *тензор  $c_{ij}$  получен в результате свертывания тензора  $a_{ijk}$  по двум его последним индексам.*

2. Очевидно, что действие свертывания уменьшает валентность тензора на две единицы. Если исходный тензор имеет нечетную валентность  $2n+1$ , то, производя над ним повторное свертывание  $n$  раз, мы придем к тензору первой валентности, т. е. к вектору. Если же валентность тензора равна  $2n + 2$ , т. е. четная, то после  $n$  свертываний мы получим тензор второй валентности (например,  $c_{ij}$ ). Дальнейшее свертывание приведет нас к скалярной величине

$$c = c_k^{\cdot k},$$

которая является следом тензора  $c_{ij}$ , т. е. величиной, остающейся инвариантной при преобразовании координат. Таким образом, действие свертывания позволяет построить инвариант из координат всякого тензора четной валентности. Для того чтобы построить инварианты из координат тензоров нечетных валентностей, предварительно составляют произведения этих тензоров на себя или друг на друга, а потом подвергают эти произведения свертыванию. Так, например, скалярное произведение векторов

$$w = v_k w^k$$

есть свернутое произведение тензоров первой валентности.

3. В заключение выведем одно соотношение для симметричного тензора второй валентности. Произведение этого тензора на себя, свернутое по двум индексам

$$b_{ij} = a_i^{\cdot k} a_{jk}, \quad (2)$$

дает снова симметричный тензор второй валентности, который называется *квадратом данного тензора*. Представив тензор  $a_{ij}$  канонически, мы получим

$$b_{ij} = \rho^2 v_i v_j + \sigma^2 \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (3)$$

Таким образом, квадрат данного тензора имеет те же главные направления, что и данный тензор, а его главные значения равны квадратам главных значений данного тензора. Кроме того,

$$\begin{aligned} b_{ij} + Ng_{ij} &= \rho^2 v_i v_j + \sigma^2 \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \rho\sigma (v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = \\ &= (\rho + \sigma) (\rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j), \end{aligned}$$

следовательно,

$$a_i^{\cdot k} a_{jk} - 2Sa_{ij} + Ng_{ij} = 0. \quad (4)$$

Считая  $g_{ij}$  «единичным тензором» и сравнивая полученное соотношение с характеристическим уравнением (16) п.5.6, говорят, что *всякий симметричный тензор второй валентности удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

## 2.2. Основы тензорного анализа

### 2.2.1. Тензорное поле и его дифференцирование

1. До сих пор при рассмотрении тензоров в евклидовом пространстве  $E_3$  мы не задумывались над тем, в какой точке заданы тензоры. Можно считать, что все введенные нами операции над тензорами осуществлялись в одной точке, но можно считать также, что все эти операции осуществлялись в некоторой области  $V$  пространства  $E_3$  (или даже во всем  $E_3$ ), если предполагать, что исследуемые тензоры одинаковы во всех точках области  $V$ .

В этом микромодули мы перейдем от тензорной алгебры к тензорному анализу. В связи с этим будем рассматривать **тензорные поля**, для которых, кроме изученных ранее алгебраических операций, будет определена еще одна операция - **дифференцирование**.

Позже мы построим тензорный анализ в трехмерном евклидовом пространстве  $E_3$  в прямоугольной декартовой системе координат и рассмотрим некоторые его приложения. Затем мы введем криволинейные координаты в  $E_3$  и построим

тензорный анализ в криволинейных, но по-прежнему ортогональных системах координат.

2. Перейдем теперь к определению тензорного поля. Будем говорить, что в области  $V \subset E_3$  (запись  $V \subset E_3$  означает, что область  $V$  принадлежит пространству  $E_3$ ) задано тензорное поле, если каждой точке  $M \in V$  поставлено в соответствие тензор одной и той же валентности. Этот тензор называется *тензором поля*. Он, вообще говоря, меняется от точки к точке. Пусть, например, валентность заданного тензорного поля равна трем, тогда тензор  $a_{ijk}$  будет выступать в функции точки  $M$  (или радиуса-вектора этой точки):

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$

или

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3),$$

где  $x_1, x_2, x_3$  - координаты точки  $M$  относительно некоторого прямоугольного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ .

Будем считать в дальнейшем, что функции, которые задают тензорное поле, непрерывны и имеют непрерывные частные производные любого нужного нам порядка по всем аргументам.

Теперь можно сказать, что ранее мы рассматривали *однородные* тензорные поля, т.е. такие поля, тензор которых не меняется от точки к точке.

Приведем несколько примеров тензорных полей.

а) **Скалярное поле.** Так называется поле тензора нулевой валентности. Мы знаем, что такой тензор является инвариантом. Поэтому для задачи скалярного поля надо в каждой точке  $M \in V$  задать инвариант  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(M),$$

или

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3),$$

т.е. скалярное поле задается некоторой функцией трех переменных.

Укажем некоторые конкретные скалярные поля: поле температур неравномерно нагретого тела, поле щільностей неоднородного тела, поле давлений газа и т.д.

б) **Векторное поле.** Так называют поле тензора первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3), \tag{1}$$

поскольку, как мы знаем, компоненты тензора первой валентности являются координатами вектора

$$a = a_i e_i.$$

Равенства (1) показывают, что векторное поле задается уже тремя функциями от трех аргументов.

Укажем несколько примеров векторных полей: поле вектора скорости (или ускорение) движущейся жидкости или газа, поле вектора плотности электрического тока в некотором проводнике большого сечения, поле сил тяготения, создаваемых каким-нибудь массивным телом, и т.д.

**в) Поле двухвалентного тензора:**

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь поле задается уже девятью функциями от трех аргументов. Конкретными примерами таких полей могут служить поле напряжений и поле деформаций твердого тела.

Отметим, что в приложениях обычно встречаются именно тензорные поля, а не отдельные тензоры.

Алгебраические операции над тензорами, которые построены нами ранее для тензоров, определенных в одной точке, естественным образом переносятся и на тензорные поля: *надо считать, что эти операции производятся над тензором поля в каждой точке  $M \in V$ .*

Например, если в области  $V$  даны тензорные поля

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M),$$

$$b_{ijk} = b_{ijk}(M),$$

$$c_{ij} = c_{ij}(M).$$

то, складывая компоненты тензоров первых двух полей в каждой точке  $M \in V$ , мы получим в  $V$  новое тензорное поле

$$m_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M),$$

являющееся суммой двух первых полей, а перемножая в каждой точке  $M \in V$  компоненты первых и третьего тензорных полей, получим новое тензорное поле

$$n_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M)c_{lm}(M)$$

— произведение первого и третьего тензорных полей.

Аналогично можно рассмотреть операции свертывания тензорных полей и перестановки индексов в данном тензорном поле, производя эти операции над тензорами заданных полей, в каждой точке  $M \in V$ .

3. В тензорном поле, кроме алгебраических операций можно определить еще *операцию дифференцирования* — основную операцию тензорного анализа. Эту операцию можно ввести следующей образом.

Пусть, например, в области  $V \subset E_3$  дано поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M). \quad (2)$$

Выясним, как меняется этот тензор при переходе от точки  $M(x_1, x_2, x_3)$  в бесконечно близкую к  $M$  точку  $M'$ . Положение точки  $M'$  относительно точки  $M$  определяется вектором  $\overline{dx} = \overline{MM'}$ , разложение которого по базисным векторам записывается в виде

$$dx = dx_i e_i.$$

При переходе к новому ортонормованному базису  $e_{i'} = \gamma_{i'i} e_i$  координаты вектора  $dx$  преобразуются по формулам

$$dx_{i'} = \gamma_{i'i} dx_i.$$

Так как  $\overline{OM'} = \overline{OM} + \overline{MM'}$ , то компоненты  $x'_{i'}$  точки  $M'$  теперь выразятся так:

$$x'_{i'} = x_i + dx_i.$$

Обозначим через  $\Delta a_{ijk}$  приращения, которые получают компоненты тензора  $a_{ijk}$  при переходе из точки  $M$  в точку  $M'$ . Если предположить, что эти компоненты являются дифференцируемыми функциями от координат точки  $M$ , то главные части приращений могут быть записаны так:

$$da_{ijk} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} dx_l.$$

(3)

Докажем, что совокупность величин  $da_{ijk}$  образует тензор третьей валентности. Действительно, при переходе к базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$  компоненты тензора  $a_{ijk}$  преобразуются по формулам

$$a_{i'j'k'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} a_{ijk}.$$

Дифференцируя их почленно и учитывая то, что величины  $\gamma_{i'i}$  постоянны (они не зависят от положения точки  $M$ , так как являются косинусами углов между векторами старого и нового базисов), мы получим

$$da_{i'j'k'} = \gamma_{i'i} \gamma_{j'j} \gamma_{k'k} da_{ijk}.$$

Эти равенства показывают, что величины  $da_{ijk}$  при замене базиса преобразуются по тензорному закону. Тензор с координатами  $da_{ijk}$  назовем абсолютным дифференциалом тензорного поля  $a_{ijk}$ .

Теперь формулы (3) показывают, что при свертывании величин  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$  с координатами произвольного вектора  $dx_i$  получается тензор  $da_{ijk}$ . В силу обратного тензорного признака



отсюда следует, что величины  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$  образуют тензор четвертой валентности в точке  $M$ .

Поскольку наши построения можно провести в любой точке  $M \in \mathcal{V}$ , мы получаем в  $\mathcal{V}$  новое тензорное поле, называемое *абсолютной производной тензорного поля*  $a_{ijk}$ . Для абсолютной производной тензорного поля  $a_{ijk}$  применяется обозначение

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk, l}$$

в котором в качестве дополнительного индекса  $l$  на последнем месте ставится индекс той координаты  $x_l$  точки  $M$ , по которой производится дифференцирование, причем этот индекс от остальных отделяется запятой.

Перепишем формулы (3) в новых обозначениях:

$$da_{ijk} = a_{ijk, l} dx_l. \tag{4}$$

Эти формулы показывают, что абсолютный дифференциал тензора  $a_{ijk}$  есть результат свертывания тензора  $dx_l$  и абсолютной производной  $a_{ijk, l}$  этого тензора.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для тензорного поля любой валентности. *Совокупность всех частных производных первого порядка от компонент данного тензорного поля по координатам  $x_l$  той точки, в которой рассматривается тензорное поле, образует тензор, валентность которого на единицу больше валентности исходного тензорного поля, — абсолютную производную данного поля. Результат свертывания этой абсолютной производной по индексу, который возникает при дифференцировании, с координатами вектора  $dx$  представляет собой абсолютный дифференциал заданного векторного поля.*

Сделаем еще три замечания.

**Замечание 1.** Поскольку в прямоугольной декартовой системе координат координаты абсолютного дифференциала и абсолютной производной тензорного поля совпадают с обычными дифференциалами и частыми производными компонент исходного поля, правила абсолютного дифференцирования будут точно такими же, как правила обычного дифференцирования.

**Замечание 2.** Точно так же, как были построены абсолютный дифференциал и абсолютная производная первого порядка для произвольного тензорного поля, можно построить абсолютный

дифференциал и абсолютную производную второго порядка, а потом и высших порядков для этого поля. Например, для тензорного поля  $a_{ijk}$  частные производные

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_m \partial x_l} = a_{ijk, lm}$$

образуют вторую абсолютную производную тензора  $a_{ijk}$ , которая является тензором пятой валентности. Результат свертывания этого тензора с дифференциалами  $dx_l$  и  $dx_m$  приведет к выражению для второго абсолютного дифференциала тензора  $a_{ijk}$ :

$$d^2 a_{ijk} = a_{ijk, lm} dx_l dx_m.$$

Вообще, абсолютный дифференциал порядка  $p$  от произвольного, не менее чем  $p$  раз дифференцируемого тензорного поля представляет собой тензорное поле той же валентности, что и исходное поле, а его абсолютная производная порядка  $p$  — тензорное поле, валентность которого на  $p$  единиц больше валентности исходного поля.

**Замечание 3.** Предположим, что функции, которые определяют тензорное поле, имеют непрерывные частные производные  $(n+1)$ -го порядка в точке  $M(x_1, x_2, x_3)$  и ее окрестности. Тогда в окрестности точки  $M$  эти функции могут быть разложены по формуле Тейлора. Полученное разложение будем называть *разложением тензора по формуле Тейлора*. Для тензорного поля  $a_{ijk}$  это разложение запишется так:

$$\begin{aligned} a_{ijk}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) &= a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ da_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2!} d^2 a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} d^n a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} a_{ijk}(x_1 + \theta_{ijk} \Delta x_1, x_2 + \theta_{ijk} \Delta x_2, x_3 + \theta_{ijk} \Delta x_3), \end{aligned}$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} a_{ijk}(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) &= a_{ijk}(x_1, x_2, x_3) + \\ &+ a_{ijk, l_1}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} + \frac{1}{2!} a_{ijk, l_1 l_2}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} \Delta x_{l_2} + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} a_{ijk, l_1 l_2 \dots l_n}(x_1, x_2, x_3) \Delta x_{l_1} \dots \Delta x_{l_n} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} a_{ijk, l_1 l_2 \dots l_n l_{n+1}}(x_1 + \theta_{ijk} \Delta x_1, x_2 + \theta_{ijk} \Delta x_2, x_3 + \\ &+ \theta_{ijk} \Delta x_3) \Delta x_{l_1} \dots \Delta x_{l_n} \Delta x_{l_{n+1}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь  $\Delta x_i = dx_i$  и  $0 < \theta_{ijk} < 1$ , причем  $\theta_{ijk}$ , вообще говоря, различны для разных наборов  $i, j, k$ . Важно заметить, что коэффициенты в каждой группе членов этой формулы являются тензорами: это компоненты тензоров  $a_{ijk, l_1}, a_{ijk, l_1 l_2}, \dots$ , вычисленные в точке  $M$ .

4. Рассмотрим *дифференцирование скалярного поля* - поля тензора нулевой валентности:

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Согласно общему правилу абсолютная производная этого поля

$$\varphi_{, i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

является тензором первой валентности, которая, как известно, определяет векторное поле. Это поле называется *градиентом* скалярного поля и обозначается  $\text{grad } \varphi$  или  $\nabla \varphi$ :

$$\text{grad } \varphi = \varphi_{, i} e_i.$$

Поскольку новое поле есть *поле одновалентного тензора*, его инвариантный смысл не вызывает сомнения. Из курса высшей математики известно, что градиент скалярного поля в данной точке  $M$  - это вектор, в направлении которого скалярное поле возрастает с наибольшей скоростью и модуль которого равен этой наибольшей скорости.

Приведем некоторые примеры скалярных полей и их градиентов.

а) Если имеется скалярное поле температуры

$$T = T(M)$$

неравномерно нагретого изотропного тела, то вектор

$$\mathbf{h} = -k \text{grad } T$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более нагретых частей тела к менее нагретым его частям: здесь  $k$  — постоянный множитель, называемый *коэффициентом теплопроводности*. Тепловой поток в каждой точке тела идет по направлению вектора  $\mathbf{h}$ , причем через ортогональную  $\mathbf{h}$  площадку  $dS$  за одну секунду проходит  $|\mathbf{h}| dS$  единиц тепла.

б) Если имеем скалярное поле давлений

$$P = P(M)$$

в различных точках идеальной жидкости, которая заполняет некоторый объем  $V$ , то вектор

$$dF = - \text{grad } P \cdot dV$$

дает равнодействующую сил давления, приложенных к элементу объема  $dV$ .

в) В электростатике напряженность  $E$  электрического поля, т.е. сила, которая действует на единицу заряда положительного электричества, как установлено опытом, равна

$$E = - \operatorname{grad} \varphi,$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля. Если поле порождается положительным зарядом  $e$ , помещенным в начало координат, то по закону Кулона

$$E = \frac{e}{|r|^3} r,$$

где  $r$  — радиус-вектор данной точки. Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{e}{|r|}.$$

5. Применим теперь полученные в этом пункте результаты и условия Сильвестра положительной и отрицательной определенности квадратичной формы для вывода достаточных условий экстремума функции двух и трех сменных.

Пусть функция

$$u = u(x_1, x_2, x_3)$$

определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности некоторой точки  $M_0(x^0_1, x^0_2, x^0_3)$ , и пусть эта точка является *стационарной*, т.е. в ней

$$\frac{\partial u(x^0_1, x^0_2, x^0_3)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

(6)

Тогда, чтобы выяснить, достигается ли в стационарной точке экстремум, воспользуемся формулой Тейлора (5), записав ее для тензорного поля  $u(x_1, x_2, x_3)$  нулевой валентности. Обозначим

$$u_{,ij}(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = \frac{\partial^2 u(x^0_1, x^0_2, x^0_3)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij} \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Если учесть условие стационарности (6), то, пользуясь формулой Тейлора, приращение функции  $u(x_1, x_2, x_3)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x^0_1 + \Delta x_1, x^0_2 + \Delta x_2, x^0_3 + \Delta x_3) - u(x^0_1, x^0_2, x^0_3) = \\ &= \frac{1}{2!} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j + [3]; \end{aligned}$$

здесь  $\Delta x_i = x_i - x^0_i$ , а через [3] обозначенные члены не менее третьего порядка малости.

Так как при малых  $|\Delta x_i|$  члены третьего порядка значительно меньше членов второго порядка, то знак всей правой части определяется знаком квадратичной формы

$$\Phi(\Delta x, \Delta x) = a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = a_{11} (\Delta x_1)^2 + a_{22} (\Delta x_2)^2 + a_{33} (\Delta x_3)^2 + 2a_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 + 2a_{13} \Delta x_1 \Delta x_3 + 2a_{23} \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Если эта форма будет положительно определенной, то  $\Delta u > 0$ ,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3) > u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

и в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  имеет минимум. Если же эта форма отрицательной определена, то  $\Delta u < 0$ ,

$$u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, x_3^0 + \Delta x_3) < u(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

и в точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  будет максимум.

Что касается необходимых и достаточных условий положительной и отрицательной определенности формы  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$ , то они нам известны - это условия Сильвестра. Таким образом, достаточными условиями того, чтобы в стационарной точке  $(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  функции  $u(x_1, x_2, x_3)$  достигался минимум или максимум, будут соответственно условия

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0; \\ \beta) \quad & a_{ii} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Если ни условие  $\alpha$ ), ни условие  $\beta$ ) не выполнены, то возможны два случая: или форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  — неопределенная, т.е. принимает в окрестности стационарной точки значения разных знаков, или же она является полуопределенной, т.е. принимает значение одного знака, но обращается в нуль не только при  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$  (в частности, она может быть тождественно равна нулю).

В первом случае в стационарной точке экстремума не будет, а во втором - экстремум может быть, а может и не быть: в этом случае надо исследовать аналогичным образом члены третьего порядка формулы Тейлора при тех значениях  $\Delta x_i$ , при которых члены второго порядка обращаются в нуль (в частности, при любых  $\Delta x_i$ , когда все частные производные второго порядка в стационарной точке равны 0).

*Замечание.* Для функции  $u(x)$  одного переменного квадратичная форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  сводится к одному члену

$$u''(x_0) \Delta x^2,$$

где  $x_0$  — стационарная точка. Эта форма будет положительно определенной при  $u''(x_0) > 0$  и отрицательно определенной при  $u''(x_0) < 0$ . В первом случае функция  $u(x)$  в точке  $x_0$  будет иметь минимум, а во втором — максимум.

Для функции  $u(x_1, x_2)$  двух переменных исследование ее поведения в окрестности стационарной точки  $M_0(x_1^0, x_2^0)$  сводится к исследованию квадратичной формы от двух переменных  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$ :

$$\Phi(\Delta x, \Delta x) = a_{11}(\Delta x_1)^2 + 2a_{12}\Delta x_1\Delta x_2 + a_{22}(\Delta x_2)^2,$$

где снова

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right|_{M_0}.$$

Критерий Сильвестра показывает, что исследуемая функция имеет в точке  $M_0$  минимум, если

$$a_{11} > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и максимум, если

$$a_{11} < 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Если  $M_2 < 0$ , то квадратичная форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  является неопределенной и функция  $u(x_1, x_2)$  не имеет экстремума в точке  $M_0$ . Если же  $M_2 = 0$ , то форма  $\Phi(\Delta x, \Delta x)$  — полуопределенная и для выяснения вопроса о наличии экстремума в точке  $M_0$  необходимо дальнейшее исследование.

6. Рассмотрим теперь дифференцирование векторного поля - тензорного поля первой валентности:

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3).$$

Абсолютная производная этого поля равна

$$a_{i,k} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k}.$$

Полученный тензор второй валентности  $a_{i,k}$  называют *градиентом векторного поля*.

Напишем теперь формулу, которая связывает абсолютный дифференциал  $da_i$  и абсолютную производную  $a_{i,k}$ :

$$da_i = a_{i,k} dx_k, \tag{7}$$

где  $dx_k$  - координаты вектора  $dx = \overline{MM'}$ . Тензор второй валентности  $a_{i, k}$ , как мы знаем, порождает линейное преобразование

$$y = Ax$$

или в координатной форме,

$$y_i = a_{i, k}x_k.$$

Поэтому формулу (7) можно переписать в виде

$$da = A(M)dx. \tag{8}$$

Поскольку  $da \approx a(M') - a(M)$ , а  $dx = \overline{MM'}$ , то с точностью до бесконечно малых второго порядка линейное преобразование  $A(M)$ , действуя на вектор бесконечно малого смещения  $\overline{MM'} = dx$ , дает соответствующее увеличение векторного поля  $a(M)$ :

$$a(M') - a(M) = \Delta a(M) \approx A(M) dx. \tag{9}$$

Последнее соотношение показывает, что линейное преобразование  $A(M)$  определяет главную линейную часть приращения векторного поля  $a$  в точке  $M$ .

Рассмотрим след линейного преобразования  $A(M)$ :

$$\text{Sp } A(M) = a_{i, i}.$$

Так как производная  $a_{i, k}$  векторного поля есть тензор второй валентности, то этот след представляет собой инвариант, который называют *дивергенцией* векторного поля  $a$ :

$$a_{i, i} = \text{div } a.$$

Поле этого инварианта будет скалярным полем, определенным в той же области  $V$ , в которой определено исходное векторное поле  $a$ . Так как инвариант  $\text{div } a$  получается из векторного поля  $a(M)$  в результате дифференцирования, то его называют *дифференциальным инвариантом* поля  $a(M)$ .

Рассмотрим еще вектор  $z$ , координаты которого получаются в результате свертывания тензора  $a_{i, j}$  с дискриминантным тензором —  $\varepsilon_{ijk}$ , а именно положим

$$z_i = -\varepsilon_{ijk}a_{j, k}. \tag{10}$$

Этот вектор  $z$  называется *ротом* векторного поля  $a$ :

$$z = \text{rot } a.$$

Расписывая подробно формулы (10) для координат вектора  $z$ , найдем

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_{3, 2} - a_{2, 3}) \varepsilon, \\ z_2 &= (a_{1, 3} - a_{3, 1}) \varepsilon, \end{aligned}$$

$$z_3 = (a_{2,1} - a_{1,2}) \varepsilon,$$

где величина  $\varepsilon$  равна  $+1$  в правой и  $-1$  в левой системах координат. Мы видим отсюда, что *компоненты вектора rot a с точностью до множителя  $\varepsilon$  совпадают с компонентами удвоенного альтернированного тензора  $a_{i,k}$* . Таким образом, с векторным полем  $\mathbf{a}(M)$ , определенным в области  $V$ , инвариантно связывается новое векторное поле — поле вектора  $\text{rot } \mathbf{a}$ , определенное в той же области  $V$ .

Дивергенция и ротор векторного поля являются основными понятиями векторного анализа. При обычном изложении векторного анализа необходимо доказывать инвариантности этих полей. В данном же случае инвариантность непосредственно вытекает из тензорной природы этих понятий.

Напомним еще, что векторное поле  $\mathbf{a}=\mathbf{a}(M)$  называется *соленоидальным* в области  $V$ , если в этой области  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ; векторное поле называется *безвихревым* в  $V$ , если в ней  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ .

Найдем, наконец, дивергенцию векторного поля, являющегося градиентом некоторого скалярного поля  $\varphi(M)$ :

$$\mathbf{a} = \text{grad } \varphi = \varphi_{,i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

Для определения дивергенции векторного поля  $\mathbf{a}=a_i \mathbf{e}_i$ , как мы знаем, надо взять производную этого векторного поля  $a_i$ ,  $k$  и свернуть его по индексам  $i$  и  $k$ . Но  $a_i, k = \varphi_{,ik}$ , поэтому

$$\text{div } \mathbf{a} = \varphi_{,ii} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

называется *оператором Лапласа* (или «лапласианом»). С помощью этого оператора дивергенция векторного поля  $\text{grad } \varphi$  может быть записана в виде

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta \varphi.$$

Если скалярное поле  $\varphi(M)$  удовлетворяет условию

$$\Delta \varphi = 0,$$

это оно называется *гармоническим* (или *лапласовым*) *полем*.

Уравнение

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt},$$

которому удовлетворяет определяющая такое поле функция  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , называется *уравнением Лапласа*. Функция



$\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , которая удовлетворяет этому уравнению, называется *гармонической*.

7. До сих пор мы изучали тензорные поля, тензоры которых зависят от положения точки в пространстве, но не зависят от момента времени, в который рассматривается это поле. Такие тензорные поля называются *стационарными*. Если же *тензор поля зависит не только от положения точки в пространстве, но и от времени, то поле называется нестационарным*. Компоненты нестационарного тензорного поля будут функциями координат  $x_i$  точки  $M$  и времени  $t$ . Например, для трехвалентного тензорного поля эта зависимость запишется так:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3, t).$$

Нестационарное тензорное поле будем называть *фазовым пространством*.

Скорость изменения тензорного поля во времени в некоторой неподвижной точке  $M$  будет описываться

частными производными  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial t}$ , которые, как легко видеть, снова

образуют тензорное поле той же валентности, что и исходное поле. Предположим теперь, что нестационарное тензорное поле  $a_{ijk}$  описывает некоторое свойство материальной среды, частицы которой находятся в движении. Определим, как изменяются компоненты тензора  $a_{ijk}$ , которые связаны с некоторой фиксированной частицей, при ее движении. Пусть траектория движения этой частицы описывается уравнениями

$$x_i = x_i(t).$$

Тогда скорость изменения компонент тензора  $a_{ijk}$ , связанных с частицей, будет равнять

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} \frac{dx_l}{dt}.$$

Но  $\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = a_{ijk,l}$ , а  $\frac{\partial x_l}{\partial t}$  — компоненты скорости частицы

движущейся материальной среды, которые мы обозначим через  $v_l$ . Поэтому предыдущая формула переписется так:

$$\frac{da_{ijk}}{dt} = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial t} + a_{ijk, l} v_l.$$

(11)

Первый член правой части этого соотношения описывает изменение компонент тензора  $a_{ijk}$  в неподвижной точке  $M$ , а

второй член связан с движением частицы в пространстве. Он называется *переносным членом*.

Очевидно, что формулы вида (11) будут иметь место для нестационарных тензорных полей любой валентности. Для скалярного поля  $\varphi = \varphi(M, t)$  эта формула примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \varphi_{,i} v_i. \tag{12}$$

Если обозначить вектор скорости частицы через  $\mathbf{v}$ , то

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \text{ grad } \varphi.$$

Для нестационарного векторного поля  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M, t)$  формула, аналогична формуле (11), выглядит так:

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{i,k} v_k.$$

Последняя формула равносильна соотношению

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{A}(M) \mathbf{v},$$

где  $\mathbf{A}(M)$  — линейное преобразование, определяемое тензором  $a_{i,k}$ .

## 2.2.2. Механика деформируемой среды

1. Применим аппарат, построенный в п. 2.2.1, для изучения механики деформируемой среды.

Рассмотрим некоторую сплошную среду — газ, жидкость, пластическое или упругое тело, которое движется в пространстве, и подвергается при этом деформации. Пусть в начальный момент времени эта среда заполняла некоторый объем  $V$  и  $x_0$  — радиус-вектор некоторой ее точки  $M_0$  в начальный момент. В течение некоторого времени точка  $M_0$  переместилась в пространстве и заняла новое положение  $M$ . Если обозначить радиус-вектор точки  $M$  через  $\mathbf{x}$ , то будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), \tag{1}$$

где в правой части стоит векторная функция  $\mathbf{x}$  векторного аргумента  $\mathbf{x}_0$  и времени  $t$  непрерывная и дифференцируемая необходимое число раз по всем своим аргументам и удовлетворяющая условию

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0.$$

Если точка  $M_0$  фиксирована, то уравнение (1) представляет собой уравнение движения этой точки при изменении времени. Наоборот, если фиксировано время  $t$ , то уравнение (1) описывает то новое положение точек рассматриваемой деформируемой среды, которое они займут в момент времени  $t$ .

Обозначим через  $\mathbf{v}$  скорость точки  $M$  деформируемой среды. Тогда по определению

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}.$$

Вектор  $\mathbf{v}$  является функцией от начального положения точки  $M$ , определяемого вектором  $\mathbf{x}_0$ , и времени  $t$ . Но при фиксированном  $t$  можно считать, что вектор  $\mathbf{v}$  является функцией координат точки  $M$ , т.е.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(M).$$

Таким образом, в каждый момент времени с деформируемой сплошной средой связывается векторное поле — поле скоростей точек этой среды. Пусть  $v_i$  — координаты вектора  $\mathbf{v}$  по неподвижному базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , так что  $\mathbf{v} = v_i e_i$ .

Выделим в нашей сплошной среде малую окрестность некоторой ее точки  $M$ . Заполняющая эту окрестность среда, перемещаясь вместе со всей средой, испытывает некоторую деформации и вращение. Рассмотрим движение всех частиц, содержащихся в выделенной окрестности, за бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$ . С точностью до бесконечно малых второго порядка относительно  $\Delta t$  можно считать, что перемещение частицы, расположенной в точке  $M$ , определяется вектором  $\mathbf{v}(M)\Delta t$ . Наряду с точкой  $M$  нашей окрестности рассмотрим еще какую-нибудь ее точку  $M'$  (рис. 1).

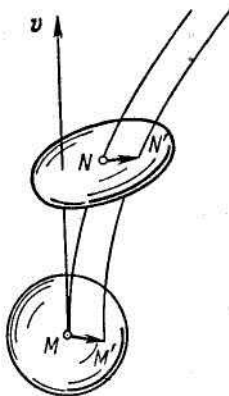


Рис. 1.

При рассматриваемом смещении точки  $M$  и  $M'$  переходят соответственно в точки  $N$  и  $N'$ , причем

$$\overline{MN} \approx \mathbf{v}(M) \Delta t, \quad \overline{M'N'} \approx \mathbf{v}(M') \Delta t.$$

Обозначим через  $\mathbf{x}'$  радиус-вектор точки  $M'$ , и пусть  $\Delta \mathbf{x} = \overline{MM'}$ . Тогда вектор  $\overline{NN'}$ , в который переходит вектор  $\overline{MM'}$  при рассматриваемой деформации, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{NN'} &= \overline{NM} + \overline{MM'} + \overline{M'N'} = \overline{MM'} + (\overline{M'N'} - \overline{MN}) \approx \\ &\approx \Delta \mathbf{x} + [\mathbf{v}(M') - \mathbf{v}(M)] \Delta t. \end{aligned}$$

Но по формуле (9) п.2.2.1 с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно  $\Delta \mathbf{x}$  имеем

$$\mathbf{v}(M') - \mathbf{v}(M) \approx \mathbf{V}(M) \Delta \mathbf{x},$$

где  $\mathbf{V}(M)$  — линейное преобразование с матрицей

$$\mathbf{V}(M) = (v_{i,j}),$$

составленной из производных координат вектора  $\mathbf{v}$  по координатам точки  $M$ . Поэтому предыдущее соотношение может быть переписано в виде

$$\overline{NN'} \approx \Delta \mathbf{x} + \mathbf{V}(M) \Delta t \Delta \mathbf{x},$$

или, если положить  $\overline{NN'} = \Delta \mathbf{y}$ ,

$$\Delta \mathbf{y} \approx [\mathbf{E} + \mathbf{V}(M) \Delta t] \Delta \mathbf{x},$$

(2)

где  $\mathbf{E}$  — тождественное преобразование пространства.

Равенство (2) означает, что вектор  $\overline{MM'} = \Delta \mathbf{x}$  переходит в вектор  $\overline{NN'} = \Delta \mathbf{y}$  посредством линейного преобразования  $\mathbf{E} + \mathbf{V}(M) \Delta t$ , где  $\mathbf{V}(M)$  — линейное преобразование, которое определяется тензором абсолютной производной векторного поля  $\mathbf{V}(M)$ . Это означает, что малая окрестность каждой точки деформируемой среды с точностью до бесконечно малых величин второго порядка относительно  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta t$  испытывает однородную деформацию.

Запишем разложение векторов  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta \mathbf{y}$  по базисным векторам  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ :

$$\Delta \mathbf{x} = \Delta x_i \mathbf{e}_i, \quad \Delta \mathbf{y} = \Delta y_i \mathbf{e}_i.$$

Тогда соотношение (2) в координатной форме переписется так:

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + v_{i,j} \Delta t) \Delta x_j. \quad (3)$$

Сравнивая это равенство с соотношением

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij}) \Delta x_j,$$

заключаем, что тензор  $v_{i,j} \Delta t$  описывает полную деформацию бесконечно малой окрестности точки  $M$ . Используя вышеприведенное обозначение, запишем

$$e_{ij} = v_{i,j} \Delta t. \quad (4)$$

В этом случае тензор  $e_{ij}$  не будет оставаться постоянным, а будет меняться от точки к точке. Это связано с тем, что теперь рассматривается неоднородная деформация сплошной среды.

В рассматриваемом случае симметричная часть тензора  $e_{ij}$  описывает чистую деформацию окрестности точки  $M$ , а кососимметричная его часть — вращение этой окрестности вокруг точки  $M$ . Тензор чистой бесконечно малой деформации  $\varepsilon_{ij}$  теперь может быть записан в виде

$$\varepsilon_{ij} = e_{(ij)} = v_{(i,j)} \Delta t. \quad (5)$$

Тензор

$$u_{ij} = v_{(i,j)} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

называется *тензором скоростей деформации*. Тензор  $\omega_{ij}$ , определяющий бесконечно малый поворот окрестности точки  $M$ , записывается так:

$$\omega_{ij} = e_{[i,j]} = v_{[i,j]} \Delta t.$$

Ось, вокруг которой производится этот поворот, имеет направление вектора  $\omega$ , координаты которого, как было указано, связанные с компонентами тензора  $\omega_{ij}$  соотношениями

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk},$$

а угол поворота равен  $|\omega|$ . С тензором  $v_{i,j}$  вектор  $\omega$  связан так:

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{[j,k]} \Delta t = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} v_{j,k} \Delta t$$

(в силу косои симметрии тензора.  $\varepsilon_{ijk}$  знак альтернування тензора  $v_{i,j}$  может быть опущен). Но из формулы (10) п.2.2.1 следует, что величины —  $\varepsilon_{ijk} v_{i,j}$  являются координатами вектора  $\text{rot } v$ . Поэтому последняя формула может быть переписана в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Отсюда становится ясным механический смысл ротора векторного поля  $\boldsymbol{v}$ : если  $\boldsymbol{v}$  — поле мгновенных скоростей движущейся деформированной среды, то векторное поле  $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$  представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц этой среды.

Полная деформация окрестности точки  $M$  определяется тензором  $\delta_{ij} + e_{ij}$ , который может быть представлен в виде

$$\delta_{ij} + e_{ij} = (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj})$$

и, значит, состоит из чистой деформации и поворота вокруг точки  $M$ . Но, кроме того, окрестность точки  $M$  переносится параллельно, когда точка  $M$  переходит в положение  $N$ . Отсюда следует, что бесконечно малое перемещение окрестности точки  $M$  деформируемой среды состоит из чистой деформации, определяемой тензором  $\varepsilon_{ij} = v_{(i,j)}\Delta t$ , бесконечно малого поворота определяемого вектором

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \Delta t.$$

и параллельного переноса, определяемого вектором  $\boldsymbol{v}\Delta t$ .

Вычислим еще коэффициент относительного объемного расширения деформируемой среды. Для случая однородной деформации этот коэффициент равен

$$\mu = v_{ii}\Delta t.$$

Эта же формула остается справедливой и в общем случае, если применять ее к малой окрестности каждой рассматриваемой точки деформируемой среды. Пользуясь формулой (5) и учитывая, что  $v_{(i,i)} = v_{i,i}$ , перепишем последнее соотношение:

$$\mu = v_{i,u}\Delta t.$$

Но  $v_{i,u} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$ . Поэтому

$$\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \Delta t. \quad (7)$$

Формула (7) раскрывает механический смысл дивергенции векторного поля  $\boldsymbol{v}$ : если  $\boldsymbol{v}$  — поле скоростей движущейся деформируемой среды, то  $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$  представляет собой скалярное поле скоростей относительного объемного расширения этой среды.

Теперь ясно, что условие несжимаемости деформируемой среды может быть записано в виде

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

Это означает, что поле скоростей несжимаемой среды является соленоидальным полем.

Заметим еще, что движение деформируемой среды называется *безвихревым*, если частицы жидкости при этом движении не вращаются. Из формулы (6) видно, что для того, чтобы движение деформируемой среды было безвихревым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0,$$

т.е. чтобы поле скоростей этой среды было потенциальным.

2. Выведем теперь основные уравнения механики деформируемой среды. Пусть  $\rho = \rho(M, t)$  — плотность, а  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(M, t)$  — скорость частицы среды, которая находится в точке  $M$  в момент времени  $t$ . Функции  $\rho$  и  $\mathbf{v}$  предполагаются непрерывными и достаточное число раз дифференцируемые функциями своих аргументов. Выделим снова в нашей среде достаточно малую окрестность точки  $M$ . Тогда масса  $\Delta m$  этой окрестности с точностью до бесконечно малых величин второго порядка — может быть вычислена по формуле

$$\Delta m \approx \rho(M) \Delta V,$$

где  $\Delta V$  — объем этой окрестности. При перемещении выделенной окрестности в пространстве, согласно закону сохранения вещества, ее масса должна оставаться постоянной, т.е.

$$\frac{d}{dt} (\Delta m) \equiv \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d}{dt} (\Delta V) = 0.$$

(8)

Но

$$\frac{d}{dt} (\Delta V) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V(N) - \Delta V(M)}{\Delta t},$$

где  $N$ -точка, в которую переместится точка  $M$  за время  $\Delta t$ . Числитель дроби, стоящий под знаком предела, таким образом может быть выражен через коэффициент относительного объемного расширения:

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \mu(M) \Delta V(M)$$

или, в силу формулы (10.132),

$$\Delta V(N) - \Delta V(M) \approx \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \Delta V(M) \Delta t.$$

Подставляя это выражение под знак предела и совершая предельный переход, получим

$$\frac{d}{dt} (\Delta V) = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \Delta V.$$

Если внести эту величину в соотношение (8) и сократить на  $\Delta V$ , то найдем

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{9}$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности* и является первым основным уравнением механики деформируемой среды.

Уравнение (9) обычно записывают в несколько иной форме. Во-первых,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = v_{i,i},$$

во-вторых, в силу формулы (12) п.2.2.1

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho, i v_i.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9), найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho, i v_i + \rho v_{i,i} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i), i = 0. \tag{10}$$

Последняя формула может быть переписана еще так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

3. Найдем второе основное уравнение механики деформируемой среды - *уравнение движения*. Для этого рассмотрим окрестность точки  $M$ , имеющую форму параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и центром в точке  $M$ . Обозначим длину ребра этого параллелепипеда, параллельного базисному вектору  $e_i$ , через  $2\Delta x_i$ , площадь грани, перпендикулярной этому вектору, — через  $\Delta s_i$ , и объем параллелепипеда — через  $\Delta V$ . Тогда

$$\Delta s_i = 4\Delta x_j \Delta x_k, \quad \Delta V = 8\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k.$$

Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенный внутри выделенного параллелепипеда. Как мы знаем, имеется два типа таких сил — *объемные и поверхностные силы*. Если обозначить через  $F$  величину объемной силы, отнесенной к единице массы, то на выделенный элемент объема будет действовать сила

$$F \Delta m = F \rho \Delta V.$$



Поверхностные силы, действующие на выделенный объем, связаны с теми напряжениями, которые возникают в деформируемой среде. Эти напряжения описываются тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , который теперь не будет уже постоянным, а меняется от точки к точке, так что

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(M)$$

(конечно, компоненты тензора напряжений являются достаточное число раз дифференцируемыми функциями координат точки).

Пусть  $\sigma(M)$  — линейное преобразование, порожаемое тензором напряжений в точке  $M$ . Найдем силы, которые действуют на две параллельных грани выделенного параллелепипеда, например на грани, которые перпендикулярны вектору  $e_1$ . Пусть  $M'$  и  $M''$  — их центры, так что  $M' = M''(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$ ,  $M'' = M''(x_1 - \Delta x_1, x_2, x_3)$ . Тогда силы, действующие на правую и левую грани параллелепипеда, соответственно равны

$$\sigma(M') e_1 \Delta s_1 \text{ и } \sigma(M'') (-e_1) \Delta s_1,$$

так как векторы  $e_1$  и  $-e_1$  являются внешними нормальными к этим граням. Сумма этих сил будет равна

$$\Delta p_1 = [\sigma(M') - \sigma(M'')] e_1 \Delta s_1 = [\sigma_{i1}(M') - \sigma_{i1}(M'')] e_i \Delta s_1.$$

Применяя к разностям, которые стоят в скобках, теорему Лагранжа, получим

$$\Delta p_1 = \sigma_{i1,1}(M_{1i}) e_i \cdot 2\Delta x_1 \Delta s_1 = \sigma_{i1,1}(M_{1i}) e_i \Delta V, \quad (11)$$

где точки  $M_{1i}$  принадлежат рассматриваемой окрестности точки  $M$ . Аналогично подсчитываются силы, действующие на остальные грани выделенного параллелепипеда.

Обозначим через  $w$  ускорение, которое сообщают выделенной окрестности точки  $M$  действующие на нее силы. Тогда второй закон Ньютона для этой окрестности запишется в виде

$$\rho w \Delta V = F \rho \Delta V + \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3.$$

Используя соотношение (10.136) и аналогичные ему выражения для  $\Delta p_2$  и  $\Delta p_3$  и сокращая на  $\Delta V$ , получим отсюда

$$\rho w = \rho F + [\sigma_{i1,1}(M_{1i}) + \sigma_{i2,2}(M_{2i}) + \sigma_{i3,3}(M_{3i})] e_i,$$

где точки  $M_{1i}$ ,  $M_{2i}$ ,  $M_{3i}$  принадлежат рассматриваемой окрестности точки  $M$ . Перейдем теперь к пределу при  $\Delta x_i \rightarrow 0$ ; так как при этом все точки  $M_{ij} \rightarrow M$ , последнее выражение примет вид

$$\rho \boldsymbol{\omega} = \rho \mathbf{F} + (\sigma_{i_1,1} + \sigma_{i_2,2} + \sigma_{i_3,3}) \mathbf{e}_i$$

Теперь все величины, которые входят в это соотношение, вычисляются в одной и той же точке  $M$ .

Обозначим через  $F_i$  координаты вектора  $\mathbf{F}$ . Так как

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \text{ то } \omega_i = \frac{dv_i}{dt}.$$

Выражение

$$\sigma_{i_1,1} + \sigma_{i_2,2} + \sigma_{i_3,3} = \sigma_{ik,k}$$

есть свернутая абсолютная производная тензорного поля  $\sigma_{ik}$ . Поэтому предыдущее уравнение может быть записано в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \sigma_{ik,k} \tag{12}$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения деформируемой среды*. Вместе с уравнением (10) они представляют *систему основных уравнений механики деформируемой среды*.

Отметим, что уравнения (10) и (12) записанные в инвариантной форме и потому не зависят от выбора прямоугольной декартовой системы координат пространства.

### 2.2.3. Ортогональные криволинейные системы координат

1. До сих пор положение точки в пространстве мы определяли ее радиусом-вектором  $\mathbf{x} = \overline{OM} = x_i \mathbf{e}_i$  относительно некоторого неподвижного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  с началом в точке  $O$ ; числа  $x_1, x_2, x_3$  — это прямоугольные декартовы координаты точки  $M$ .

Во многих случаях бывает полезно определять положение точки в пространстве не тремя декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$ , а какими-нибудь тремя другими числами  $u_1, u_2, u_3$ , которые более тесно связаны с рассматриваемой задачей. Будем предполагать, что не только каждой точке  $M$  соответствуют три числа  $u_1, u_2, u_3$ , но и, наоборот, каждой такой тройке чисел  $u_1, u_2, u_3$  соответствует определенная точка  $M$ . При этом иногда приходится ограничивать область изменения переменных  $u_1, u_2, u_3$ , чтобы достичь взаимной однозначности соответствия между точками и тройками чисел  $u_1, u_2, u_3$ .

Числа  $u_1, u_2, u_3$  называются *криволинейными координатами* точки  $M$  (основание для такого названия координат будет выяснена ниже).

Поскольку всякой точке  $M$  соответствуют координаты  $u_1, u_2, u_3$ , то каждая из этих координат является функцией от прямоугольных декартовых координат  $x_1, x_2, x_3$ :

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1,2,3). \tag{1}$$

Но задание чисел  $u_1, u_2, u_3$  определяет положение точки  $M$ , и поэтому ее прямоугольные декартовы координаты  $x_1, x_2, x_3$  будут функциями от  $u_1, u_2, u_3$ :

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3) \quad (i=1,2,3). \tag{2}$$

Как известно из курса математического анализа, для того чтобы соотношение (1) были разрешимы относительно  $x_1, x_2, x_3$ , т.е. чтобы из них можно было вывести формулы (2), необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \equiv \frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля:

$$\frac{\partial (u_1, u_2, u_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

Точно так же должен быть отличен от нуля и определитель

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right| \equiv \frac{\partial (x_1, x_2, x_3)}{\partial (u_1, u_2, u_3)}.$$

В дальнейшем будем всюду предполагать неравенство нулю этих определителей и считать функции (1) и (2), определяющие связь между декартовыми и криволинейными координатами точки  $M$ , по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы.

2. Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла криволинейных координат. Рассмотрим уравнение

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = C_1,$$

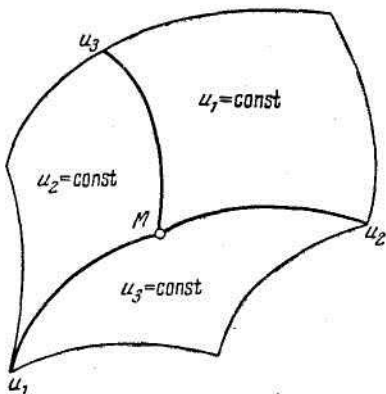
где  $C_1 = \text{const}$ . Как известно, такое уравнение в пространстве определяет поверхность. При различных значениях  $C_1$  получаем некоторое семейство поверхностей. Если точка  $M$  имеет первой

координатой  $u_1 = \alpha$ , то это значит, что она лежит на поверхности  $u_1(x_1, x_2, x_3) = \alpha$  этого семейства. Аналогично уравнения

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = C_2,$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = C_3$$

являются уравнениями двух других семейств поверхностей. Если точка  $M$  имеет координаты  $u_1, u_2, u_3$ , то это означает, что она лежит на определенных поверхностях этих трех семейств, т.е. является пересечением трех поверхностей, взятых по одной из каждого семейства (рис. 1).



Ри. 1.

Указанное выше отличие от нуля определителя является гарантией того, что три поверхности из разных семейств пересекаются в одной и только в одной точке.

Назовем поверхности указанных трех семейств *координатными поверхностями* и для сжатости будем называть их  $u_1$ -поверхностью,  $u_2$ -поверхностью,  $u_3$ -поверхностью.

Если рассмотреть попарное пересечение поверхностей разных семейств, то получим *координатные линии*. Через каждую точку  $M$  проходят три координатные линии. Вдоль координатной линии, которая является пересечением  $u_2$ -поверхности,  $u_3$ -поверхности, изменяется лишь координата  $u_1$ , а  $u_2$  и  $u_3$  остаются постоянными. Эту координатную линию будем называть *линией  $u_1$* . Аналогично определяются координатные линии  $u_2$  и  $u_3$ . Легко видеть, что координатные линии будут, вообще говоря, кривыми линиями. Отсюда и определяется название «криволинейные координаты».

Найдем векторы, которые касательные к координатным линиям криволинейной системы координат, которые проходят через некоторую точку  $M$ . Параметрические уравнения координатной линии  $u_1$ , которая проходит через точку  $M_0 (u_1^0)$ , записываются в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2^0, u_3^0).$$

Как известно из курса анализа, касательным вектором к этой линии в точке  $M_0$  будет вектор

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i$$

который мы обозначим через  $\mathbf{x}_1^0$ . Точно так же касательными к линиям  $u_2$  и  $u_3$ , которые проходят через точку  $M$ , будут векторы

$$\mathbf{x}_2^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{x}_3^0 = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} \right|_{M_0} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial u_3} \right|_{M_0} \mathbf{e}_i$$

Теперь легко видеть, что

$$(\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right|_{M_0}$$

и неравенство нулю определителя, который стоит в правой части этого соотношения, равносильно линейной независимости векторов

$$\mathbf{x}_1^0, \mathbf{x}_2^0, \mathbf{x}_3^0$$

3. Рассмотрим несколько примеров криволинейных систем координат.

а) **Прямоугольная декартова система координат.** Ее тоже можно рассматривать как частный случай криволинейной системы координат. Координатными поверхностями здесь служат плоскости, которые параллельны координатным плоскостям ( $x_1$ -поверхности— плоскости, параллельные плоскости  $Oe_2e_3$ , и т.д.). Координатными линиями служат прямые линии, которые параллельны осям координат (например, координатные линии  $x_1$ — прямые линии, параллельные  $e_1$ , и т.д.).

б) **Цилиндрическая система координат.** Пусть в пространстве дана прямоугольная декартова система координат  $\{e_1, e_2, e_3\}$  с началом в  $O$ . Рассмотрим тройку чисел  $u_1, u_2, u_3$ , где  $u_1 \geq 0, 0 \leq u_2 < 2\pi$ , и поставим в соответствие этой тройке чисел такую точку  $M$ , что ее аппликата равна  $u_3$ , а проекция на плоскость  $Oe_1e_2$  имеет полярные координаты  $u_1$  и  $u_2$  (рис. 2).

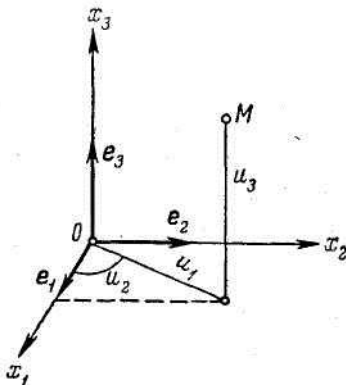


Рис. 2.

Очевидно, что при этом каждой тройке чисел  $u_1, u_2, u_3$  соответствует определенная точка  $M$  и, наоборот, каждой точке  $M$  соответствует определенная тройка чисел таких, что

$$u_1 \geq 0, \quad 0 \leq u_2 < 2\pi, \quad -\infty < u_3 < \infty$$

(лишь в случае, если точка  $M$  лежит на оси  $Oe_3$ , координаты  $u_1$  и  $u_3$  определяются однозначно, а координата  $u_2$  неопределена: ей можно приписать любое значение).

Введенные таким образом числа  $u_1, u_2, u_3$  называются *цилиндрическими координатами* точки  $M$ . (Обычно цилиндрические координаты обозначают буквами  $\rho, \varphi, z$ .) Легко видеть, что эти координаты связаны из прямоугольными декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  точки  $M$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 \cos u_2, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2, \\ x_3 &= u_3 \end{aligned} \right\}$$

(3)

и, наоборот,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\ \operatorname{tg} u_2 &= \frac{x_2}{x_1}, \\ u_3 &= x_3. \end{aligned} \right\}$$

Определитель

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$$

в этом случае будет вычисляться следующим образом:

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right| = \begin{vmatrix} \cos u_2 & -u_1 \sin u_2 & 0 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = u_1.$$

Отсюда ясно, что этот определитель отличен от нуля всюду, за исключением прямой  $u_1 = 0$ , которая совпадает с осью  $e_3$ . На этой прямой, как мы видели выше, нарушается взаимная однозначность соответствия между точками и их цилиндрическими координатами.

Координатными поверхностями в цилиндрической системе координат служат:  $u_1$ -поверхностями — круговые цилиндры с общей осью  $e_3$ ;  $u_2$ -поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью  $e_3$ ;  $u_3$ -поверхностями — плоскости, параллельные плоскости  $Oe_1e_2$ . Название «цилиндрическая система координат» именно и объясняется тем, что среди ее координатных поверхностей есть цилиндрические поверхности. Координатными линиями в цилиндрической системе координат служат: линиями  $u_1$  — лучи, которые выходят из произвольной точки оси  $e_3$  и параллельные плоскости  $e_1Oe_2$ ; линиями  $u_2$  — окружности с центром на оси  $e_3$ , которые расположены в плоскостях, перпендикулярных  $e_3$ ; линиями  $u_3$  — прямые, параллельные оси  $e_3$  (рис. 3).

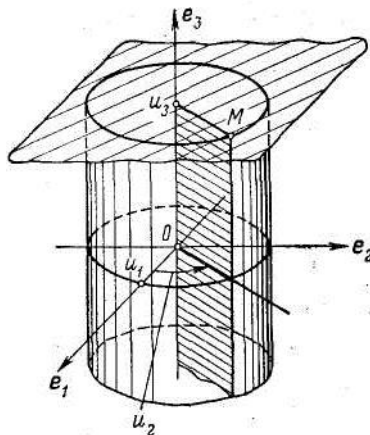


Рис. 3.

в) **Сферическая система координат.** Зададим три числа  $u_1, u_2, u_3$ , которые определяют положение точки  $M$  в пространстве, следующим образом:  $u_1$  — расстояние от начала координат  $O$  до точки  $M$ ,  $u_2$  — угол между вектором  $e_3$  и

радиусом-вектором точки  $M$ ,  $u_3$  — угол между положительным направлением оси  $e_1$  и проекцией радиуса-вектора точки  $M$  на плоскость  $Oe_1e_2$  (рис 4).

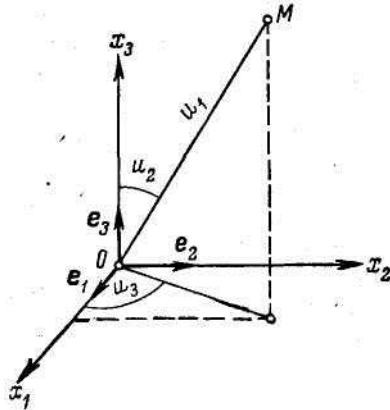


Рис. 4.

Эти три числа называются *сферическими координатами* точки  $M$ . (Обычно сферические координаты обозначают буквами

$r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ). Нетрудно видеть, что  $\frac{\pi}{2} - u_2$  и  $u_3$  — это

географические широта и долгота точки  $M$  на сфере с центром в точке  $M$  и радиусом  $OM$ .

Далее, очевидно, что каждой точке пространства соответствует определенная тройка чисел  $u_1, u_2, u_3$ , где  $u_1 \geq 0$ ,  $0 \leq u_2 \leq \pi$ ;  $0 \leq u_3 < 2\pi$ , и обратно, каждой такой тройке чисел соответствует определенная точка пространства (эта однозначность нарушается, как и в случае цилиндрической системы координат, лишь для точек оси  $e_3$ , для которых координата  $u_3$  неопределенна).

Легко установить связь между сферическими и прямоугольными декартовыми координатами точки:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= u_1 \sin u_2 \cos u_3, \\ x_2 &= u_1 \sin u_2 \sin u_3, \\ x_3 &= u_1 \cos u_2 \end{aligned} \right\}$$

(4)



и, обратно,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ u_2 &= \arccos \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \operatorname{tg} u_3 &= \frac{x_2}{x_1}. \end{aligned} \right\}$$

Определитель

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$$

в этом случае будет равен  $u^2 \sin u_2$ . Он обращается в нуль только на оси  $e_3$ , в точках которой нарушается взаимная однозначность соответствия между декартовыми и сферическими координатами.

Координатными поверхностями в сферической системе координат служат:  $u_1$ -поверхностями — сферы с центром в начале координат,  $u_2$ -поверхностями — полуплоскости, ограниченные осью  $e_3$ , и  $u_3$ -поверхностями — конические поверхности с образующими, которые составляют постоянный угол с осью  $e_3$ . Название «сферическая система координат» опять-таки объясняется тем, что среди координатных поверхностей имеются сферы.

Координатными линиями в сферической системе координат служат: линиями  $u_1$  — лучи, которые выходят из начала координат; линиями  $u_2$  — полуокружности с центром в начале координат, которые лежат в полуплоскостях, ограниченных осью  $e_3$ , и, наконец, линиями  $u_3$  — окружности с центром на оси  $e_3$ , которые расположены в плоскостях, перпендикулярных  $e_3$  (рис. 5).

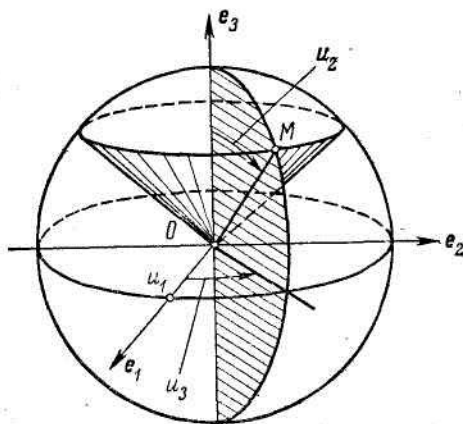


Рис.5.

Во всех рассмотренных примерах криволинейных систем координат координатные линии, которые проходят через произвольную точку пространства, ортогональны друг другу. Системы криволинейных координат, обладающие таким свойством, называются *ортогональными*. Векторы  $x_1, x_2, x_3$ , касательные к координатным линиям такой системы координат, будут попарно ортогональны в каждой точке пространства.

### 2.2.4. Подвижный репер ортогональной криволинейной системы координат и тензорные поля

1. Пусть дана некоторая область  $V$  евклидова пространства  $E_3$ , отнесенная к какой-нибудь ортогональной криволинейной системе координат  $u_1, u_2, u_3$ . Тогда через каждую точку  $M \in V$  проходят три попарно ортогональные координатные линии. Построим единичные векторы  $e_1, e_2, e_3$ , исходящие из точки  $M$ , касающиеся в  $M$  соответствующих координатных линий и направленные в сторону возрастания соответствующей координаты. Поскольку такое построение мы осуществляем в каждой точке  $M \in V$ , то в каждой точке области  $V$  возникает своя тройка единичных попарно ортогональных векторов  $e_1, e_2, e_3$ , что зависит только от точки  $M$ :

$$e_i = e_i(M) \quad (i=1, 2, 3),$$

или

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(u_1, u_2, u_3).$$

Такую тройку единичных попарно ортогональных векторов назовем *подвижным репером*, а сами эти векторы — *ортами* подвижного репера.

Если векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  образуют в каждой точке правую тройку, то говорят, что задано *правую криволинейную систему координат*. Так, например, прямоугольная декартова система координат  $Ox_1x_2x_3$  (при обычном расположении осей, принятом в аналитической геометрии) будет правой. Правыми будут также цилиндрическая и сферическая системы координат (но именно при том порядке координат, в котором они введены в примерах б), в) п. 2.2.3).

Заметим, что в прямоугольной декартовой системе координат направления векторов  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  не зависят от точки, в которой они построены; можно сказать, что все положения подвижного репера получаются из какого-то одного его положения с помощью параллельного переноса.

Что касается действительно *криволинейных* систем координат (например, цилиндрической и сферической), то там векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ , которые построены в различных точках, уже совсем не обязательно параллельны друг другу; так, например, в цилиндрической системе координат векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , которые построены в различных точках, имеют различные направления.

2. Рассмотрим теперь радиус-вектор точки  $M$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, u_3).$$

Когда  $u_2$  и  $u_3$  постоянны, а изменяется лишь  $u_1$ , годографом этого радиуса-вектора служит координатная линия  $u_1$ , а потому

вектор  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1}$  направлен по касательной к координатной линии  $u_1$

и, следовательно,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1,$$

где

$$h_1 = |x_1|.$$

Аналогично

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3,$$

где

$$h_2 = |x_2|, \quad h_3 = |x_3|.$$

Обозначим теперь через  $e^0_i$  неподвижный базис евклидова пространства. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_k e^0_k, \\ x_i &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \frac{\partial x_k}{\partial u_i} e^0_k. \end{aligned}$$

Так как

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \right)^2,$$

то

$$h_i^2 = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial u_i} \right)^2.$$

Таким образом,

$$h_i = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right)^2} \quad (i=1, 2, 3).$$

(1)

Величины  $h_1, h_2, h_3$  называются *коэффициентами Ламе*. Формулы (1) дают выражение этих коэффициентов через частные производные от прямоугольных декартовых координат по криволинейным.

Рассмотрим теперь дифференциал радиуса-вектора  $\mathbf{x} = \overline{OM}$  точки  $M$ :

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{M} = x_i du_i.$$

Если внести сюда выражения для векторов  $x_i$  через базисные векторы  $e_i$  подвижного репера, присоединенного к точке  $M$ , то получим

$$d\mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 h_i du_i e_i.$$

(В этой формуле мы подставили знак суммы, так как в ней индекс повторяется три, а не два раза, как обычно.) Положим в этом соотношении

$$\omega_1 = h_1 du_1, \quad \omega_2 = h_2 du_2, \quad \omega_3 = h_3 du_3. \tag{2}$$

Тогда

$$d\mathbf{M} = \omega_i e_i. \tag{3}$$

Величины  $\omega_i$  линейно зависят от дифференциалов  $du_i$  криволинейных координат. Поэтому их называют *линейными*

*дифференциальными формами.* Формы  $\omega_i$  являются коэффициентами разложения дифференциала  $dM$  по векторам  $e_i$  подвижного репера, присоединенного к точке  $M$ .

Дифференциальные формы  $\omega_i$  являются линейно независимыми формами, так как уравнения (2) могут быть однозначно разрешены относительно независимых дифференциалов  $du_i$  криволинейных координат.

Из соотношения (3) можно получить выражение для квадрата элемента длины в криволинейной ортогональной системе координат. В самом деле,

$$ds^2 = dM^2 = \omega_i \omega_j e_i e_j.$$

Но  $e_i e_j = \delta_{ij}$ . Поэтому предыдущее соотношение переписывается в виде

$$ds^2 = \omega_u \omega_u,$$

или, подробнее,

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \tag{4}$$

Подставляя сюда выражение (10.143) для формы  $\omega_i$ , получим другое выражение для квадрата элемента длины:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2. \tag{4'}$$

Далее, поскольку каждый из дифференциалов  $de_i$  векторов подвижного репера ( $i=1, 2, 3$ ) сам является вектором, его можно разложить по векторам  $e_j$ ; обозначая коэффициенты этого разложения через  $\omega_{ij}$ , будем иметь

$$de_i = \omega_{ij} e_j \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Найдем, как выразятся коэффициенты  $\omega_{ij}$  через дифференциалы криволинейных координат. Если обе части формулы (5) скалярно умножить на вектор  $e_k$ , то получим

$$e_k de_i = e_k \omega_{ij} e_j = \omega_{ij} \delta_{jk} = \omega_{ik},$$

или

$$\omega_{ij} = e_i de_j.$$

Но

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial u_k} du_k.$$

Поэтому

$$\omega_{ij} = e_i \frac{\partial e_j}{\partial u_k} du_k.$$

Следовательно, коэффициенты  $\omega_{ij}$  являются линейными дифференциальными формами от дифференциалов  $du_k$  криволинейных координат. Если, пользуясь соотношениями (2), подставить в предыдущие формулы вместо дифференциалов  $du_k$  независимые формы  $\omega_k$ , то получим

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_k} e_j \frac{\partial e_i}{\partial u_k} \omega_k.$$

Последние формулы можно переписать в виде

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijk} \omega_k, \tag{6}$$

где через  $\Gamma_{ijk}$  обозначенные коэффициенты

$$\Gamma_{ija} = \frac{1}{h_a} e_j \frac{\partial e_i}{\partial u_a}. \tag{7}$$

Здесь в правой части стоит выражение, в котором по повторяющемуся индексу  $a$  суммирование не производится. Поэтому его обозначили греческой буквой. И в дальнейшем по повторяющемуся греческому индексу суммирование не будет. Для латинских же индексов остаются в силе все прежние правила о суммировании. Величины  $\Gamma_{ijk}$  будем называть *символами Кристоффеля*.

Уравнения (3) и (5) называют *уравнениями инфинитезимального перемещения подвижного репера*, связанного с ортогональной криволинейной системой координат. Дифференциальные формы  $\omega_k$  и  $\omega_{ij}$  называют *компонентами инфинитезимального перемещения* этого подвижного репера.

Как уже указывалось, дифференциальные формы  $\omega_k$  являются линейно независимыми. Что касается форм  $\omega_{ij}$ , то они удовлетворяют целому ряду соотношений. Эти соотношения мы получим, дифференцируя равенства

$$e_i e_j = \delta_{ij}$$

выполняющиеся для базисных векторов ортонормированного репера:

$$e_i de_j + e_j de_i = 0.$$

Подставляя сюда разложение векторов  $de_j$  и  $de_i$  из формулы (5), найдем искомые соотношения:

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0.$$

Из (8) вытекает, что символы Кристоффеля  $\Gamma_{ijk}$  также удовлетворяют целому ряду соотношений. В самом деле, соотношения (8) могут быть переписаны в виде

$$\Gamma_{ijk} \omega_k + \Gamma_{jik} \omega_k = 0,$$

откуда, в силу линейной независимости форм  $\omega_k$ , следует, что

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = 0, \tag{9}$$

т.е. величины  $\Gamma_{ijk}$  кососимметричны по первым двум индексам. В частности,

$$\Gamma_{aak} = 0.$$

Установим еще некоторые соотношения между символами Кристоффеля. Имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{aj\beta} &= \frac{1}{h_\beta} e_j \frac{\partial e_\alpha}{\partial u_\beta} = \frac{1}{h_\beta} e_j \frac{\partial}{\partial u_\beta} \left( \frac{x_\alpha}{h_\alpha} \right) = \frac{1}{h_\beta} e_j \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_\beta} - \frac{x_\alpha}{h_\alpha^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j \frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} - \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j e_\alpha \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta}. \end{aligned}$$

В этом соотношении следует считать  $j \neq \alpha$ , так как  $\Gamma_{aak} = 0$ . Поэтому векторы  $e_j$  и  $e_\alpha$  ортогональны и второе слагаемое правой части этого соотношения обращается в нуль. Следовательно, при  $j \neq \alpha$

$$\Gamma_{aj\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_j \frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_\beta \partial u_\alpha} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_\alpha \partial u_\beta},$$

то при  $j \neq \beta$  эти выражения будут симметричными относительно индексов  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\Gamma_{aj\beta} = \Gamma_{\beta ja} \text{ при } j \neq \beta, \quad j \neq \alpha. \tag{10}$$

Пусть теперь  $j = \beta$ . Тогда

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \frac{\partial}{\partial u_\alpha} (h_\beta e_\beta) = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} e_\beta \left( e_\beta \frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} + h_\beta \frac{\partial e_\beta}{\partial u_\alpha} \right).$$

Но  $e_\beta^2 = 1$ , а

$$e_\beta \frac{\partial e_\beta}{\partial u_\alpha} = 0.$$

Поэтому

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \ln h_\beta}{\partial u_\alpha}.$$

Соотношение (10) означают, что *символы Кристоффеля*  $\Gamma_{ijk}$  при  $j \neq i, j \neq k$  *симметричны по крайним индексам*. Это свойство вместе со свойством (9) кососимметричности по первым двум индексам дает для величин  $\Gamma_{ijk}$  с разными индексами  $i, j, k$  соотношение

$$\Gamma_{ijk} = -\Gamma_{jik} = -\Gamma_{kij} = \Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki} = -\Gamma_{kji} = -\Gamma_{ijk},$$

которое означает, что величины  $\Gamma_{ijk}$  с разными индексами равны 0:

$$\Gamma_{ijk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k.$$

Таким образом, в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин  $\Gamma_{ijk}$  ненулевыми могут быть не более 12:

$$\Gamma_{\alpha\alpha\alpha} = -\Gamma_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \ln h_\alpha}{\partial u_\beta}. \tag{11}$$

3. Найдем для рассмотренных в п. 2.2.3 декартовых, цилиндрических и сферических координат коэффициенты Ламе  $h_i$ , величины  $\omega_i, \omega_{ij}, \Gamma_{ijk}$  и  $ds^2$  — квадрат длины вектора  $d\mathbf{M}$ .

а) В случае прямоугольных декартовых координат векторы  $\mathbf{e}_i = \text{const}$ , поэтому  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial u_j} = 0$ , и, следовательно, в силу

формул (7) все величины  $\Gamma_{ijk} = 0$ .

Обратно, если в какой-нибудь системе координат все  $\Gamma_{ijk} = 0$ , то  $\omega_{ij} = 0, d\mathbf{e}_i = 0, \mathbf{e}_i = \text{const}$  и рассматриваемая система координат будет прямоугольной декартовой.

Что касается коэффициентов Ламе, то формулы (1) показывают, что все они равны 1:

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

так как  $u_i = x_i$  и поэтому по формулам (4')

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$$

Наконец, формулы (2) показывают, что  $\omega_i = du_i$ .

б) В случае цилиндрической системы координат в силу формул (3) п.2.2.4 и формул (1) получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$h_1^2 = \cos^2 u_2 + \sin^2 u_2 = 1,$$

$$h_2^2 = u_1^2 \sin^2 u_2 + u_1^2 \cos^2 u_2 = u_1^2,$$

$$h_3^2 = 1,$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = 1,$$

и по формулам (4')



$$ds^2 = du^2_1 + u^2_1 du^2_2 + du^2_3.$$

Что касается величин  $\Gamma_{ijk}$ , то те из них, которые могут быть отличными от нуля, в силу формул (11) в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{133} = \Gamma_{313} = 0, \quad \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = 0, \\ \Gamma_{233} = \Gamma_{323} = 0, \quad \Gamma_{311} = \Gamma_{131} = 0, \quad \Gamma_{322} = \Gamma_{232} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (2) и (6)

$$\begin{aligned} \omega_1 = du_1, \quad \omega_2 = u_1 du_2, \quad \omega_3 = du_3, \\ \omega_{12} = -\omega_{21} = \Gamma_{122} du_2 = \frac{du_2}{u_1}, \quad \omega_{13} = 0, \\ \omega_{23} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{32} = 0. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} de_3 &= 0, \\ de_1 &= \frac{du_2}{u_1} e_2, \\ de_2 &= -\frac{du_2}{u_1} e_1, \end{aligned}$$

т.е. что при перемещении репера вектор  $e_3$  не меняется, а векторы  $e_1$  и  $e_2$  меняются (это вытекает также из геометрического смысла цилиндрических координат).

в) Для сферической системы координат в силу формул (4) п.2.2.3 и формул (1) получаем следующие выражения для коэффициентов Ламе:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 + \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + \cos^2 u_2 = 1, \\ h_2^2 &= u_1^2 \cos^2 u_2 \cos^2 u_3 + u_1^2 \cos^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 = u_1^2, \\ h_3^2 &= u_1^2 \sin^2 u_2 \sin^2 u_3 + u_1^2 \sin^2 u_2 \cos^2 u_3 = u_1^2 \sin^2 u_2, \end{aligned}$$

откуда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = u_1 \sin u_2,$$

и по формулам (4')

$$ds^2 = du^2_1 + u^2_1 du^2_2 + u^2_1 \sin^2 u_2 du^2_3.$$

Те из величин  $\Gamma_{ijk}$ , которые в ортогональных криволинейных координатах могут быть отличными от нуля, в сферической системе координат в силу (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{122} = -\Gamma_{212} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{133} = -\Gamma_{313} = \frac{1}{u_1}, \quad \Gamma_{211} = \Gamma_{121} = 0, \\ \Gamma_{233} = -\Gamma_{323} = \text{ctg } u_2, \quad \Gamma_{311} = \Gamma_{131} = 0, \quad \Gamma_{322} = \Gamma_{232} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда в силу формул (2) и (6) имеем следующие выражения для форм  $\omega_i$  и  $\omega_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= du_1, & \omega_2 &= u_1 du_2, & \omega_3 &= u_1 \sin u_2 du_3, \\ \omega_{12} &= -\omega_{21} = \frac{1}{u_1} du_2, & \omega_{13} &= -\omega_{31} = \frac{1}{u_1} du_3, \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} = \operatorname{ctg} u_2 du_3. \end{aligned}$$

Теперь все  $de_i \neq 0$ , т.е. при переходе из точки  $M$  в бесконечно близкую точку все векторы подвижного репера поворачиваются (этот факт также легко усматривается из геометрического смысла сферических координат).

4. Чтобы рассмотреть тензоры в ортогональных криволинейных координатах, выясним, что происходит с подвижным репером, когда ортогональные криволинейные координаты подвергаются преобразованию

$$u_{i'} = u_{i'}(u_1, u_2, u_3) \quad (i'=1, 2, 3), \tag{12}$$

где  $u_{1'}$ ,  $u_{2'}$ ,  $u_{3'}$  — новые ортогональные криволинейные координаты. Формулы (12) предполагаются обратными, а функции  $u_{i'}(u_1, u_2, u_3)$  — дважды непрерывно дифференцируемыми.

Для новых ортогональных криволинейных координат  $u_{i'}$  в каждой точке  $M$  возникает свой подвижной репер  $\{e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}\}$ , векторы которого можно выразить через векторы  $e_1, e_2, e_3$  подвижного репера, соответствующего старой ортогональной криволинейной системе координат, по формулам

$$e_{i'}(M) = \gamma_{i'i}(M)e_i(M). \tag{13}$$

Коэффициенты  $\gamma_{i'i}(M)$  образуют ортогональную матрицу, элементы которой зависят от точки  $M$ . (Можно сказать, что в каждой точке закон преобразования подвижного репера задается своей ортогональной матрицей.) Коэффициенты  $\gamma_{i'i}(M)$  могут

быть выражены через частные производные  $\frac{\partial u_{i'}}{\partial u_i}$  и

коэффициенты Ламе  $h_i$  и  $h_{i'}$  старой и новой систем криволинейных координат.

Пусть теперь в некоторой ортогональной криволинейной системе координаты даны тензорное поле, например, поле тензора третьей валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M).$$

Координаты этого тензора будем вычислять в каждой точке относительно того локального подвижного репера, который присоединен к этой точке.

Если ортогональные криволинейные координаты переходят в другие такие же координаты по формулам (12), то векторы подвижного репера в точке  $M$  преобразуются по формулам (13), а тензор  $a_{ijk}$  подвергается преобразованию по обычному тензорному закону:

$$a_{i'j'k'}(M) = \gamma_{i'i}(M) \gamma_{j'j}(M) \gamma_{k'k}(M) a_{ijk}(M),$$

где все компоненты тензора и все элементы матрицы преобразования берутся в одной и той же точке.

Поскольку, как было отмечено в п. 2.2.1, в случае тензорного поля все алгебраические операции над тензором поля производятся по отдельности в каждой точке, то все такие операции автоматически переносятся и на случай тензорного поля в ортогональных криволинейных координатах: их следует производить в каждой точке  $M$  относительно локального репера, который в данной системе координат присоединен к этой точке.

5. Выясним теперь, как при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуются величины  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\Gamma_{ijk}$ .

Поскольку из формулы (2) следует, что  $\omega_i$  — координаты вектора  $dM$  относительно базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то совокупность величин  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  образует тензорное поле первой валентности и потому при переходе от одной ортогональной криволинейной системы координат к другой преобразуется по формулам

$$\omega_{i'} = \gamma_{i'i} \omega_i. \tag{14}$$

Далее, дифференцируя равенства (13) и пользуясь при этом соотношениями (5) и аналогичными соотношениями для  $e_{i'}$ ,

$$de_{i'} = \omega_{i'j'} e_{j'},$$

получим

$$\omega_{i'j'} e_{j'} = d\gamma_{i'i} e_i + \gamma_{i'i} \omega_{ij} e_j$$

или, используя (13) и изменяя индекс суммирования  $i$  на  $j$  в первом слагаемом правой части, будем иметь

$$\omega_{i'j'} \gamma_{j'j} e_j = (d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i} \omega_{ij}) e_j$$

откуда в силу линейной независимости векторов  $e_j$

$$\omega_{i'j'} \gamma_{j'j} = d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i} \omega_{ij}$$

Умножим обе части этого равенства на  $\gamma_{k'j}$  и просуммируем по  $j$ . Тогда

$$\omega_{i'j} \gamma_{j'j} \gamma_{k'j} = \gamma_{k'j} d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i} \gamma_{k'j} \omega_{ij}$$

или, используя, что  $\gamma_{j'j} \gamma_{k'j} = \delta_{j'k'}$ , окончательно получим

$$\omega_{i'k'} = \gamma_{k'j} d\gamma_{i'j} + \gamma_{i'i} \gamma_{k'j} \omega_{ij} \tag{15}$$

Отсюда видно, что величины  $\omega_{jk}$  преобразуются не по тензорному закону (имеются дополнительные члены  $\gamma_{k'j} d\gamma_{i'j}$  которые, вообще говоря, не равны нулю, так как величины  $\gamma_{i'j}$  меняются от точки к точке).

Отметим, что если воспользоваться равенствами (2), то дифференциалы  $d\gamma_{i'j}$  можно представить в виде

$$d\gamma_{i'j} = \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

или, если принять обозначение

$$\frac{\partial \gamma_{i'j}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \gamma_{i'j\alpha}$$

в виде

$$d\gamma_{i'j} = \gamma_{i'jl} \omega_l \tag{16}$$

Из (15), используя равенства (6) и (16), будем иметь

$$\Gamma_{i'k'l} \omega_l = \gamma_{k'j} \gamma_{i'jl} \omega_l + \gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \Gamma_{ikl} \omega_l$$

Выражая формы  $\omega_l$  через  $\omega_{l'}$  по формулам

$$\omega_l = \gamma_{ll'} \omega_{l'}$$

обратным формулам (14), и учитывая то, что  $\gamma_{ll'} = \gamma_{l'l}$  и что формы  $\omega_{l'}$  линейно независимы, окончательно получаем

$$\Gamma_{i'k'l} = \gamma_{k'j} \gamma_{l'l} \gamma_{i'jl} + \gamma_{i'i} \gamma_{k'k} \gamma_{l'l} \Gamma_{ikl} \tag{17}$$

Отсюда следует, что величины  $\Gamma_{ikl}$  тоже не образуют тензору.

То, что величины  $\omega_{ij}$  и  $\Gamma_{ijk}$  не образуют тензоров, можно подтвердить еще и следующими геометрическими соображениями. Ранее было показано, что эти величины в прямоугольной декартовой системе координат тождественно равны нулю, а в цилиндрической и сферической системах координат среди них есть отличные от нуля. Но для тензоров

такого положения быть не может: если все координаты тензора равны нулю в одной системе координат, то то же самое будет, в силу линейного однородного закона преобразования тензора, и в любой другой допустимой системе координат.

## 2.2.5. Дифференцирование тензорного поля в криволинейных координатах

1. Перейдем теперь к рассмотрению операции дифференцирования тензорного поля в криволинейных координатах.

Займемся сначала вопросом о дифференцировании скалярного поля. Пусть в некоторой ортогональной криволинейной системе координат  $(u_1, u_2, u_3)$ , определенной в некоторой области  $V$  пространства  $E_3$ , задано скалярное поле  $\varphi$ :

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3).$$

Дифференциал его определяется равенством.

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} du_i = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

(здесь мы воспользовались формулами (2) п.2.2.4. Далее, обозначая коэффициент при  $\omega_\alpha$  через  $\varphi_{,\alpha}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} = \varphi_{,\alpha}$$

(1)

будем иметь

$$d\varphi = \varphi_{,i} \omega_i$$

(2)

Совокупность величин  $\varphi_{,1}$ ,  $\varphi_{,2}$ ,  $\varphi_{,3}$  назовем *ковариантной (абсолютной) производной скалярного поля*.

Поскольку  $d\varphi$ , как и  $\varphi$ , образуют некоторое скалярное поле, а  $\omega_i$  — тензорное поле первой валентности, то коэффициенты  $\varphi_{,i}$  в равенстве (2) также образуют тензорное поле первой валентности. Вектор с координатами  $\varphi_{,i}$  является инвариантным вектором, который не зависит от выбора системы координат в рассматриваемой области  $V$  пространства  $E_3$ . Докажем, что этот вектор является градиентом скалярного поля  $\varphi$ , т.е.

$$\text{grad } \varphi = \varphi_{,i} e_i$$

(3)

В самом деле, если мы перейдем к декартовой прямоугольной системе координат, то получим

$$h_i = 1, \quad \varphi_{,i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

и

$$\varphi_{,i} e_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i = \text{grad } \varphi$$

согласно определению градиента скалярного поля. Но последнее равенство не зависит от выбора системы координат в области  $V$ . Поэтому оно остается верным для любой криволинейной системы координат.

Найдем еще выражение градиента скалярного поля в цилиндрической и сферической системах координат.

а) В *цилиндрической* системе координат мы имели

$$h_2 = 1, \quad h_1 = u_1, \quad h_3 = 1,$$

поэтому по формуле (1), получаем

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_3},$$

откуда в силу формулы (3)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} e_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} e_3.$$

б) В *сферической* системе координат коэффициенты Ламе определялись формулами

$$h_1 = 1, \quad h_2 = u_1, \quad h_3 = u_1 \sin u_2;$$

отсюда в силу формулы (1)

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad \varphi_{,2} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \quad \varphi_{,3} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$$

и по формуле (3)

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} e_1 + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} e_2 + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} e_3.$$

2. Перейдем теперь к дифференцированию векторного поля. Пусть дано векторное поле

$$a(M) = a_i(M) e_i(M).$$

Найдем его дифференциал. Пользуясь формулами (5) п.2.2.4, получим (для простоты записи в дальнейшем будем вместо  $a_i(M)$ ,  $da_i(M)$  и т.д. писать просто  $a_i$ ,  $da_i$  и т.д., подразумевая, что все вычисления производятся в точке  $M$ ).

$$da = da_i e_i + a_i de_i = da_i e_i + a_i \omega_{ij} e_j$$

или, меняя индекс суммирования  $i$  в первом слагаемом на  $j$  и пользуясь кососимметричностью форм  $\omega_{ij}$ , будем иметь

$$da = (da_j - a_i \omega_{ji}) e_j.$$

Полагая

$$Da_j = da_j - a_i \omega_{ji}, \quad (4)$$

найдем

$$da = Da_j e_j. \quad (5)$$

Так как  $da$  — вектор, то из равенства (5) следует, что  $Da_j$  — координаты тензора первой валентности. Этот тензор называется *абсолютным дифференциалом тензора  $a_j$* .

Отметим, что обычные дифференциалы  $da_i$  координат векторного поля в криволинейной системе координат уже не образуют тензора первой валентности. Так как в **прямоугольной декартовой системе координат (и только в такой системе координат)**  $\omega_{ij} = 0$ , то в ней и только в ней **абсолютные дифференциалы координат вектора совпадают с его обычными дифференциалами**. Заметим еще, что для того, чтобы векторное поле  $a(M)$ , которое задано в криволинейной системе координат, было однородным полем (т.е. чтобы все векторы поля были равны между собой), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$Da_i = 0.$$

Далее, если воспользоваться тем, что

$$da_j = \frac{\partial a_j}{\partial u_k} du_k = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha$$

и

$$\omega_{ji} = \Gamma_{jik} \omega_k,$$

то формулу (4) можно записать в виде

$$Da_j = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{jia} \right) \omega_\alpha.$$

Обозначив выражение в скобках через  $a_{j, \alpha}$ :

$$a_{j, \alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_j}{\partial u_\alpha} - a_i \Gamma_{jia} \quad (6)$$

получим

$$Da_j = a_{j, k} \omega_k.$$

(7)

Поскольку  $Da_j$  — тензорное поле первой валентности и  $\omega_k$  — координаты произвольного вектора  $dM$ , то на основании обратного тензорного признака можно утверждать, что величины  $a_{j,k}$  образуют тензорное поле второй валентности. Это поле называется *абсолютной производной векторного поля*  $a_j$ . Легко видеть, что абсолютная производная тензорного поля совпадает с его обычной производной тогда и только тогда, когда криволинейная система координат становится декартовой прямоугольной.

Таким образом, мы ввели **понятие абсолютного дифференциала и абсолютной производной векторного поля**. Они вычисляются по формулам (4) и (6) и представляют собой тензорные поля соответственно первой и второй валентности.

Если абсолютную производную  $a_{j,k}$  векторного поля  $a_j$  свернуть по индексам  $j$  и  $k$ , то получим инвариант, который совпадает с *дивергенцией векторного поля*  $\mathbf{a}(M)$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = a_{j,j} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}. \quad (8)$$

В самом деле, инвариант  $a_{j,j}$  не зависит от выбора системы координат, но в прямоугольной декартовой системе координат

$$a_{j,j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Используя формулу (11) п.2.2.4, приведем выражение для дивергенции к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + a_i \Gamma_{i11} + a_i \Gamma_{i22} + a_i \Gamma_{i33} = \\ &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_2}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{a_3}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} + \\ &\quad + \frac{a_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{a_3}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{a_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \end{aligned}$$

или, собирая члены с  $a_i$ , к виду

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (a_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} + \frac{\partial (a_2 h_3 h_1)}{\partial u_2} + \frac{\partial (a_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \right\}. \quad (8')$$

Если же абсолютную производную  $a_{j,k}$  свернуть с дискриминантным тензором —  $\varepsilon_{ijk}$ , то получим ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = - \varepsilon_{ijk} a_{j,k} \mathbf{e}_i.$$

В самом деле, так как в прямоугольной декартовой системе координат



$$a_{j, k} = \frac{\partial a_j}{\partial u_k},$$

то эта формула совпадает с формулой (9) п.2.2.1 и в правой системе координат может быть записана в виде

$$\text{rot } \mathbf{a} = (a_{3,2} - a_{2,3}) \mathbf{e}_1 + (a_{1,3} - a_{3,1}) \mathbf{e}_2 + (a_{2,1} - a_{1,2}) \mathbf{e}_3. \quad (9)$$

С помощью соотношений (11) п.2.2.4 формула для проекции ротора на ось  $\mathbf{e}_1$  преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Пр}_{\mathbf{e}_1} \text{rot } \mathbf{a} &= a_{3,2} - a_{2,3} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} + a_1 \Gamma_{132} - a_1 \Gamma_{123} = \\ &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} - \frac{a_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} + \frac{a_2}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} = \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_3} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично можно преобразовать формулы для проекций ротора на оси  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ . Окончательно формула для вычисления ротора в криволинейных ортогональных координатах принимает вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial (a_3 h_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial (a_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial (a_1 h_1)}{\partial u_2} \right\} \mathbf{e}_3. \quad (9') \end{aligned}$$

Найдем еще выражение оператора Лапласа в общей ортогональной криволинейной системе координат. Так как

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi,$$

то, пользуясь формулами (1), (3), (8'), получим

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} \right) \right\} \quad (10)$$

Запишем теперь абсолютную производную, дивергенцию и ротор векторного поля, а также оператор Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат, которые при выбранном нами порядке координат все были правыми.

а) В цилиндрической системе координат по формуле (6) получим

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, & a_{1,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, & a_{1,3} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_3}, \\ a_{2,1} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, & a_{2,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{a_1}{u_1}, & a_{2,3} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_3}, \\ a_{3,1} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, & a_{3,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2}, & a_{3,3} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_3}. \end{aligned}$$

Поэтому из (8) имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} = \frac{\partial a_1}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_1}{u_1}$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1} \frac{\partial (u_1 a_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{\partial a_3}{\partial u_3}$$

(последний результат можно получить также непосредственно из формулы (8')).

По формуле (9') получаем следующее выражение ротора в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \left( \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial a_3}{\partial u_1} \right) \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{u_1} \left( \frac{\partial (u_1 a_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right) \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

и, наконец, пользуясь (10), найдем выражение для оператора Лапласа:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_3^2}.$$

б) В сферической системе координат получим

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{\partial a_1}{\partial u_1}, & a_{1,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_1}{\partial u_2} - \frac{a_2}{u_1}, & a_{1,3} &= \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{a_3}{u_1}, \\ a_{2,1} &= \frac{\partial a_2}{\partial u_1}, & a_{2,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_2}{\partial u_2} + \frac{a_1}{u_1}, & a_{2,3} &= \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_2}{\partial u_3} - \\ & & & & & - \operatorname{ctg} u_2 \cdot a_3, \\ a_{3,1} &= \frac{\partial a_3}{\partial u_1}, & a_{3,2} &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial a_3}{\partial u_2}, & a_{3,3} &= \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_3} + \frac{a_1}{u_1}. \end{aligned}$$

Далее по формулам (8') и (9') имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_1 u_1^2 \sin u_2)}{\partial u_1} + \frac{\partial (a_2 u_1 \sin u_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (a_3 u_1)}{\partial u_3} \right\},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_3 u_1 \sin u_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial (a_2 u_1)}{\partial u_3} \right\} \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{u_1 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial (a_3 u_1 \sin u_2)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{\partial (a_2 u_1)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right\} \mathbf{e}_3$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial (u_1^2 a_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial (a_2 \sin u_2)}{\partial u_2} + \frac{1}{u_1 \sin u_2} \frac{\partial a_3}{\partial u_3},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{u_1 \sin u_2} \left\{ \frac{\partial (a_3 \sin u_2)}{\partial u_2} - \frac{\partial a_2}{\partial u_3} \right\} \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{1}{\sin u_2} \frac{\partial a_1}{\partial u_3} - \frac{\partial (u_1 a_3)}{\partial u_1} \right\} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{u_1} \left\{ \frac{\partial (u_1 a_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial a_1}{\partial u_2} \right\} \mathbf{e}_3.$$

Наконец, по формуле (10) найдем следующее выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial}{\partial u_1} \left( u_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{u_1^2 \sin u_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \sin u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) + \frac{1}{u_1^2 \sin^2 u_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_3^2}.$$

3. Рассмотрим далее операцию абсолютного дифференцирования поля тензора второй валентности, которое задано в некоторой криволинейной ортогональной системе координат  $u_1, u_2, u_3$ :

$$a_{ij} = a_{ij}(u_1, u_2, u_3).$$

В каждой точке компоненты  $a_{ij}$  этого тензора можно рассматривать как коэффициенты билинейной формы

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij} x_i y_j$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  - произвольные векторные поля, имеющие относительно подвижного репер, присоединенного к криволинейной системе координат, соответственно координаты  $x_i$  и  $y_j$  ( $i, j=1, 2, 3$ ).

Пользуясь формулами (4) для абсолютного дифференциала векторного поля, находим дифференциал формы  $\varphi$ :

$$d\varphi = da_{ij} x_i y_j + a_{ij} dx_i y_j + a_{ij} x_i dy_j =$$

$$= da_{ij} x_i y_j + a_{ij} (Dx_i - x_k \omega_{ki}) y_j + a_{ij} x_i (Dy_j - y_k \omega_{kj}) =$$

$$= (da_{ij} - a_{kj} \omega_{ik} - a_{ik} \omega_{jk}) x_i y_j + a_{ij} Dx_i y_j + a_{ij} x_i Dy_j$$

(в последнем переходе мы дважды меняли индексы суммирования: в одном слагаемом  $i$  на  $k$  и обратно, в другом  $-j$  на  $k$  и обратно).

Второе и третье слагаемые здесь показывают, как меняется билинейная форма  $\varphi$  в зависимости от изменения векторов полей  $x$  и  $y$  при переходе из точки  $M$  в бесконечно близкую точку. Первое из слагаемых отражает изменение этой формы за счет приращения коэффициентов  $a_{ij}$ . Поскольку  $d\varphi$  — инвариант,  $a_{ij}Dx_i y_j$  и  $a_{ij}x_i Dy_j$  — тоже инварианты, как результаты свертывания тензора  $a_{ij}$  соответственно с векторами  $Dx_i y_j$  и  $x_i Dy_j$ , то первое слагаемое также представляет собой инвариант — некоторую билинейную форму относительно векторов  $x$  и  $y$ . Коэффициенты этой последней билинейной формы образуют тензор второй валентности, называемый *абсолютным дифференциалом тензора*  $a_{ij}$  и обозначаемый

$$Da_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\omega_{ik} - a_{ik}\omega_{jk}. \tag{11}$$

Далее, если воспользоваться формулами

$$da_{ij} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_l} du_l = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} \omega_\alpha,$$

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ijl} \omega_l,$$

то соотношение (11) можно записать в виде

$$Da_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha} \frac{1}{h_\alpha} - a_{kj} \Gamma_{ik\alpha} - a_{ik} \Gamma_{jk\alpha} \right) \omega_\alpha.$$

Обозначив выражение, которое стоит в скобках, через  $a_{ij,\alpha}$ :

$$a_{ij,\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_\alpha} - a_{kj} \Gamma_{ik\alpha} - a_{ik} \Gamma_{jk\alpha} \tag{12}$$

получим

$$Da_{ij} = a_{ij,l} \omega_l. \tag{13}$$

Отсюда ясно, что величины  $a_{ij,l}$  образуют тензорное поле валентности три, называемое *абсолютной производной тензорного поля*  $a_{ij}$ .

Таким образом, абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля второй валентности образуют тензорные поля соответственно второй и третьей валентности и вычисляются по формулам (11) и (13).

Совершенно аналогично тому, как введены абсолютный дифференциал и абсолютная производная тензорного поля

второй валентности, можно ввести абсолютный дифференциал и абсолютную производную тензорного поля валентности  $p$  ( $p > 2$ ) (для этого придется использовать уже не билинейные, а полилинейные формы). Аналогично окажется, что абсолютный дифференциал такого поля образует тензор той же валентности, а абсолютная производная - тензор на единицу большей валентности.

Формулы для их вычисления будут иметь вид, аналогичный формулам (4), (11) и (6), (12). Например, для тензора четвертой валентности  $a_{ijkl}$  абсолютный дифференциал и абсолютная производная находятся по формулам

$$\left. \begin{aligned} Da_{ijkl} &= da_{ijkl} - a_{m jkl} \omega_{im} - a_{imkl} \omega_{jm} - \\ &\quad - a_{ijm l} \omega_{km} - a_{ijk m} \omega_{lnv} \\ a_{ijkl, \alpha} &= \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial a_{ijkl}}{\partial u_{\alpha}} - a_{m jkl} \Gamma_{im\alpha} - a_{imkl} \Gamma_{jma} - \\ &\quad - a_{ijm l} \Gamma_{kma} - a_{ijk m} \Gamma_{lma} \end{aligned} \right\} (14)$$

4. Установим теперь правила абсолютного дифференцирования, т.е. определим, как находятся абсолютные дифференциалы и абсолютные производные от суммы тензоров, от произведения тензоров, от свернутого тензора и от свернутого произведения тензоров. Для простоты мы выведем эти правила на примерах тензоров небольших валентностей - вывод в общем случае будет точно таким же.

а) **Абсолютное дифференцирование суммы тензоров.** Пусть дано тензорное поле второй валентности  $c_{ij}$ , которое является суммой двух тензорных полей  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  той же валентности:

$$c_{ij}(M) = a_{ij}(M) + b_{ij}(M).$$

Продифференцируем это равенство обычным способом:

$$dc_{ij} = da_{ij} + db_{ij}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (10.172), получим

$$\begin{aligned} Dc_{ij} + c_{kj} \omega_{ik} + c_{ik} \omega_{jk} &= \\ &= Da_{ij} + a_{kj} \omega_{ik} + a_{ik} \omega_{jk} + Db_{ij} + b_{kj} \omega_{ik} + b_{ik} \omega_{kj} \end{aligned}$$

или, используя, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , найдем

$$D(a_{ij} + b_{ij}) = Da_{ij} + Db_{ij}.$$

Таким образом, абсолютный дифференциал суммы тензоров равен сумме абсолютных дифференциалов слагаемых.

б) **Абсолютное дифференцирование произведения тензоров.** Пусть теперь

$$c_{ijk}(M) = a_{ij}(M)b_k(M).$$

Дифференцируем это равенство:

$$dc_{ijk} = b_k da_{ij} + a_{ij}db_k;$$

отсюда, пользуясь формулами для абсолютных дифференциалов  $Dc_{ijk}$ ,  $Da_{ij}$ ,  $Db_k$  будем иметь

$$\begin{aligned} Dc_{ijk} + c_{ljk}\omega_{il} + c_{ilk}\omega_{jl} + c_{ijl}\omega_{kl} = \\ = b_k(Da_{ij} + a_{lj}\omega_{il} + a_{il}\omega_{jl}) + a_{ij}(Db_k + b_l\omega_{kl}) \end{aligned}$$

откуда, используя равенство  $c_{ijk} = a_{ij}b_k$ , получаем

$$D(a_{ij}b_k) = b_k Da_{ij} + a_{ij} Db_k.$$

Таким образом, абсолютный дифференциал произведения тензоров равен абсолютному дифференциалу первого множителя, умноженного на второй множитель, плюс произведение первого множителя на абсолютный дифференциал второго.

**в) Абсолютное дифференцирование свернутого тензора.**

Пусть тензор  $a_{ijk}$  свернут по первым двум индексам:

$$c_k(M) = a_{iik}(M).$$

Продифференцируем это равенство:

$$dc_k = a_{iik},$$

отсюда, пользуясь выражениями для  $Dc_k$  и  $Da_{iik}$ , найдем

$$Dc_k + c_l\omega_{kl} = Da_{iik} + a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{il} + a_{iil}\omega_{kl}.$$

Последние слагаемые в левой и правой частях этого соотношения равны, так как  $c_l = a_{iil}$ . Кроме того,

$$a_{iik}\omega_{il} + a_{iik}\omega_{il} = a_{lik}\omega_{il} + a_{ilk}\omega_{li} = a_{iik}(\omega_{il} + \omega_{li}) \equiv 0.$$

Поэтому

$$Dc_k = Da_{iik}$$

Это равенство можно записать еще таким образом:

$$D \sum_{i=1}^3 a_{iik} = \sum_{i=1}^3 Da_{iik},$$

т.е. операции абсолютного дифференцирования и свертывания тензоров перестановочны.

**г) Абсолютное дифференцирование свернутого произведения тензоров.** Пусть, наконец,

$$c_i = a_{ij}b_j.$$

Тогда, пользуясь правилом абсолютного дифференцирования свернутого тензора и произведения тензоров, найдем

$$Dc_i = D \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_j = \sum_{j=1}^3 D(a_{ij} b_j) = \sum_{j=1}^3 (b_j Da_{ij} + a_{ij} Db_j),$$

т.е. правило дифференцирования произведения тензоров сохраняется и при наличии свертывания перемножаемых тензоров.

Полученные здесь правила абсолютного дифференцирования автоматически переносятся и на абсолютные производные:

$$\begin{aligned} (a_{ij} + b_{ij})_{,l} &= a_{ij,l} + b_{ij,l} \\ (a_{ij} b_k)_{,l} &= a_{ij,l} b_k + a_{ij} b_{k,l} \\ \left( \sum_{i=1}^3 a_{ik} \right)_{,l} &= \sum_{i=1}^3 a_{ik,l} \\ \left( \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_j \right)_{,l} &= \sum_{j=1}^3 (a_{ij,l} b_j + a_{ij} b_{j,l}). \end{aligned}$$

Доказательство всех этих формул протекает аналогично. Докажем какую-нибудь одну из них, например вторую. В формуле

$$D(a_{ij} b_k) = b_k Da_{ij} + a_{ij} Db_k$$

заменяем абсолютные дифференциалы  $Da_{ij}$ ,  $Db_k$  и  $D(a_{ij} b_k)$  по формулам (13), (7) и аналогичной формуле для абсолютного дифференциала трехвалентного тензора  $a_{ij} b_k$ , тогда получим

$$(a_{ij} b_k)_{,l} \omega_l = b_k a_{ij,l} \omega_l + a_{ij} b_{k,l} \omega_l.$$

Так как формы  $\omega_l$  линейно независимы, то коэффициенты при  $\omega_l$  в правой и левой частях последнего соотношения будут равны, что приведет нас к доказываемой формуле:

$$(a_{ij} b_k)_{,l} = a_{ij,l} b_k + a_{ij} b_{k,l}.$$

Таким образом, мы видим, что операция абсолютного дифференцирования тензоров имеет все свойства обычного дифференцирования. Этого, конечно, и следовало ожидать, так как абсолютное дифференцирование - инвариантная операция, которая не зависит от выбора криволинейной ортогональной системы координат. А в прямоугольных декартовых координатах абсолютное дифференцирование совпадает с обычным дифференцированием тензоров.

5. Как мы уже отмечали выше, абсолютные производные скалярного и векторного полей при переходе к прямоугольной декартовой системе координат совпадают с обычными производными этих полей. Это утверждение остается верным и для абсолютных производных тензорного поля любой валентности, которая сразу следует из формул типа (14), если учесть, что в прямоугольных координатах  $h_i=1$ ,  $\Gamma_{ijk} = 0$ . Именно поэтому для обыкновенных производных тензорного поля, заданного в прямоугольной декартовой системе координат, в п. 2.2.1 использовались те же самые обозначения, что и в этом пункте для абсолютных производных тензорного поля, заданного в произвольной криволинейной ортогональной системе координат.

Теперь ясно, что все тензорные уравнения, записанные в прямоугольной декартовой системе координат и содержащие обычные производные тензорного поля, при переходе к ортогональным криволинейным координатам перейдут в точно такие же уравнения, в которых вместо обычных производных будут стоять абсолютные производные.

В частности, полученные в п. 2.2.2 уравнения механики сплошных сред будут справедливыми не только в прямоугольной системе координат, в которой они были выведены, но также и в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. При этом входящие в них обыкновенные производные надо заменить абсолютными производными.

## **Индивидуальные тестовые задачи**

1. Найти экстремумы следующих функций от двух и трех переменных:

а)  $u = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3ax_1 - 3bx_2$ ;

б)  $u = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ ;

в)  $u = e^{-x_1^2 - x_2^2} (ax_1^2 + bx_2^2)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ;

г)  $u = \cos x_1 \cos x_2 \cos (x_1 + x_2)$ ,  $0 \leq x_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq x_2 \leq \pi$ ;

д)  $u = x_1x_2x_3 (4a - x_1 - x_2 - x_3)$ ;

е)  $u = \frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2}$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ,  $x_3 > 0$ ;

ж)  $u = (ax_1 + bx_2 + cx_3) e^{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ ;

2. Доказать следующие формулы:



$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{grad}(\varphi + \psi) &= \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \psi, & \operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}, \\ \Delta(\varphi + \psi) &= \Delta\varphi + \Delta\psi, & \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \mathbf{b}, & \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \\ &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{b}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi, \\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a};$$

$$\text{в) } \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a},$$

где последнее слагаемое означает вектор, координаты которого получаются применением оператора Лапласа к соответствующим координатам вектора  $\mathbf{a}$ ;

г)  $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ ,  $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} - \mathbf{B}\mathbf{a}$ ,  $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — линейные преобразования с матрицами  $(a_{i,k})$  и  $(b_{i,k})$ ;

$$\text{д) } \operatorname{grad} \varphi |f(\mathbf{r})| = \frac{\partial \varphi}{\partial f} \operatorname{grad} f,$$

3. Пусть  $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ,  $r = \sqrt{x_i x_i}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  — постоянные векторные поля и  $\alpha$  - константа. Доказать, что

$$\text{а) } \operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \operatorname{grad} r^n = n r^{n-2} \mathbf{r}, \quad \operatorname{grad} \frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r},$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{c}r) = \mathbf{c}, \quad \operatorname{grad}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})^2 = 2rc^2 - 2\mathbf{c}(\mathbf{c}r);$$

$$\text{б) } \operatorname{div}(\alpha \mathbf{r}) = 3\alpha, \quad \operatorname{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r}, \quad \operatorname{div}(\mathbf{c}r) = \frac{\mathbf{c}r}{r},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{c}r^2) = 2\mathbf{c}r, \quad \operatorname{div}(r^4 \cdot \mathbf{r}) = r^4, \quad \operatorname{div}[\mathbf{c}_2(r\mathbf{c}_1)] = \mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r}(r\mathbf{c})] = \\ = 4r\mathbf{c}, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r}(\mathbf{c} \times \mathbf{r})] = 0, \quad \operatorname{div}[\mathbf{c}_1 \times (\mathbf{r} \times \mathbf{c}_2)] = 2\mathbf{c}_1 \mathbf{c}_2, \quad \operatorname{div}[\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r})] = \\ = 3\varphi + r\varphi';$$

$$\text{в) } \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{r}(\mathbf{c}r)] = \mathbf{c} \times \mathbf{r}, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{c}_2(r\mathbf{c}_1)] = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \\ = 2\mathbf{c}, \quad \operatorname{rot}(r\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{c}}{r}, \quad \operatorname{rot}[\mathbf{r}\varphi(\mathbf{r})] = 0.$$

4. а) Воспользовавшись тем, что эллипс  $r_1 + r_2 = 2a$  есть линия уровня функции  $\varphi = r_1 + r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  расстояния переменной точки  $M$  эллипса к его фокусам  $F_1$  и  $F_2$ , доказать, что углы наклона прямых  $F_1M$  и  $F_2M$  к касательной эллипса в точке  $M$  равны.

б) Решить аналогичную задачу для гиперболы  $r_1 - r_2 = 2a$  и параболы  $r - x = p$ , фокус которой помещен в начале координат.

5. Найти дивергенцию и ротор поля скоростей  $\mathbf{v}$  и ускорений  $\mathbf{w}$  твердого тела, которое вращается вокруг неподвижной оси, если известно, что:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  - постоянные векторы.

6. Доказать, что векторное поле

$$\mathbf{a} = x_1 x_2^2 x_3^2 \mathbf{e}_1 + x_2^2 x_1 x_2 x_3^2 \mathbf{e}_2 + x_1^2 x_2^2 x_3 \mathbf{e}_3$$

является безвихревым.

Векторное поле  $\mathbf{a}$  ( $M$ ) называется *потенциальным* в области  $V$ , если в этой области существует такое скалярное поле  $\varphi$ , что  $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$ .

7. Доказать, что

а) всякое потенциальное поле является безвихревым;

б) всякое безвихревое поле является потенциальным.

8. Доказать, что  $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ , если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — потенциальные векторные поля.

9. Показать, что гармоническое поле одновременно является и потенциальным и соленоидальным.

10. Доказать, что следующие функции являются гармоническими:

а)  $u = a_i x_i + a$ ;

б)  $u = a(x_1^2 - x_2^2)$ ;

в)  $u = a\left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2\right)$ ;

г)  $u = ax_1x_2x_3$ ;

д)  $u = \frac{1}{r}$ , где  $r = \sqrt{x_i x_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

е)  $u = \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , где  $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ .

11. Доказать, что уравнения движения сплошной среды могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,k} v_k = F_i + \frac{1}{\rho} \sigma_{ik,k}.$$

Сплошная среда называется *идеальной жидкостью*, если для нее тензор напряжений является нулевым тензором:  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ , где  $p = p(M, t)$  - давление жидкости.

12. Доказать, что уравнения движения идеальной жидкости могут быть записаны в следующих формах:

а)  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_{i,k} v_k$ ;

б)  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k - \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x_i}$ ,

где  $z = (z_k e_k) = \text{rot } \mathbf{v}$ ,  $v = |\mathbf{v}|$

в) для однородной несжимаемой жидкости, которая определяется условием  $\rho = c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = F_i - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k$$

г) для однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле  $F = -\text{grad } U$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U \right) = - \frac{\partial v_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk} v_j z_k;$$

д) для безвихревого движения однородной несжимаемой жидкости в потенциальном силовом поле

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + U,$$

где  $\varphi$  - потенциал векторного поля  $\mathbf{v}$ , так что  $\text{grad } \varphi = -\mathbf{v}$  (см. задачу 7).

13. Учитывая соотношение

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

которое связывает тензоры деформации и напряжений упругой изотропной среды, доказать, что уравнение движения такой среды в случае его однородности ( $\lambda, \mu$  - постоянные) записываются в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + [(\lambda + \mu) v_{k,ki} + \mu v_{i,kk}].$$

Сплошная среда называется *вязкой жидкостью*, если ее тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \sigma'_{ij}$$

где  $\sigma'_{ij}$  — вязкий тензор напряжения, которое удовлетворяет условию  $\sigma'_{ii} = 0$ .

14. Доказать, что уравнение движения вязкой жидкости имеет вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \sigma'_{ik,k}$$

15. Ввести систему криволинейных координат на плоскости  $E_2$  аналогично тому, как это сделано в тексте для пространства  $E_3$ .

16. Установить формулы, которые выражают криволинейные координаты точки плоскости  $E_2$  через прямоугольные декартовы и обратно, найти координатные линии, подсчитать определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

и выяснить, в каких точках плоскости  $E_2$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и

прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости для следующих криволинейных систем координат  $u_1, u_2$ :

а) для полярной системы координат, которая определяется равенством (для краткости часто криволинейные координаты на плоскости задают в комплексной форме, из которой легко найти выражение декартовых координат  $x_1, x_2$  через криволинейные координаты  $u_1$  и  $u_2$ , если приравнять между собой соответственно действительные и мнимые части основного равенства).

$$x_1 + ix_2 = u_1 e^{iu_2} \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi);$$

б) для обобщенной полярной системы координат, которая определяется равенством

$$\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2} \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0);$$

в) для эллиптической системы координат, которая определяется равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{ch}(u_1 + iu_2) \quad (0 \leq u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi);$$

г) для параболической системы координат, которая определяется равенством

$$x_1 + ix_2 = \frac{1}{2} (u_1 + iu_2)^2 \quad (-\infty < u_1 < \infty, \quad 0 \leq u_2 < \infty);$$

д) для биполярной системы координат, которая определяется равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{th} \frac{u_1 + iu_2}{2} \quad (-\infty < u_1 < \infty, \quad -\pi < u_2 \leq \pi).$$

17. Найти координатные поверхности и координатные линии, подсчитать определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \end{vmatrix}$$

и установить, в каких точках пространства  $E_3$  нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для следующих криволинейных систем координат  $u_1, u_2, u_3$  пространства  $E_3$ :

а) для обобщенной цилиндрической системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2, \quad x_3 = u_3 \\ (u_1 \geq 0, \quad 0 < u_2 \leq 2\pi, \quad -\infty < u_3 < \infty, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0);$$

б) для обобщенной сферической системы координат, которая определяется равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = a_3 u_1 \cos u_2 \\ (u_1 \geq 0, \quad 0 \leq u_2 \leq \pi, \quad 0 \leq u_3 < 2\pi, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0);$$

в) для эллипсоидальной системы координат, которая определяется равенствами

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)}, \\x_2^2 &= \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)}, \\x_3^2 &= \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},\end{aligned}$$

г) для параболической системы координат, которая определяется равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 u_2 \cos u_3, & x_2 &= u_1 u_2 \sin u_3, & x_3 &= \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) \\(0 \leq u_1 < \infty, & 0 \leq u_2 < \infty, & -\pi < u_3 \leq \pi); \end{aligned}$$

д) для системы вырожденных эллипсоидальных координат, которые определяются равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \cos u_3, & x_2 &= \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \sin u_3, & x_3 &= \operatorname{ch} u_1 \cos u_2 \\(0 \leq u_1 < \infty, & 0 \leq u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi)\end{aligned}$$

или равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \cos u_3, & x_2 &= \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \sin u_3, & x_3 &= \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \\(0 \leq u_1 < \infty, & 0 \leq u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi)\end{aligned}$$

в зависимости от того, будет ли эллипсоид вращения вытянутым или сплюснутым;

е) для системы тороидальных координат, которая определяется равенствами

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\operatorname{sh} u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, & x_2 &= \frac{\operatorname{sh} u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, & x_3 &= \frac{\sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2} \\(0 \leq u_1 < \infty, & -\pi < u_2 \leq \pi, & -\pi < u_3 \leq \pi).\end{aligned}$$

18. Выяснить, какие из систем криволинейных координат, которые определены в задачах 16 и 17, будут ортогональными.

19. Найти величины  $h_i$ ,  $\omega_u$ ,  $\omega_{ij}$ ,  $\Gamma_{ijk}$  в криволинейных ортогональных системах координат, указанных в задачах 16 а) -д) и 17 в) -е).

20. а) Доказать формулу (14) п.2.2.4 непосредственно, используя (13) п.2.2.4 и то, что  $\omega_{u'} = e_i dM$ ,  $\omega_u = e_i dM$ .

б) Доказать формулы (15) и (17) п.2.2.4 непосредственно, используя (5), (7), (12) п.2.2.4 и то, что

$$\omega_{i'j'} = e_i de_{j'}, \quad \omega_{ij} = e_i de_j.$$

21. Найти выражение компонент  $\gamma_{i'i}(M)$  матрицы, определяющей переход от подвижного репера криволинейной системы координат  $(u_1, u_2, u_3)$  к

подвижному реперу новой системы координат  $(u_1', u_2', u_3')$ , через частные производные

$$\frac{\partial u_i'}{\partial u_i}$$

и коэффициенты Ламе обеих систем.

22. Найти выражения величин  $\gamma_{i'j,l}$ , входящих в формулы (16) п.2.2.4, через вторые производные от новых координат по старым и коэффициенты Ламе (см. предыдущую задачу).

23. Используя результаты задачи 19, найти выражения для градиента скалярного поля, дивергенции и ротора векторного поля, а также оператора Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат, рассмотренных в задачах 16 а) -д) и 17 а)-е).

24. Используя равенство

$$\text{rot grad } u_i = 0$$

(почему оно верно?), вывести формулу

$$\text{rot } e_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \text{grad } h_\alpha \times e_\alpha$$

а из нее получить формулу (10.170).

25. Используя равенство

$$\text{div } e_i = \text{div } (e_j \times e_k) = e_k \text{ rot } e_j - e_j \text{ rot } e_k$$

(см. задачу 2 г), где индексы  $i, j, k$  различны и  $e_i, e_j, e_k$  образуют правую тройку, вывести формулу

$$\text{div } e_i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_j h_k)}{\partial u_i} \quad (i \neq j, j \neq k, k \neq i),$$

а из нее получить формулу (10.168).

26. Доказать равенства

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial u_j} = \frac{e_j}{h_\alpha} \frac{\partial h_k}{\partial u_\alpha} \quad (\alpha \neq j, j \neq k, k \neq \alpha),$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial u_\alpha} = - \sum_{i \neq \alpha} \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_i} e_i.$$

27. Векторное поле  $a$  в сферических координатах имеет компоненты

$$a_1 = \frac{2k \cos u_2}{u_1^3}, \quad a_2 = \frac{k \sin u_2}{u_1^3}, \quad a_3 = 0.$$

Доказать, что это поле потенциально и соленоидально, и найти его потенциал.

28. Найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

записанного в сферических координатах, если функция  $\varphi$  зависит от одной сферической координаты  $u_1$ ,  $u_2$  или  $u_3$ .

Рассмотреть все три случая.

29. а) Найти  $a_{ij,k}$ ,  $a_{ij,j}$ ,  $a_{ji,j}$ .

б) Найти  $\delta_{ij,k}$  и  $(x_i y_i)_k$ , где  $x_i, y_i$  — координаты векторов  $x$  и  $y$  в некоторой криволинейной системе координат.

в) Доказать формулу

$$x_{,i} = \frac{x_{j,i} x_j}{x}$$

где  $x = |x|$  и  $x_i$  - координаты вектора  $x$  в некоторой криволинейной системе координат.

30. Записать уравнение неразрывности и уравнение движения деформируемой среды в цилиндрических и сферических координатах.

$$s_{ijki} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

### 3. Тригонометрические ряды и ряды Фурье

#### 3.1. Тригонометрические ряды

Функция  $f(x)$  называется *периодической* (периода  $a$ ), если она определена на всей действительной оси и для нее выполняется равенство

$$f(x + a) = f(x)$$

для всех  $x$ .

Например, тригонометрические функции

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \dots \quad (1)$$

имеют период  $2\pi$ .

На самом деле функции  $\cos kx$  и  $\sin kx$  для каждого натурального  $k$  имеют период  $2\pi/k$ . Таким образом  $2\pi/k < 2\pi$  при  $k > 1$ . Постоянная же  $y=1$  имеет как угодно малый период. Однако все функции последовательности (1) имеют период  $2\pi$ .

Периодическая функция

$$s=f(t)$$

изображает периодическое движение (колебание) точки, имеющей в момент времени  $t$  координату  $s$  (на оси  $s$ ).

Функция (периода  $2l$ )

$$s = A \cos \left( \frac{k\pi}{l} t + \omega \right), \quad (2)$$

где  $A > 0$ ,  $l > 0$  и  $\omega$ —постоянные,  $k$ —натуральное, определяет гармоническое колебание точки с амплитудой  $A$ , фазой  $\omega$  и частотой  $k$ .

Функция (2) имеет период  $2l/k$ , т. е. одно полное колебание происходит за промежуток времени  $2l/k$ . Количество же колебаний в единицу времени равно  $k/2l$ . Именно число  $k/2l$  нужно было бы назвать частотой колебания, но обычно частотой (колебания) называют число  $k$ .

Отметим, что функция

$$a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \quad (V a_k^2 + b_k^2 > 0),$$

где  $k$ —натуральное число, определяет гармоническое колебание, потому что

$$\begin{aligned} a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t &= \\ &= V a_k^2 + b_k^2 \left( \frac{a_k}{V a_k^2 + b_k^2} \cos \frac{k\pi}{l} t + \frac{b_k}{V a_k^2 + b_k^2} \sin \frac{k\pi}{l} t \right) = \\ &= A_k \cos \left( \frac{k\pi}{l} t + \omega_k \right), \end{aligned}$$

где

$$A_k = V a_k^2 + b_k^2,$$

а  $\omega_k$  оделяется однозначно из соотношений

$$0 \leq \omega_k < 2\pi, \quad a_k / V a_k^2 + b_k^2 = \cos \omega_k, \quad b_k / V a_k^2 + b_k^2 = \sin \omega_k$$

Примером гармонического колебания может служить колебание пружинного маятника (рис. 1).



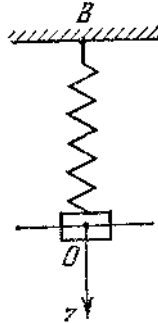


Рис. 1

Пусть пружина, подвешенная в точке  $B$ , имеет на нижнем ее конце груз массы  $m$ , координата центра тяжести которого в момент  $t = 0$  равна  $z = 0$ . Грузу в момент  $t = 0$  придается импульс  $z' = \mu$  по направлению оси  $z$ . В результате груз будет колебаться. Отклонение его от точки равновесия обозначим через  $z = z(t)$ . Так как сила, действующая на груз в первом приближении, равна по закону Ньютона  $mz'' = -kz$ , то

$$z'' + \nu^2 z = 0 \quad \left( \nu^2 = \frac{k}{m} \right).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$z = C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t,$$

где  $C_1, C_2$ —произвольные постоянные. Так как

$$z(0) = 0, \quad z'(0) = \mu,$$

то

$$z = \frac{\mu}{\nu} \sin \nu t = A \cos \left( \nu t - \frac{\pi}{2} \right), \quad A = \frac{\mu}{\nu},$$

и мы получили, что центр тяжести груза совершает гармоническое колебание.

С периодическими движениями (колебаниями) приходится иметь дело в самых различных областях знания — в теории упругости, акустике, радиотехнике, электротехнике — и всюду простейшими периодическими движениями являются гармонические колебания.

Конечная сумма гармонических колебаний с данным периодом  $2l$  представляет собой сложное колебание

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{k\pi}{T} t \right). \quad (3)$$

Нулевой член в этой сумме мы записали в виде  $a_0/2$ . Мы увидим, что это удобно.

Наконец, более сложное периодическое колебание (движение) можно получить как сумму сходящегося (для всех  $t$ ) ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{k\pi}{T} t \right), \quad (4)$$

называемого *тригонометрическим рядом*.

Числа  $a_k$  и  $b_k$  называются *коэффициентами тригонометрического ряда* (4), а отдельные его слагаемые

$$a_k \cos \frac{k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{k\pi}{T} t$$

называются *членами ряда* (4) или его *гармониками* (соответствующими частоте  $k$ ).

**Пример 1.** На рис. 2—5 изображены графики первых четырех частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin (2k-1) x}{2k-1} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots,$$

и график функции

$$\psi(x) = \begin{cases} \pi/4, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, x = \pi, \\ -\pi/4, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

На рис. 2 (наряду с графиком  $\psi(x)$ ) изображена функция  $S_1(x) = \sin x$ . На рис. 3 штриховыми линиями нарисованы графики

$S_1(x)$  и  $\frac{\sin 3x}{3}$  и сплошной линией —

$$S_2(x) = S_1(x) + \frac{\sin 3x}{3}.$$

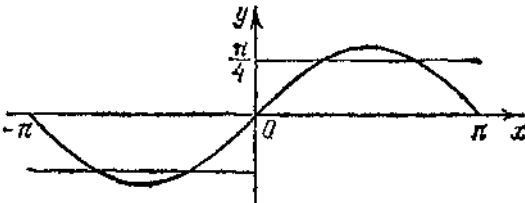


Рис. 2.

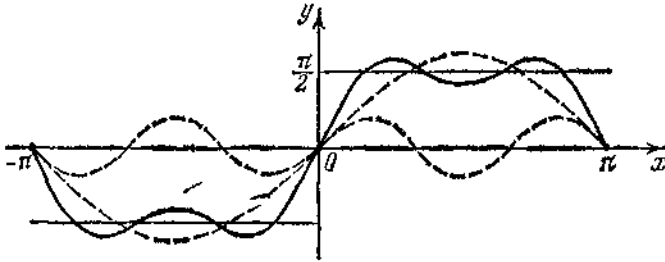


Рис. 3.

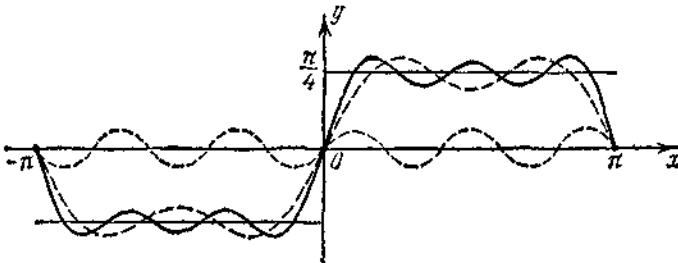


Рис. 4.

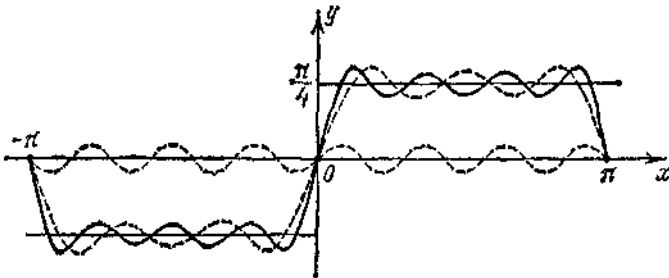


Рис. 5.

На рис. 4 штриховыми линиями нарисованы графики  $S_2(x)$  и  $\frac{\sin 5x}{5}$  и сплошной линией —

$$S_3(x) = S_2(x) + \frac{\sin 5x}{5}$$

и т. д. Уже из рис. 5 видно, что надо полагать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \varphi(x) \quad (-\pi < x \leq \pi). \quad (5)$$

Так оно и есть на самом деле. По этому поводу см. далее § 3.4. Функции  $S_n(x)$  для любого  $n$  имеют период  $2\pi$ :

$$S_n(x + 2\pi) = S_n(x).$$

Продолжим функцию  $\psi(x)$  на всю действительную ось периодически с периодом  $2\pi$ . Тогда она будет иметь график, как на рис. 6.

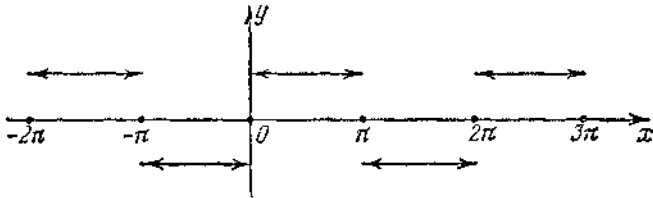


Рис.6.

Так как равенство (5) выполняется для всех  $x \in (-\pi, \pi]$  и функции  $S_n(x)$  и  $\psi(x)$  периода  $2\pi$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \psi(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

**Пример 2.** На рис. 7 изображены три периодических периода  $2\pi$  функции

$$S_2(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} \quad (\text{сплошной линией}),$$

$$S_3(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \quad (\text{штрихами}),$$

$$S_4(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} \quad (\text{точками}).$$

Для больших  $n$  график суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin kx}{k}$$

схематически (не точно) изображается на рис. 8, что наводит на мысль, что предельная функция

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

есть периодическая (периода  $2\pi$ ) функция, определяемая равенствами

$$S(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$

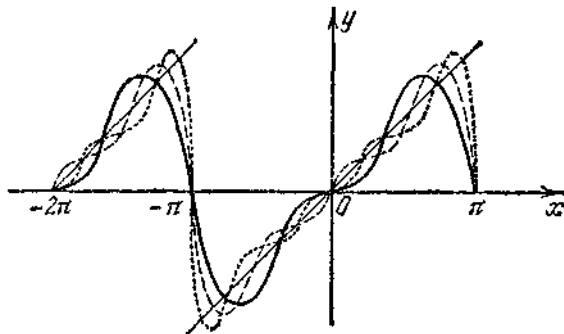


Рис. 7.

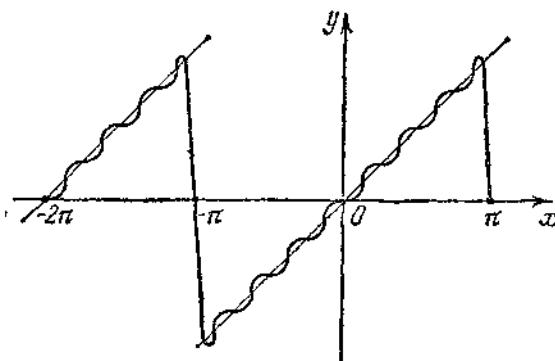


Рис. 8.

Это так и есть (см. § 3.4).

### 3.2. Сходимость тригонометрических рядов

Пусть задан тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right). \quad (1)$$

Чтобы выяснить, сходится ли он, естественно рассмотреть числовой ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \quad (2)$$

*мажорирующий*, как говорят, ряд (1). Его члены превышают соответственно абсолютные величины членов ряда (1):

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right| \leq |a_k|, \quad \left| b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right| \leq |b_k|.$$

Отсюда следует, что если ряд (2) сходится, то сходится также ряд (1) для всех  $x$  и притом абсолютно и равномерно. Но ряд (1) может сходиться без того, чтобы сходился ряд (2). Ведь его члены для каждого  $x$  при изменении  $k$  меняют знак (осциллируют) бесконечное число раз, и он может оказаться сходящимся вследствие компенсации положительных членов отрицательными. В общей теории рядов существуют признаки сходимости подобных рядов. Такими признаками являются признаки Дирихле и Абеля, хорошо приспособленные к исследованию тригонометрических рядов.

Так или иначе, если установлено, что ряд (1) равномерно сходится, то из того, что его члены суть непрерывные функции периода  $2l$ , следует, что и его сумма

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (3)$$

есть непрерывная функция периода  $2l$  и ряд (3) можно почленно интегрировать.

Ряд (3) можно формально продифференцировать по  $x$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi}{l} x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right) \quad (4)$$

и составить его мажорирующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} (|a_k| + |b_k|). \quad (5)$$

Снова, если ряд (5) сходится, то ряд (4) сходится и притом равномерно. Больше того, на основании известной теоремы из теории равномерно сходящихся рядов тогда сумма ряда (4) есть производная от суммы ряда (3), т. е.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left( -a_k \sin \frac{k\pi}{l} x + b_k \cos \frac{k\pi}{l} x \right).$$

Вообще, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k\pi}{l} \right)^s (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

при некотором натуральном  $s$  сходится, то ряд (3) законно дифференцировать почленно  $s$  раз.

Впрочем, надо помнить, что не исключено, что ряд (3) законно продифференцировать и еще один раз (т. е.  $s+1$  раз).

**Пример.** Выяснить, сколько раз можно продифференцировать почленно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kx \quad (0 < q < 1).$$

Продифференцируем данный ряд формально  $s$  раз:

$$\pm \sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k \left\{ \begin{array}{l} \cos kx \\ \sin kx \end{array} \right\}.$$

Мажорирующий ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} k^s q^k$  ( $0 < q < 1$ ) сходится при любом натуральном  $s$ , что можно установить с помощью признака Даламбера. Поэтому исходный ряд можно дифференцировать почленно сколько угодно раз.

**Задача.** Сколько раз заведомо можно продифференцировать почленно ряды

$$а) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}, \quad б) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3},$$

$$в) \sum_{k=1}^{\infty} q^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (0 < q < 1, |a_k|, |b_k| < M).$$

Сколько непрерывных производных заведомо имеют суммы этих рядов.

### 3.3. Ряд Фурье

Пусть задана функция  $f(t)$  периода  $2l$  и известно, что ее можно разложить в тригонометрический ряд:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right), \quad (1)$$

т. е. она уже есть сумма некоторого тригонометрического ряда (вида (1)) для всех  $t$  (или, быть может, для всех  $t$ , за исключением отдельных значений  $t$ ). Спрашивается, как определить по функции  $f(t)$  коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$ . Этот вопрос принципиально был решен математиками и физиками. Существенный вклад в его решение внес Ж. Фурье. Он показал, что коэффициенты  $a_k$ ,  $b_k$  тригонометрического ряда, представляющего периодическую периода  $2l$  функцию  $f(t)$ , вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \cos \frac{k\pi}{T} t f(t) dt \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ b_k &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \sin \frac{k\pi}{T} t f(t) dt \quad (k=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Числа  $a_k$  и  $b_k$ , вычисляемые по этим формулам, называют *коэффициентами Фурье* функции  $f(t)$ , а тригонометрический ряд (1), в который вместо  $a_k$  и  $b_k$  подставлены соответствующие коэффициенты Фурье, называют *рядом Фурье* функции  $f(t)$ .

В некоторых случаях (для более узких классов функций) формулы (2) были известны еще Эйлеру. Поэтому их называют еще формулами Эйлера — Фурье.

В § 3.6 будет дан вывод формул (2) о предположении, что уже известно, что периодическая периода  $2l$  функция  $f(t)$  разлагается в тригонометрический ряд, равномерно сходящийся к ней.

Нужно сказать, что физики давно считали, что всякое сложное периодическое движение точки (сложное колебание)—будь то механическое колебание точки звучащей струны или электромагнитное колебание, или колебание, связанное с распространением звука — распадается на гармонические колебания, т. е. сложное периодическое движение надо мыслить как сумму (конечную или бесконечную) простых гармонических колебаний того же периода. Выделение из сложного периодического движения, составляющего его гармонического колебания, соответствующего данной частоте  $k$ , имеет большое практическое значение. Физики такое выделение из реального движения получают при помощи специальных приборов—резонаторов. Математик, если ему данное движение задано при помощи периодической функции  $s = f(t)$ , получает такое выделение при помощи вычислений. Он просто вычисляет коэффициенты Фурье  $a_k, b_k$  этой функции, и тогда соответствующая  $k$ -я гармоника будет иметь вид

$$a_k \cos \frac{k\pi}{T} t + b_k \sin \frac{k\pi}{T} t.$$

Отметим, что если функция  $f(t)$  имеет период  $a$  и интегрируема на отрезке  $[0, a]$  или, как говорят, на периоде, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^a f(x) dx = \int_\lambda^{a+\lambda} f(x) dx \quad (3)$$

для любого действительного числа  $\lambda$ .



Свойство (3), в частности, показывает, что коэффициенты Фурье периодической функции  $f(t)$  периода  $2l$  можно записать в виде

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} t dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{\lambda}^{\lambda+2l} f(t) \sin \frac{k\pi}{l} t dt \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где  $\lambda$  — произвольное действительное число, потому что функции  $\cos \frac{k\pi}{l} t$  и  $\sin \frac{k\pi}{l} t$  периода  $2l$ , а произведение функций периода  $2l$  — в свою очередь функции периода  $2l$ .

Отметим еще, что если функция  $f$  четная на отрезке  $[-a, a]$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Если же функция  $f$  нечетная на отрезке  $[-a, a]$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Функция  $\cos \frac{k\pi}{l} t$  четная, а  $\sin \frac{k\pi}{l} t$  нечетная. Кроме того,

произведение двух четных и двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция. Поэтому для четной периода  $2l$  функции  $f(t)$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

а для нечетной —

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

**Пример.** Разложить в ряд Фурье функцию (периода  $2\pi$ )  $f(x) = x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) (см. рис. 9).

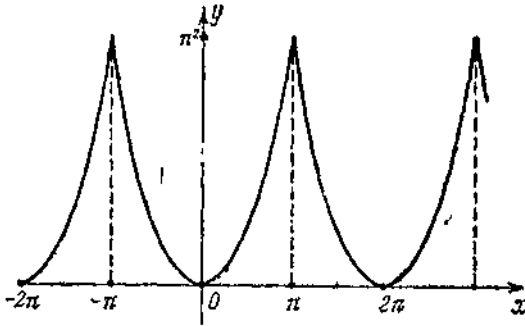


Рис. 9.

Данная функция четная. Тогда ее ряд Фурье состоит только из косинусов ( $b_k = 0$ ). Вычислим коэффициенты  $a_k$ :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{k\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \\ &= \frac{4x}{\pi k} \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi k^2} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx = (-1)^k \frac{4}{k^3} \quad (k > 0). \end{aligned}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \, dx = \frac{\pi^3}{3},$$

Таким образом,

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (4)$$

Равенство (4) следует из достаточных признаков сходимости ряда Фурье, изложенных в § 3.4.

### 3.4. Признаки сходимости рядов Фурье

Чтобы упростить записи, будем рассматривать функции периода  $2l$ . Для функций периода  $2l$ , где  $l$  — произвольное положительное число, рассуждения аналогичны.

Как мы знаем, рядом Фурье функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k=1, 2, \dots).$$
(2)

Мы видим, что для того, чтобы ряд Фурье функции  $f$  периода  $2\pi$  имел смысл, во всяком случае должны иметь смысл интегралы (2).

В наших рассуждениях интегралы (2) всегда будут иметь смысл, потому что мы будем говорить о непрерывных или кусочно-непрерывных на периоде ограниченных функциях.

Поставим вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция  $f(x)$ , чтобы ее ряд Фурье сходил к ней. Этим вопросом математики занимались много. Мы ограничимся тем, что сформулируем несколько важных с практической точки зрения достаточных признаков сходимости рядов Фурье, не доказывая их.

*Если функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  непрерывна на всей действительной оси и имеет кусочно-непрерывную производную на периоде, то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**Пример 1.** Функция  $\psi(x)$  периода  $2\pi$ , четная и определяемая на отрезке  $[0, \pi]$  равенством

$$\psi(x) = x \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

удовлетворяет, очевидно, сформулированному признаку (см. график этой функции на рис. 10). Ее коэффициенты Фурье  $b_k = 0$ , а коэффициенты ( $k \geq 1$ )

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} x \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1); \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом,

$$a_0 = \pi; \quad a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi (2k-1)^2}$$

$$(k=1, 2, \dots).$$

Но тогда, согласно указанному признаку,

$$\psi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \quad (-\infty < x < \infty);$$

при этом сходимость ряда равномерная.

Тот факт, что этот ряд сходится равномерно, следует и из общей теории рядов (по критерию Вейерштрасса). Но не тривиально, что он сходится именно к функции  $\psi(x)$ .

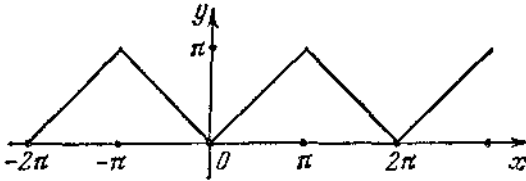


Рис. 10.

Отметим еще, что данная периодическая функция  $\psi(x)$  совпадает с функцией  $y=x$  только на отрезке  $[0, \pi]$ , а вне отрезка  $[0, \pi]$  эти две функции различны.

Сформулируем еще признак сходимости ряда Фурье, называемый *признаком Дирихле*.

Говорят, что функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  удовлетворяет условию Дирихле, если на отрезке  $[0, 2\pi]$  можно указать конечное число точек  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 2\pi$  таких, что на интервалах  $(x_j, x_{j+1})$  функция ограничена, непрерывна и монотонна (не убывает или не возрастает), а в каждой точке  $x_j$  разрыва  $f$

$$f(x_j) = \frac{1}{2} (f(x_j + 0) + f(x_j - 0)),$$

т. е. значение  $f$  в  $x_j$  есть среднее арифметическое правого и левого пределов  $f$  в  $x$ .

Если функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  удовлетворяет условию Дирихле, то ее ряд Фурье сходится к ней для любого  $x$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (-\infty < x < \infty).$$

**Пример 2.** Функция  $\varphi(x)$  периода  $2\pi$ , определяемая равенством

$$\varphi(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

как это видно из ее графика (рис. 11), удовлетворяет условию Дирихле. Ведь точки  $0 = x_0 < x_1 = 2\pi$  обладают

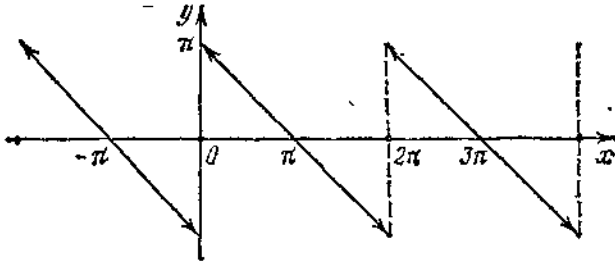


Рис. 11.

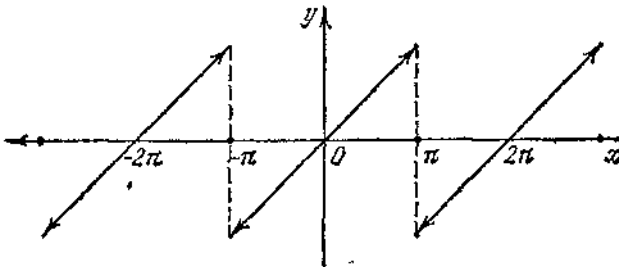


Рис. 12.

свойством: функция  $\varphi(x)$  убывает, непрерывна и ограничена на интервале  $(x_0, x_1)$  и

$$\varphi(0) = \frac{\varphi(0+0) + \varphi(0-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0,$$

$$\varphi(2\pi) = \frac{\varphi(2\pi+0) + \varphi(2\pi-0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0.$$

Функция  $\varphi(x)$  нечетная, поэтому ее ряд Фурье состоит только из синусов; следовательно, коэффициенты Фурье для нее

$$\alpha_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx = \frac{2}{k} - \frac{2}{\pi k} \frac{\sin kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k} \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

$$\text{Итак, } \varphi(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (-\infty < x < \infty).$$

**Задача.** Разложить в ряд Фурье функцию периода  $2\pi$ , определенную на  $[-\pi, \pi]$  равенством (рис. 12)

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm \pi. \end{cases}$$

Ответ.  $f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}$ .

### 3.5. Ортогональные свойства тригонометрических функций

Рассмотрим последовательность тригонометрических функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \quad (1)$$

Для них справедливы важные (легко проверяемые) формулы:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l \end{cases} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx &= \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ \pi, & k = l \end{cases} \quad (k, l = 1, 2, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx \, dx &= 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, \dots), \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx &= 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0 \\ & \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из (2), в частности, следует, что интеграл по отрезку  $[-\pi, \pi]$  от произведения любых двух различных функций последовательности (1) равен нулю.

Это свойство формулируют так: *функции последовательности (1) ортогональны на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .*

Из формул (2) следует:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \\ k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

**Задача.** Получить формулы, аналогичные формулам (2), (3), для тригонометрических функций

$$1, \cos \frac{\pi}{l} x, \sin \frac{\pi}{l} x, \cos \frac{2\pi}{l} x, \sin \frac{2\pi}{l} x, \dots$$

**Указание.** Можно их получить непосредственно вычислением. Но можно также их получить, произведя в интегралах (2), (3) замену переменной  $x = \pi u/l$ .

### 3.6. Коэффициенты Фурье

Допустим, что функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  разложена в тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

и оказалось, что этот ряд равномерно сходится к ней.

Каждый член ряда (1) есть непрерывная функция, и так как ряд (1) по условию равномерно сходится, то его сумма  $f(x)$  есть непрерывная (на действительной оси) функция.

Помножим левую и правую части (1) на  $\cos mx$ , где  $m$  — натуральное число. Так как функция  $\cos mx$  непрерывна и ограничена, то полученный ряд снова будет состоять из непрерывных функций и снова будет равномерно сходиться, теперь уже к непрерывной функции  $f(x) \cos mx$ . Но равномерно сходящиеся ряды непрерывных функций законно интегрировать почленно на конечном отрезке. Проинтегрируем полученный ряд почленно на периоде, т. е. на отрезке  $[-\pi, \pi]$  ( $m=1, 2, \dots$ );

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx \right) = a_m \pi.$$

Второе равенство следует из ортогональности тригонометрических функций и формул (2) § 3.5.

Аналогично получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_m \pi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

в силу последних трех формул (2) § 3.5.

Как уже отмечалось в § 3.4, числа  $a_m$ ,  $b_m$ , вычисляемые по формулам (2), называются *коэффициентами Фурье функции  $f$* , а сам тригонометрический ряд (1), где  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты Фурье функции  $f$ , называется *рядом Фурье функции  $f$* .

Итак, мы доказали, что если функция  $f$  представима в виде суммы тригонометрического ряда (1), равномерно сходящегося (для всех  $x!$ ), то числа  $a_k, b_k$  необходимо являются коэффициентами Фурье функции  $f$ .

**Замечание 1.** Таким образом, всякий равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.

**Замечание 2.** Мы рассмотрели здесь функцию  $f(x)$  периода  $2\pi$ , чтобы не усложнять записи. Для периода  $2l$  рассуждения аналогичны.

### 3.7. Оценка коэффициентов Фурье

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  периода  $2\pi$  имеет непрерывную производную  $f^{(s)}(x)$  порядка  $s$ , удовлетворяющую на всей действительной оси неравенству

$$|f^{(s)}(x)| \leq M_s; \quad (1)$$

тогда коэффициенты Фурье функции  $f$  удовлетворяют неравенству

$$|a_k| \leq 2M_s/k^s, \quad |b_k| \leq 2M_s/k^s \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

**Доказательство.** Интегрируя по частям и учитывая, что  $f(-\pi) = f(\pi)$ , имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \frac{1}{\pi} \left[ f(t) \frac{\sin kt}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\sin kt}{k} \, dt \right] = -\frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin kt \, dt. \quad (3)$$

Поэтому

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} M_1 \cdot 1 \, dx = \frac{2M_1}{k}.$$

Интегрируя по частям правую часть (3) последовательно, учитывая, что производные  $f', \dots, f^{(s-1)}$  непрерывны и принимают одинаковые значения в точках  $t = -\pi$  и  $t = \pi$ , а также оценку (1), получим первую оценку в (2).

Вторая оценка в (2) получается подобным образом.

**Теорема 2.** Для коэффициентов Фурье функции  $f(x)$  имеет место неравенство

$$\{|a_k|, |b_k|\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(t + \frac{\pi}{k}\right) - f(t) \right| dt. \quad (4)$$



**Доказательство.** Имеем

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt. \quad (5)$$

Вводя в данном интеграле замену переменной  $t = u + \frac{\pi}{k}$  и учитывая, что  $f(x)$  — периодическая функция, получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + \frac{\pi}{k}}^{\pi + \frac{\pi}{k}} f\left(u + \frac{\pi}{k}\right) \cos\left(ku + \pi\right) du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(u + \frac{\pi}{k}\right) \cos ku \, du. \end{aligned} \quad (6)$$

Складывая (5) и (6), получаем

$$a_k = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f\left(u + \frac{\pi}{k}\right) - f(u) \right] \cos ku \, du.$$

Отсюда

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(u + \frac{\pi}{k}\right) - f(u) \right| du.$$

Аналогичным образом проводим доказательство для  $b_k$ .

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  непрерывна, то ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю:  $a_k \rightarrow 0$ ,  $b_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ .

### 3.8. Пространство функций со скалярным произведением

Функция  $f(x)$  называется *кусочно-непрерывной на отрезке  $[a, b]$* , если она непрерывна на этом отрезке, за исключением, быть может, конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода. Такие функции можно складывать и умножать на действительные числа и получать как результат снова кусочно-непрерывные на  $[a, b]$  функции. *Скалярным произведением* двух кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  ( $a < b$ ) функций  $f$  и  $\varphi$  будем называть интеграл

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Очевидно, для любых кусочно-непрерывных на  $[a, b]$  функции  $f, \varphi, \psi$  выполняются свойства:

- 1)  $(f, \varphi) = (\varphi, f)$ .
- 2)  $(f, f)$  и из равенства  $(f, f) = 0$  следует, что  $f(x) = 0$  на  $[a, b]$ , исключая, быть может, конечное число точек  $x$ .
- 3)  $(\alpha f + \beta \varphi, \psi) = \alpha (f, \psi) + \beta (\varphi, \psi)$ ,

где  $\alpha, \beta$  — произвольные действительные числа.

Множество всех кусочно-непрерывных функций, определенных на отрезке  $[a, b]$ , для которых введено скалярное произведение по формуле (1), мы будем обозначать  $L'_2 = L'_2(a, b)$  и называть *пространством  $L'_2$*  или  $L'_2(a, b)$ .

**Замечание 1.** В математике называют пространством  $L_2 = L_2(a, b)$  совокупность функций  $f(x)$ , интегрируемых в лебеговом смысле на  $[a, b]$  вместе со своими квадратами, для которых введено скалярное произведение по формуле (1). Рассматриваемое пространство  $L'_2$  есть часть  $L_2$ . Пространство  $L'_2$  обладает многими свойствами пространства  $L_2$ , но не всеми (см. далее примечание в § 3.9).

Из свойств 1), 2), 3) следует важное *неравенство Буняковского*  $|(f, \varphi)| \leq (f, f)^{1/2} (\varphi, \varphi)^{1/2}$ , которое на языке интегралов выглядит так:

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x) dx}.$$

Величина

$$\|f\| = \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2}$$

называется *нормой* функции  $f$ .

Норма обладает следующими свойствами:

- 1)  $\|f\| \geq 0$ ,
- при этом равенство может быть только для нулевой функции  $f = 0$ , т. е. функции, равной нулю, за исключением, быть может, конечного числа точек,
- 2)  $\|f + \varphi\| \leq \|f\| + \|\varphi\|$ ,
- 3)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ ,

где  $\alpha$  — действительное число.

Второе свойство на языке интегралов выглядит так:

$$\left( \int_a^b |f(x) + \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left( \int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}$$

и называется *неравенством Минковского*.

Говорят, что *последовательность функций*  $\{f_n\}$ , принадлежащих к  $L'_2$ , *сходится к функции*  $f \in L'_2$  *в смысле среднего квадратического на*  $[a, b]$  *(или еще по норме*  $L'_2$ *), если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

Отметим, что если последовательность функций  $f_n(x)$  сходится равномерно к функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , то для достаточно больших  $n$  разность  $f(x) - f_n(x)$  по абсолютной величине должна быть мала для всех  $x \in [a, b]$ .

В случае же, если  $f_n(x)$  стремится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического на отрезке  $[a, b]$ , то указанная разность может и не быть малой для больших  $n$  всюду на  $[a, b]$ . В отдельных местах отрезка  $[a, b]$  эта разность может быть и велика, но важно только, чтобы интеграл от ее квадрата по отрезку  $[a, b]$  был мал для больших  $n$ .

**Пример.** Пусть на  $[0, 1]$  задана изображенная на рис. 13 непрерывная кусочно-линейная функция  $f_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ), причем

$$f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0,$$

$$f_n(1/n) = 1.$$

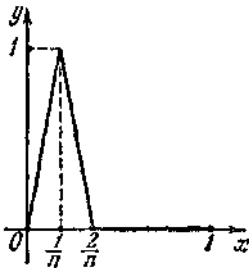


Рис. 13.

При любом натуральном  $n$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} f_n(x) = 1,$$

и, следовательно, эта последовательность функций, хотя и сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , но неравномерно.

Между тем

$$\begin{aligned} \|f_n - 0\| = \|f_n\| &= \\ &= \left( \int_0^1 f_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \left( \int_0^{1/n} (nx)^2 dx + \int_{1/n}^{2/n} (2-nx)^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left( 2 \int_0^{1/n} (nx)^2 dx \right)^{1/2} = \left( \frac{2}{3n} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

т. е. последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  стремится к нулю в смысле среднего квадратического на  $[0, 1]$ .

Из элементов некоторой последовательности функций  $f_1, f_2, f_3, \dots$  (принадлежащих  $L'_2$ ) построим ряд

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots \quad (2)$$

Сумма первых его  $n$  членов

$$\sigma_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

есть функция, принадлежащая к  $L'_2$ . Если случится, что в  $L'_2$  существует функция  $f$  такая, что

$$\|f - \sigma_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

то говорят, что ряд (2) сходится к функции  $f$  в смысле среднего квадратического и пишут

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

**Замечание 2.** Можно рассматривать пространство  $L'_2 = L'_2(a, b)$  комплекснозначных функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ , где  $f_1$  и  $f_2$  — действительные кусочно-непрерывные на  $[a, b]$  функции. В этом пространстве функции умножаются на комплексные числа и скалярное произведение функций  $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$  и  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$  определяется следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_a^b f(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_a^b [f_1(x) + if_2(x)] [\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)] dx,$$

а норма  $f$  определяется как величина

$$\begin{aligned} \|f\| = (f, f)^{1/2} &= \left( \int_a^b f \cdot \bar{f} dx \right)^{1/2} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \left( \int_a^b [f_1^2(x) + f_2^2(x)] dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

### 3.9. Ортогональная система функций

Функция  $\varphi \in L'_2 = L'_2(a, b)$  называется *нормальной*, если  $\|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{1/2} = 1$ .

Две функции  $\varphi, \psi \in L'_2$  называются *ортогональными* (между собой), если  $(\varphi, \psi) = 0$ . Система кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \quad (1)$$

(конечная или бесконечная) называется *ортогональной*, если функции имеют положительную норму и попарно ортогональны.

Система (1) называется *ортогональной и нормальной (ортонормальной)* или *ортонормированной*, если

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l, \end{cases}$$

т. е. она ортогональна и каждая входящая в нее функция имеет единичную норму.

Любая конечная ортогональная система функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  линейно независима в  $L'_2$ , т. е. из того, что

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k(x) = 0 \quad (x \in [a, b]),$$

где  $\alpha_k$ —числа, следует, что все  $\alpha_k = 0$ . В самом деле, если помножить обе части этого равенства скалярно на  $\varphi_l$  ( $l = 1, \dots, N$ ), то на основании линейных свойств скалярного произведения получим

$$\left( \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k, \varphi_l \right) = \alpha_l (\varphi_l, \varphi_l) = 0,$$

и так как  $(\varphi_l, \varphi_l) > 0$ , то  $\alpha_l = 0$  ( $l = 1, \dots, N$ ).

Если  $f \in L'_2 = L'_2(a, b)$ —произвольная функция, то число

$$\frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

называется *коэффициентом Фурье функции f* относительно функции  $\varphi_k$  ортогональной системы (1). Ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad (2)$$

порождаемый функцией  $f \in L'_2$ , называется *рядом Фурье функции f по ортогональной системе* (1).

Если система (1) ортонормальна, то  $\|\varphi_k\|=1$  ( $k=1, 2, \dots$ ) и ряд Фурье функции  $f$  записывается еще проще:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k. \quad (3)$$

Коэффициентами Фурье в этом случае являются числа  $(f, \varphi_k)$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только ортонормированные системы (1). Переход от них к произвольным ортогональным системам носит технический характер.

**Теорема 1.** Если система (1) ортонормирование то для любой функции  $f \in L_2$  норма

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|$$

среди всевозможных систем чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  достигает своего минимума для единственной системы чисел, определяемых равенствами

$$\alpha_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, \dots, N),$$

т. е. для коэффициентов Фурье функции  $f$ . Таким образом,

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|, \quad (4)$$

при этом

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2. \quad (5)$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k \right\|^2 &= \left( f - \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j \right) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=1}^N \alpha_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=1}^N \alpha_k^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N [(f, \varphi_k)^2 - 2\alpha_k (f, \varphi_k) + \alpha_k^2] + (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^N [(f, \varphi_k) - \alpha_k]^2 + (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 \geq \\ &\geq (f, f) - \sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2. \end{aligned}$$

При этом очевидно, что последнее соотношение в этой цепи обращается в равенство только в единственном случае, когда  $\alpha_k = (f, \varphi_k)$  при любом  $k$ . Тем самым мы доказали соотношения (4) и (5).

Из равенства (5), если учесть, что его левая часть есть неотрицательное число, вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^N (f, \varphi_k)^2 \leq (f, f),$$

верное при любом  $N$ . Но тогда, если система (1) состоит из бесконечного числа функций  $\varphi_k$ , то ряд, составленный из квадратов коэффициентов Фурье функции  $f$ , сходится и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 \leq (f, f), \quad (6)$$

называемое *неравенством Бесселя*.

Очень важен тот случай, когда ортонормированная система (1) такова, что неравенство (6) обращается в равенство (*равенство Парсеваля—Стеклова*)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)^2 = (f, f) \quad (7)$$

для всех функций  $f \in L'_2$ .

Чтобы выяснить значение равенства Парсеваля, зададим произвольную функцию  $f \in L'_2$  и составим для нее ее ряд Фурье

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Сумма первых  $n$  членов этого ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$

называется  *$n$ -й суммой Фурье функции  $f$  по ортогональной системе* (1). Согласно формуле (5) отклонение  $S_n(x)$  от  $f(x)$  в смысле среднего квадратического (в смысле  $L'_2$ ) равно

$$\|f - S_n\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2. \quad (8)$$

Если для функции  $f \in L'_2$  выполняется равенство Парсеваля (7), то

$$\|f - S_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (9)$$

и обратно, из (9) вытекает справедливость равенства Парсеваля (7).

Существует следующая терминология. *Ортогональная система* (1) называется *полной в  $L'_2$* , если ряд Фурье любой функции  $f \in L'_2$  сходится в смысле среднего квадратического к  $f$ , т. е. если имеет место свойство (9) для всех  $f \in L'_2$ .

Мы, таким образом, доказали, что *для того чтобы ортонормированная система (1) была полной в  $L'_2$ , необходимо и достаточно, чтобы для любой функции  $f \in L'_2$  выполнялось равенство Парсеваля (7)*.

**Примечание.** Мы уже отмечали в замечании 1 § 3.8, что  $L_2 = L_2(a, b)$  обозначает пространство функций  $f(x)$ , интегрируемых в лебеговом смысле на  $[a, b]$  вместе со своими квадратами и что  $L'_2 \subset L_2$

Рассмотрим ортонормированную на отрезке  $[a, b]$  систему непрерывных функций

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots,$

полную в том смысле, как это мы определили выше. Мы знаем, что если  $f \in L'_2$ , то для чисел

$$c_k = (f, \varphi_k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

выполняется равенство Парсевала

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Это верно и для функций  $f \in L_2$ , только интегралы надо понимать в смысле Лебега.

Но имеет место и обратное утверждение: если числа  $c_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) таковы, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

сходится, то в  $L_2$  существует функция  $f(k)$  такая, что числа  $c_k$ , являются ее коэффициентами Фурье и выполняется соотношение (9).

А в  $L'_2$  такой функции может и не быть. В этом проявляется несовершенство пространства  $L'_2$ . В пространстве  $L'_2$  недостаточно количество функций, для того чтобы это обратное утверждение имело место.

### 3.10. Полнота тригонометрических функций

В § 3.4 были приведены признаки сходимости ряда Фурье. Речь там шла об обычной сходимости. Сейчас мы сформулируем признак сходимости ряда Фурье в смысле среднего квадратического.

Совокупность всех функций  $f$  периода  $2\pi$ , ограниченных на отрезке  $[-\pi, \pi]$  и непрерывных на нем, за исключением, быть может, конечного числа точек, где  $f$  имеет разрыв первого рода, обозначим через  $L'_2 * = L'_2 * (-\pi, \pi)$ .

*Если функция  $f \in L'_2$ , то ее ряд Фурье*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1)$$

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \begin{matrix} \cos kt \\ \sin kt \end{matrix} \right\} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

*сходится к ней в смысле среднего квадратического, т. е.*



$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad (2)$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Формулу (1), где стоит знак равенства, надо читать в данном случае так: функция  $f(x)$  есть сумма ее ряда Фурье, сходящегося к ней (на отрезке  $[-\pi, \pi]$ ) в смысле среднего квадратического.

Подсчитаем непосредственно интеграл в (2), учитывая ортогональные свойства тригонометрических функций,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx - \\ &- 2 \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) + \frac{a_0^2}{2} \pi + \\ &+ \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Для функции  $f \in L_2$  это выражение при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Но тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad (f \in L_2^*), \quad (3)$$

называемое *равенством Парсеваля* для тригонометрических функций (*равенством Ляпунова*).

**Замечание.** При сравнении формулы (3) с формулой (7) § 3.9 надо учесть, что последняя была выведена для ортонормированной системы, а рассматриваемая здесь формула (3) получена для ортогональной, но не нормированной системы, какой является система

1,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos 2x$ ,  $\sin 2x$ , ...

Функции

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots \quad (4)$$

образуют ортогональную систему на отрезке  $[0, \pi]$ . Имеет место

**Теорема 1.** Любую функцию  $f \in L_2(0, \pi)$ , т. е. кусочно-непрерывную на  $[0, \pi]$ , можно разложить в ряд Фурье по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (5)$$

$(k=0, 1, 2, \dots)$

и при этом ряд (5) сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

В самом деле, эту функцию можно продолжить на  $[-\pi, \pi]$  четным образом, а затем периодически с периодом  $2\pi$  на всю действительную ось. Получится функция  $f \in L_2^*$ . Ряд Фурье функции  $f$  по функциям  $1, \cos^*, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  в силу четности  $f$  имеет в точности вид (5) и, как мы уже знаем, этот ряд сходится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического на  $[-\pi, \pi]$ . Тем более, в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

Сказанное можно выразить следующими словами: *система функций (4) ортогональная и является полной системой в  $L_2(0, \pi)$ .*

Верно также утверждение;  
*система функций*

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots \quad (6)$$

*ортогональная и является полной системой в  $L_2(0, \pi)$ , т. е. имеет место*

**Теорема 2.** Любую функцию  $f \in L_2(0, \pi)$  можно разложить в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (7)$$

$(k=1, 2, \dots),$

*сходящийся к ней в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .*

Ортогональность системы (6) проверяется непосредственно и следует из (2) § 3.5. Что же касается полноты, то она вытекает из следующих соображений.

Продолжим функцию  $f \in L_2(0, \pi)$  на отрезок  $[-\pi, \pi]$  нечетным образом и затем периодически с периодом  $2\pi$ . Ее ряд Фурье по системе  $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$  сходится в смысле среднего квадратического на  $[-\pi, \pi]$ . Тем более на  $[0, \pi]$ . При этом этот ряд имеет вид (7).

**Пример.** Разложить в ряд по синусам функцию  $u=x^2$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

Продолжим эту функцию нечетным образом на  $[-\pi, 0]$  и затем периодически с периодом  $2\pi$  на всю действительную ось. Тогда ряд Фурье этой функции  $\psi(x)$  будет состоять только из синусов:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = \frac{2\pi (-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{\pi k^3} [(-1)^k - 1],$$

откуда

$$b_{2k} = -\frac{\pi}{k}, \quad b_{2k-1} = \frac{2\pi}{2k-1} - \frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

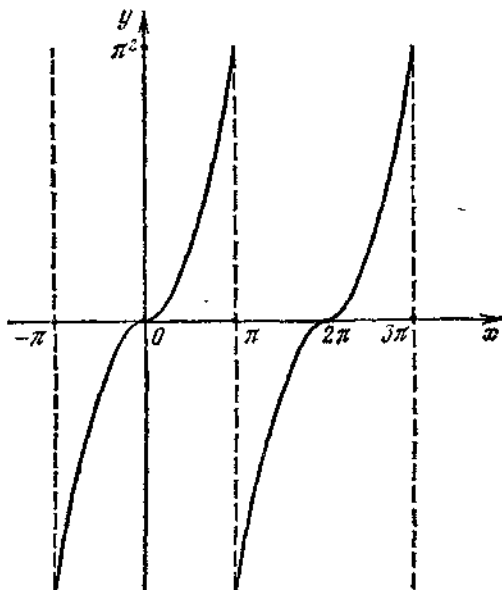


Рис. 14

Таким образом,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

График суммы этого ряда изображен на рис. 14.

### 3.11. Комплексная форма ряда Фурье

Пусть  $a_k$  и  $b_k$ —коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ . На основании формул Эйлера

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \\ &= a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}, \end{aligned}$$

где (будем считать  $b_0 = 0$ )

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad e_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}. \quad (1)$$

Отсюда

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt - i \sin kt) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos kt + i \sin kt) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt.$$

Эти два равенства можно записать в виде единой формулы

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (2)$$

Важно заметить, что если  $f(x)$ —действительная функция, то  $a_k$  и  $b_k$  действительны, а числа  $c_k$  и  $c_{-k}$ , хотя вообще и комплексны, но взаимно сопряжены:

$$c_{-k} = \overline{c_k}. \quad (3)$$

Очевидно,  $n$ -я сумма ряда Фурье функции  $f$  может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (4)$$

а сам ряд Фурье функции  $f$ —в виде ряда

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (5)$$

Мы будем говорить, что ряд (5) сходится для данного значения  $x$ , если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

Таким образом определенная сходимость называется *сходимостью в смысле главного значения*.

Ведь можно было бы считать его сходящимся, если существует предел

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{-m}^n c_k e^{ikx},$$

когда тип неограниченно возрастают независимо друг от друга. Комплексные функции

$$\{e^{ikx}\} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(6)

образуют ортогональную систему на отрезке  $[0, 2\pi]$ , так как при  $k \neq l$

$$(e^{ikx}, e^{ilx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \frac{e^{i(k-l)x}}{k-l} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

(первое равенство записано по определению скалярного произведения для комплекснозначных функций, см. замечание 2 § 3.8). Далее

$$(e^{ikx}, e^{ikx}) = \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{e^{ikx}} dx = 2\pi.$$

### 3.12. Понятие интеграла Фурье. Повторный интеграл Фурье

Рассмотрим сначала кусочно-гладкую периода  $2\pi$  функцию  $f(x)$ , удовлетворяющую свойству

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (1)$$

Это значит, что  $f$  имеет период  $2\pi$ , непрерывна и имеет непрерывную производную всюду на действительной оси, за исключением точек, которых на периоде  $[-\pi, \pi]$  конечное число; при этом в этих точках существуют пределы  $f$  и  $f'$  справа и слева. Кроме того, мы предполагаем, что в любой точке выполняется равенство (1). Это условие конечно существенно только для точек разрыва  $f$ , потому что в точках непрерывности оно выполняется автоматически. Совокупность всех указанных периодических функций  $f$  обозначим через  $L^{**}$ .

Для каждой функции  $f \in L^{**}$  можно рассматривать ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (2)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad (k=1, 2, \dots), \quad (4)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (5)$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k=0, 1, 2, \dots; b_0=0).$$

Выпишем еще  $N$ -ю сумму ряда Фурье функции  $f$ :

$$S_N^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}. \quad (6),$$

В теории рядов Фурье доказывается, что для любой функции  $f \in L^*$  имеет место

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^*(x) = f(x), \quad (7)$$

т. е. ряд Фурье функции  $f \in L^*$  сходится к ней в любой точке  $x$ .

Интегралы Фурье могут быть введены по аналогии с рядами Фурье.

Теперь мы будем рассматривать непериодические функции  $f$  кусочно-гладкие и абсолютно интегрируемые на действительной оси. Для них, таким образом, интеграл (несобственный)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

конечен.

Термин кусочно-гладкая функция понимается в следующем смысле. Функция  $f$  непрерывна и имеет непрерывную производную для всех точек  $x$  действительной оси за исключением конечного числа точек, где функция  $f$  или ее производная  $f'$  разрывна. Однако в точках разрыва существуют правый и левый пределы как  $f$ , так и  $f'$ , при этом имеет место равенство

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Совокупность указанных непериодических функций обозначим через  $L' = L'(-\infty, \infty)$ .

По аналогии с коэффициентами Фурье мы вводим для функций  $f \in L'$  функции

$$a(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st dt \quad (-\infty < s < \infty), \quad (3')$$

$$b(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st dt \quad (-\infty < s < \infty), \quad (4')$$

$$a(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \quad (-\infty < s < \infty). \quad (5')$$

В то время как коэффициенты Фурье определяются для дискретных значений  $k = 0, 1, 2, \dots$ , их аналоги (3')—(5') являются уже функциями непрерывного аргумента  $s$ .

По нашему предположению функция  $f$  кусочно-непрерывна, тем не менее функции  $a(s)$ ,  $b(s)$  и  $c(s)$  непрерывны.

Например, пусть для простоты функция  $f$  имеет только одну точку разрыва  $x_0$ . Тогда интеграл (3') можно разбить на два интеграла

$$a(s) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} f(t) \cos ts dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_0} f(t) \cos ts dt. \quad (8)$$

Если видоизменить функцию  $f(t)$  в точке  $t=x_0$ , считая, что  $f(x_0)=f(x_0+0)$ , то под первым интегралом в (8) будет находиться непрерывная функция от  $s$  и  $t$  ( $-\infty < s < \infty, x_0 < t < \infty$ ). По признаку Вейерштрасса первый интеграл равномерно сходится, потому что

$$|f(t) \cos ts| \leq |f(t)|, \quad \int_{x_0}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Но тогда первый интеграл есть непрерывная функция от  $s$ . Подобным образом доказывается непрерывность по  $s$  и второго интеграла (8).

Отметим еще, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a(s) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} b(s) = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = 0. \quad (11)$$

Например, чтобы доказать свойство (9), введем в интеграле (3') вместо переменной  $t = u + \frac{\pi}{s}$ . Тогда

$$\begin{aligned} a(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{s}\right) \cos\left(su + \pi\right) du = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u + \frac{\pi}{s}\right) \cos us du = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) \cos ts dt. \end{aligned}$$

Из этого равенства и из (3') следует:

$$|a(s)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) - f(t) \right] \cos ts \, dt \right| \ll \\ \ll \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(t + \frac{\pi}{s}\right) - f(t) \right| dt \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

Последнее соотношение (стремление к нулю), конечно, надо доказывать, но мы это делать не будем.

Аналогом отдельного члена ряда Фурье (гармоники) естественно считать функцию

$$a(s) \cos xs + b(s) \sin xs = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos ts \cos xs + \sin st \sin xs] dt = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x)s \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{is(t-x)} + e^{-is(t-x)}] dt = \\ = c(s) e^{isx} + c(-s) e^{-isx}. \quad (12)$$

Точнее, аналогом члена ряда Фурье надо считать

$$(a(s) \cos xs + b(s) \sin xs) ds = (c(s) e^{isx} + c(-s) e^{-isx}) ds. \quad (12')$$

Аналогом  $N$ -й суммы Фурье надо считать следующий интеграл (см. (12)):

$$S_N(x) = \int_0^N [a(s) \cos xs + b(s) \sin xs] ds = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^N \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x)s \, dt ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^N f(t) \cos(t-x)s \, ds = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^N \cos(t-x)s \, ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x} dt. \quad (13)$$

Мы переставили местами интегралы. В данном случае это законно. На основании известной в анализе теоремы Фубини переставлять интегралы в кратном интеграле можно, если после перестановки получится абсолютно сходящийся кратный интеграл. В данном случае

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^N |f(t) \cos(t-x)s| \, dt ds \ll \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^N |f(t)| \, ds dt = \\ = \frac{N}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty.$$



В силу (12) функцию  $S_N(x)$  можно также записать в комплексной форме

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \int_0^N [c(s) e^{tsx} + c(-s) e^{-tsx}] ds = \\ &= \int_{-N}^N c(s) e^{tsx} ds = \int_{-N}^N e^{tsx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{tsx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt ds. \quad (13') \end{aligned}$$

Функцию

$$S_N(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin N(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin Nu}{u} du \quad (14)$$

называют *простым интегралом Фурье*. Можно доказать, что если  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , то для любого  $x$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x), \quad (15)$$

т. е. имеет место свойство, аналогичное свойству (7) для рядов Фурье. Отметим, что  $N$ -я сумма ряда Фурье периодической функции может быть записана следующим образом (пояснения ниже):

$$\begin{aligned} S_N^*(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \cos kx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \sin kx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(t-x) \right] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(N+1/2)(t-x)}{2 \sin((t-x)/2)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u+x) \frac{\sin(N+1/2)u}{2 \sin(u/2)} du. \end{aligned} \quad (16)$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k\alpha = \frac{\sin(N+1/2)\alpha}{2 \sin(\alpha/2)}.$$

В последнем же равенстве (16) мы сделали замену переменной  $t = u+x$ . В силу этой замены интеграл по отрезку  $[-\pi, \pi]$  по  $t$  перейдет в интеграл по  $[x-\pi, x+\pi]$  по  $u$ , но последний отрезок можно снова заменить на отрезок  $[-\pi, \pi]$ , потому что подынтегральная функция (от  $u$ ) периода  $2\pi$  (см. (3) § 3.3).

Мы видим, что интеграл в правой части (16) очень похож на интеграл (14). Поэтому не так уж удивительно, что оба эти интеграла стремятся при  $N \rightarrow \infty$  к функции  $f(x)$ .

Из (13) и (15) следует, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^N ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x) s dt = f(x). \quad (17)$$

Следовательно, для любой функции  $f \in L'(-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x) s dt = f(x). \quad (18)$$

Это очень важное равенство, которое составляет основу в теории интегралов Фурье.

Интеграл в (18) называется *повторным интегралом Фурье*.

Равенство (18) утверждает, что для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$  повторный интеграл Фурье от  $f$  в точке  $x$  равен значению функции  $f$  в точке  $x$ .

В интеграле (18) менять порядок интегрирования нельзя. Если бы мы произвели такую замену—пришлось бы тогда интегрировать по  $s$  функцию  $\cos(t-x) s$  (при фиксированных  $t$  и  $x$ ) на бесконечном интервале  $(-\infty, \infty)$ , но такой интеграл не имеет смысла.

Таким образом, в повторном интеграле (18) мы должны сначала интегрировать функцию  $f(t)\cos(t-x) s$  по  $t$  на  $(-\infty, \infty)$ , а затем по  $s$  на  $(0, \infty)$ . Оба интеграла несобственные. Интеграл по  $t$ , очевидно, абсолютно сходится. Что же касается интеграла по  $s$ , то это, вообще говоря, не так.

Буквы  $s$  и  $t$  в интеграле (18) можно, конечно, заменить при желании любыми другими буквами  $s', t'$ , что не изменит величину интеграла.

Из (13) и (15) мы получили формулу (18). С другой стороны, из (13') и (15) мы получим другую важную формулу, верную для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{isx} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-ist} dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = f(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt = \\ = \sqrt{2\pi} c(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N f(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{ixt} dt = \\ = \sqrt{2\pi} c(-x). \end{aligned}$$

$f(x)$  называется преобразованием Фурье или прямым преобразованием Фурье функции  $f$ , а  $\tilde{f}(x)$  называется обратным преобразованием Фурье функции  $f$ . Операции  $\sim$  и  $\sim$  взаимно обратны. Если к функции  $f$  применить операцию  $\sim$ , а к полученной функции  $\tilde{f}$  применить операцию  $\sim$ , то, как видно из (19), получим снова функцию  $f$ :

$$\tilde{\tilde{f}} = f.$$

**Задача.** Доказать следующие формулы для функций  $f \in L'(-\infty, \infty)$ :

- 1)  $\tilde{\tilde{f}}(-t) = \tilde{f}(t)$ ;
- 2)  $\tilde{\tilde{f}}(-x) = \tilde{f}(x)$ ;
- 3)  $\widetilde{\tilde{f}(at)} = \frac{1}{|a|} \tilde{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ ;
- 4)  $\widehat{f}(at) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$  ( $a \neq 0$ );
- 5)  $\widehat{e^{i\mu t} f} = e^{-i\mu t} \widehat{f} = f(x + \mu)$  ( $\mu$  — действительное);
- 6)  $\tilde{\tilde{f}} = f$ .

Например,

$$\begin{aligned} \widehat{e^{i\mu t} f} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu t} e^{ixt} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mu+x)t} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iut} du = \hat{f}(\mu+x) = f(\mu+x). \end{aligned}$$

### 3.13. Косинус- и синус-преобразования Фурье

В силу (18) § 3.12 для  $f \in L'(-\infty, \infty)$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t-x)s dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ts dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs ds \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ts dt. \quad (1) \end{aligned}$$

Если функция  $f(t)$  четная, то второй интеграл в правой части (1) равен нулю, а в первом интегрирование по  $t$  на  $(-\infty, \infty)$  сводится к интегрированию по  $(0, \infty)$ , и мы получим формулу

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs ds \int_0^{\infty} f(t) \cos ts dt = f(x). \quad (2)$$

Для нечетной же функции  $f(t)$  первый интеграл справа в (1) равен нулю, а функция  $f(t) \sin ts$  четная. Поэтому

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs ds \int_0^{\infty} f(t) \sin ts dt = f(x). \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) можно считать, что  $x \geq 0$ , а  $f(t)$  есть произвольная кусочно-гладкая функция, принадлежащая  $L'(0, \infty)$ . Ведь в этих формулах используются только значения  $f$  на полуоси  $[0, \infty)$ . Поясним это замечание подробнее.

Пусть задана кусочно-гладкая функция  $f \in L'(0, \infty)$  такая, что  $f(0) = f(0+0)$ . Продолжив ее на всю действительную ось четным образом, получим четную кусочно-гладкую функцию  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , для которой верна формула (2); в частности, она верна для  $x \geq 0$ .

Будем теперь считать, что для нашей кусочно-гладкой функции  $f \in L'(0, \infty)$  выполняется равенство  $f(0) = 0$  (вообще  $f(0+0) \neq f(0)$ ). Продолжим  $f$  нечетным образом на  $(-\infty, \infty)$ , получим нечетную кусочно-гладкую функцию  $f \in L'(-\infty, \infty)$ , для которой верна формула (3); в частности, она верна для  $x \geq 0$ . Подчеркнем, что в формуле (3)

$f(0) = 0$ , в то время как в формуле (2) значение  $d(0)=f(0+0)$  может быть любым.

Интегралы

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos ts dt, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin ts dt$$

называются соответственно *косинус-* и *синус-преобразованиями Фурье*. Из формул (2) и (3) непосредственно следует, что если к кусочно-гладкой функции  $f \in L'(0, \infty)$  применить последовательно два раза косинус- (или синус-) преобразование Фурье, то получим исходную функцию  $f$ . В этом смысле косинус- (синус-) преобразование Фурье является обратным самому себе.

### 3.14. Примеры

Справедливы равенства (пояснения ниже)

$$1) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \frac{\sin as}{s} ds.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \text{sign } x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin xs \frac{1 - \cos s}{s} ds.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b \\ 0, & x < a, b < x \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s(x-a) - \sin s(x-b)}{s} ds.$$

$$4) \int_0^{\infty} e^{-as} \cos sx ds = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$5) \int_0^{\infty} e^{-as} \sin sx ds = \frac{x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0).$$

$$6) e^{-as} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xs}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0, 0 \leq s < \infty).$$

$$7) e^{-as} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{a^2 + x^2} \sin xs dx \quad (a > 0, 0 < s < \infty).$$

$$8) f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin s\pi}{1-s^2} \sin sx ds.$$

$$9) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} s}{1-s^2} \cos sx \, ds.$$

$$10) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \cos sx \left[ \frac{1}{(s-\beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(s+\beta)^2 + \alpha^2} \right] ds \quad (\alpha > 0).$$

$$11) f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x = \\ = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \sin sx \, ds}{[(s-\beta)^2 + \alpha^2][(s+\beta)^2 + \alpha^2]} \quad (\alpha > 0).$$

Пользуясь обычными методами теории неопределенных интегралов, не видно, как можно вычислить интегралы, стоящие в правых частях равенств 1) —3). С другой стороны, функции 1) —3) кусочно-гладкие и принадлежат к  $L'(-\infty, \infty)$  ( $f \in L'(-\infty, \infty)$ ). Поэтому к ним применима формула представления (1) § 3.13. Эта формула упрощается и имеет вид (2) § 3.13, если  $f$  — четная функция, а если  $f$  — нечетная, то она имеет вид (3) § 3.13. Например, функция (1) четная и потому

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \, ds \int_0^{\pi/2} \cos ts \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \frac{\sin sa}{s} \, ds,$$

где надо считать, что в точках разрыва  $f$  выполняется равенство

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Интегралы 4), 5) вычисляются интегрированием по частям.

Используя равенство 4), имеем

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xs}{a^2+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xs \, dx \int_0^{\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = e^{-a|x|},$$

где последнее равенство имеет место в силу формулы (2) § 3.13, применимой, потому что  $e^{-a\lambda} \in L'(0, \infty)$  — гладкая функция. Итак, равенство 6) доказано.

Подобными рассуждениями получается формула 7) из 5) применением формулы (3) § 3.13.

Функция 8) нечетная кусочно-гладкая. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (3) § 3.13, где внутренний интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin st f(t) dt &= \int_0^{\pi} \sin st \sin t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos t (s-1) - \cos t (s+1)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \pi (s-1)}{s-1} - \frac{\sin \pi (s+1)}{s+1} \right] = \frac{\sin \pi s}{1-s^2}. \end{aligned}$$

Представление функции 9) получается [аналогично с применением формулы (2) § 3.13.

Функция 10) четная. Чтобы получить нужный интеграл, представляем ее по формуле (2) § 3.13, где внутренний интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos \beta t \cos st dt &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos (\beta + s) t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cos (\beta - s) t dt = \\ &= \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{(\beta + s)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\beta - s)^2 + \alpha^2} \right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство записано в силу 4).

Аналогичные рассуждения проходят для функции 11) при использовании формулы (3) § 3.13.

Наконец, приведем еще один пример, методика вычисления которого отлична от предыдущих.

12) Найти косинус-преобразование функции  $\exp(-t^2)$ .

Пусть

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda = I(s).$$

Легко видеть, что

$$I(0) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Дифференцируя функцию  $I(s)$ , получаем

$$I'(s) = - \int_0^{\infty} \lambda \exp(-\lambda^2) \sin \lambda s d\lambda$$

(дифференцирование законно, так как последний интеграл равномерно сходится). Интегрируя по частям, производную  $I'(s)$  можно представить в виде

$$(\lambda \exp(-\lambda^2) d\lambda = dv, \sin \lambda s = u)$$

$$\begin{aligned} I'(s) &= \frac{\sin \lambda s}{2} \exp(-\lambda^2) \Big|_{\lambda=0}^{\infty} - \frac{s}{2} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda = \\ &= -\frac{s}{2} I(s). \end{aligned}$$

Решая последнее дифференциальное уравнение первого порядка, имеем

$$\frac{dI}{I} = -\frac{s}{2} ds, \ln \left| \frac{I}{C} \right| = -\frac{s^2}{4}, \quad I(s) = C \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

Из условия  $I(0) = \sqrt{\pi}/2$  находим, что  $C = \sqrt{\pi}/2$ . Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2) \cos \lambda s d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{s^2}{4}\right).$$

### 3.15. Приближение интеграла Фурье

Поясним физическую сторону понятия интеграла Фурье. Рассмотрим непериодическое движение, при котором ордината  $y$  некоторой точки есть функция  $y = f(x)$  от времени  $x$ .

Функцию  $f(x)$  можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} [a(s) \cos xs + b(s) \sin xs] ds = \\ &= \int_0^{\infty} [c(s) e^{-isx} + c(-s) e^{isx}] ds. \end{aligned}$$

При достаточно большом натуральном  $N$ , а затем при достаточно малых  $\Delta s$  ( $\Delta s = \Delta s_j$ ) приближенно



$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx \int_0^N [a(s) \cos xs + b(s) \sin xs] ds = \\
 &= \int_0^N [c(s) e^{-ixs} + c(-s) e^{ixs}] ds \approx \\
 &\approx \sum_j [a(s_j) \cos xs_j + b(s_j) \sin xs_j] \Delta s = \\
 &= \sum_j [c(s_j) e^{-ixs_j} + c(-s_j) e^{ixs_j}] \Delta s. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Первое приближение можно осуществить с любой точностью во всяком случае, если интегралы от  $a(s)$  и  $b(s)$  (следовательно, и от  $c(s)$ ) абсолютно сходятся на  $(0, \infty)$ , в частности, если функции  $a(s)$ ,  $b(s)$  (следовательно,  $c(s)$ ) равны нулю для  $s > s_0$ , где  $s_0$ —некоторое число. Второе приближение можно осуществить во всяком случае для значений  $x$ , принадлежащих к произвольному заданному отрезку  $[x_1, x_2]$ . При этом для заданного отрезка  $[x_1, x_2]$  подбираем нужные числа  $s_j$ , делящие  $[0, N]$  на равные части. Но тогда движение  $y = f(x)$  будет приближенно равно на отрезке времени  $[x_1, x_2]$  сумме гармонических колебаний—даже с общим периодом.

*Спектром периодической функции  $f(x)$*  называют совокупность ее коэффициентов Фурье. По спектру, в частности, видно, из каких нетривиальных (не равных тождественно нулю) гармоник состоит периодическое движение  $y = f(x)$ .

*Спектром непериодической функции  $f(x)$*  называются порождаемые ею функции  $a(s)$  и  $b(s)$  или функция  $c(s)$ .

Если  $a(s)$  и  $b(s)$  равны нулю вне интервала  $(p, q)$ , то сумма, приближающая  $f(x)$  по формуле (1), состоит из гармонических колебаний с частотами  $s_j \in (p, q)$ .

Функцию  $f(s) = \sqrt{2\pi}c(s)$  тоже называют спектром  $f$ .

### 3.16. Сумма Фейера

Выше мы рассмотрели ряды Фурье функции  $f(x)$  и установили достаточные признаки сходимости ряда Фурье к функции  $f(x)$ .

Математики Э. Дюбуа Реймонд и Л. Фейер построили примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых расходятся в одной точке или на множестве всех рациональных точек периода  $[-\pi, \pi]$ .

Таким образом, если про функцию  $f(x)$  известно только, что она непрерывна, то этого недостаточно, чтобы сказать, что ее ряд Фурье сходится. Для сходимости нужно наложить на функцию  $f$  еще некоторые добавочные условия. В наших признаках такими доба-

вочными условиями были существование производной у функции  $f$  или же она должна удовлетворять условию Дирихле (быть кусочно-монотонной или, как еще говорят, иметь конечное число максимумов и минимумов).

Впрочем, эти условия могут быть заменены на более общие достаточные условия, на которых мы не будем останавливаться.

Класс периодических и непрерывных на всей действительной оси функций будем обозначать через  $C^*$ . В этом классе (пространстве) можно ввести норму:

$$\|f\|_{C^*} = \max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x)|.$$

Свойства нормы (см. § 3.8) легко проверяются.

Итак, ряд Фурье функции  $f \in C^*$  не обязательно сходится к  $f(x)$  во всех точках  $x \in [-\pi, \pi]$ .

В связи с этим приобретает большое значение тот факт, что ряд Фурье произвольной функции  $f \in C^*$  суммируется к ней методом средних арифметических и притом равномерно на всей действительной оси.

Зададим функцию  $f \in C^*$  и составим для нее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad (k=1, 2, \dots).$$

Пусть

$$S_n = S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_2^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

—  $n$ -я частная сумма ряда Фурье функции  $f$  и

$$\sigma_n = \sigma_n(f; x) = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (1)$$

—  $n$ -я средняя арифметическая сумма Фурье функции  $f$ .

Функция  $\sigma_n(f; x)$  называется *суммой Фейера порядка  $n$* . Первой нашей задачей будет получить компактное выражение для  $\sigma_n$ . Так как (см (16) § 3.12)

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_k(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n D_k(t) \right] dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^k \cos jt = \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t / \left(2 \sin \frac{t}{2}\right)$$

— ядро Дирихле.

Чтобы упростить выражение в квадратных скобках под знаком интеграла, предварительно подсчитаем сумму:

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \psi(x), \quad (2)$$

Умножая левую и правую части равенства (2) на  $2 \sin \frac{x}{2}$ ,

получим

$$\sum_{k=0}^n [\cos kx - \cos(k+1)x] = 2\psi(x) \sin \frac{x}{2}$$

или

$$[1 - \cos x] + [\cos x - \cos 2x] + \dots + [\cos nx - \cos(n+1)x] = 2\psi(x) \sin \frac{x}{2},$$

$$1 - \cos(n+1)x = 2\psi(x) \sin \frac{x}{2}.$$

Из последнего равенства находим, что

$$\psi(x) = \frac{1 - \cos(n+1)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (3)$$

На основании (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_1^n D_k(x) &= \frac{1}{2} + \sum_1^n \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sum_0^n \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt, \quad (4)$$

где

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2. \quad (5)$$

Функция  $F_n(t)$  называется *ядром Фейера порядка  $n$* . Легко видеть, что

$$F_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_1^n \frac{n+1-k}{n+1} \cos kt = \frac{1}{2} + \sum_1^n \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) \cos kt. \quad (6)$$

Поэтому сумму  $\sigma_n(x)$  можно еще записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \frac{n+1-k}{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (7) \end{aligned}$$

**Замечание.** Из формулы (7) видно, что сумма Фейера  $\sigma_n(f; x)$  отличается от суммы Фурье  $S_n(f; x)$  функции  $f(x)$  тем, что каждый член  $(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  суммы  $S_n(f; x)$  умножен на число

$$\lambda_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n+1} \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Отметим следующие свойства ядра Фейера  $F_n(t)$ :

1)  $F_n(t)$  — неотрицательный, четный тригонометрический полином порядка  $n$  (см. (5) и (6));

$$2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F_n(t) dt = 1 \quad (8)$$

(см. (6), учесть ортогональность функций  $\cos kx$  ( $k = 1, \dots, n$ ) к единице);

3) для всякого числа  $\delta > 0$

$$\int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt \leq \frac{1}{2(n+1)} \int_{\delta}^{\pi} \frac{dt}{\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2(n+1)} \left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^{-2} \int_{\delta}^{\pi} dt = \frac{\pi - \delta}{2(n+1) \left(\sin \frac{\delta}{2}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Теорема 1** (Фейера). Для любой непрерывной на действительной оси функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  (т. е.  $f \in C^*$ ) ее сумма Фейера порядка  $n$  равномерно стремится к ней при  $n \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{C^*} = \max_x |f(x) - \sigma_n(f; x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

**Доказательство.** В силу свойства 2) ядра Фейера имеем

$$\sigma_n(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - f(x) =$$

$$= \frac{i!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] F_n(t) dt. \quad (10)$$

В силу (10) и свойства 1) ядра  $F_n(t)$  имеем

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt \leq$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{|t| < \delta} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} F_n(t) |f(x+t) - f(x)| dt, \quad (11)$$

где  $\delta > 0$  — пока произвольное число ( $0 < \delta < \pi$ ).

Так как по условию теоремы функция  $f(x)$  непрерывна, то она обязательно ограничена

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Тогда

$$|f(x+t) - f(x)| \leq 2M, \quad (12)$$

для любых  $x$  и  $t$ .

Далее функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ , поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать число  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (13)$$

при  $|t| \leq \delta$  и любых  $x, (x+t) \in [-\pi, \pi]$ .

Теперь, взяв в (11)  $\delta$  такое, как указано в (13), на основании свойства ядра 2), с учетом (12) и (13), получаем

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f; x) - f(x)| &\leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt + \frac{2M}{\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_n(t) dt = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь при достаточно большом  $n_0$  на основании свойства 3) ядра  $F_n(t)$  второе слагаемое справа в последнем неравенстве при  $n > n_0$  можно сделать меньшим  $\varepsilon/2$ . Итак, окончательно получаем

$$|\sigma_n(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n > n_0, x \in [-\pi, \pi]).$$

Таким образом,

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{C^*} = \max_x |\sigma_n(f; x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n > n_0), \quad (14)$$

т. е. последовательность  $\{\sigma_n(f; x)\}$  равномерно сходится на  $[-\pi, \pi]$  к функции  $f(x)$ . Теорема доказана.

Мы уже отмечали выше, что средние арифметические числового ряда могут стремиться к пределу, в то время как сам ряд может расходиться. Это явление как раз имеет место для рядов Фурье непрерывных функций.

Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится на множестве всех рациональных чисел (счетное множество), однако это не мешает тому, как это мы доказали, что средние арифметические суммы Фурье для любой непрерывной функции  $f$  сходятся к  $f$  и даже равномерно.

**Следствие (теорема Вейерштрасса).** Для любой периодической непрерывной на действительной оси функции  $f(x)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется тригонометрический многочлен  $T_n(x)$  такой, что

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in [-\pi, \pi]).$$

Для доказательства достаточно в качестве  $T_n(x)$  взять сумму Фейера  $\sigma_n(f; x)$  при достаточно большом  $n$ .

### 3.17. Полнота систем функций в $C$ и $L'_2$

Систему непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \quad (1)$$

называют *полной* в пространстве  $C[a, b]$  непрерывных функций, если для любой функции  $f \in C[a, b]$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется конечная линейная комбинация из этих функций

$$\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \quad (2)$$

такая, что для всех  $x \in [a, b]$  выполняется неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Говорят еще, что система (1) полна в пространстве  $L'_2(a, b)$ , если для любой функции  $f \in L'_2(a, b)$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация (2) такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_{L'_2} = \left( \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Легко видеть, что если система (1) полна в  $C[a, b]$ , то она полна также в  $L'_2(a, b)$ , потому что

$$\left( \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left( \int_a^b \varepsilon^2 dx \right)^{1/2} = \varepsilon \sqrt{b-a}.$$

В § 3 9 мы рассматривали произвольную ортонормальную на отрезке  $[a, b]$  систему функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  и называли ее *полной* в  $L'_2(a, b)$ , если ряд Фурье любой функции  $f \in L'_2(a, b)$  по этой системе сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического.

Таким образом, в случае ортонормированной системы

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \quad (3)$$

мы имеем два определения полноты в  $L'_2(a, b)$ . Они эквивалентны. В самом деле, пусть ортонормированная система (3) полна в  $L'_2(a, b)$  в смысле § 3 9, и пусть  $f \in L'_2(a, b)$ . Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

а это показывает, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать линейную комбинацию

$$\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k,$$

где  $c_k = (f, \varphi_k)$ , для которой

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} < \varepsilon.$$

Следовательно, система (3) полна в  $L'_2(a, b)$  и в смысле второго определения.

Обратно, если система (3) полна в смысле второго определения и задана функция  $f \in L'_2(a, b)$ , то для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k$$

такая, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} < \varepsilon.$$

Но по теореме 1 § 3.9

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} \leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} < \varepsilon.$$

Имеем далее для  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)}^2 &= (f, f) - \sum_{k=1}^{n_0} (f, \varphi_k)^2 \geq \\ &\geq (f, f) - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k)^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)}^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k \right\|_{L'_2(a, b)} < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0),$$

и, следовательно, ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней в смысле среднего квадратического, т. е. система (3) полна в смысле определения в § 3.9.

В § 3.9 было сформулировано без доказательства важное утверждение о том, что ряд Фурье функции  $f \in L_2^*$  по тригонометрической системе сходится к  $f$  в смысле среднего квадратического. После того как мы доказали теорему Вейерштрасса (см. § 3.16), это утверждение можно полностью обосновать.



В самом деле, мы уже пользовались теоремой 1 § 3.9, утверждающей справедливость равенства

$$\min_{\alpha_k} \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right\|,$$

где  $c_k$ —коэффициенты Фурье функции  $f \in L_2(a, b)$  по ортонормированной системе  $\{\varphi_k\}$ . Отметим, что это равенство имеет место и для произвольной ортогональной, не обязательно нормальной системы. В этом случае коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

ортгонална на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Теорема Вейерштрасса выражает тот факт, что эта система полна в  $C^*$ , но тогда, как мы знаем, она полна в  $L_2^*$ .

А это и означает, что ряд Фурье по тригонометрической системе любой функции  $f \in L_2^*$  сходится к ней в смысле среднего квадратического.

### 3.18. Сведения из теории кратных рядов Фурье

Будем рассматривать функции  $f(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , от многих переменных, заданных на некотором  $n$ -мерном прямоугольнике

$$\Delta = \{a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n\},$$

где  $a_j, b_j$ —действительные числа.

Из теории кратных интегралов следует, что если интегрируемая на  $\Delta$  функция  $f(x)$ , представима в виде произведения интегрируемых функций от одного переменного

$$f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j),$$

то

$$\int_{\Delta} f(x) dx = \prod_{j=1}^n \int_{\Delta_j} f_j(x_j) dx_j, \quad (1)$$

где  $\Delta_j = [a_j, b_j]$ . Прямоугольник  $\Delta$  можно рассматривать как прямое произведение отрезков  $\Delta_j$ :

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_n.$$

Отметим, что в равенстве (1) слева стоит  $n$ -кратный интеграл, а справа стоят одномерные интегралы Римана от функций  $f_j(x_j)$ , заданных на  $\Delta_j$ .

Функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \quad (k_j = 0, \pm 1, \dots; j = 1, 2, \dots, n),$$

как мы знаем имеют период  $2\pi$  по переменной  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Эти функции (от одного переменного  $x_j$ ) непрерывны на всей оси  $x_j$  и на периоде  $[-\pi, \pi]$ , а следовательно, интегрируемы по Риману на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Кроме того, нам известно, что функции  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j}$  образуют

ортонормальную систему  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \right\}$  на  $[-\pi, \pi]$ , т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_j x_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il_j x_j} dx_j = \begin{cases} 0, & k_j \neq l_j, \\ 1, & k_j = l_j. \end{cases} \quad (2)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), \quad \mathbf{kx} = \sum_{j=1}^n k_j x_j,$$

$$\Delta_* \equiv \Delta_*^{(n)} = \{-\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда в силу (1) и (2) функции

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{ik_1 x_1} e^{ik_2 x_2} \dots e^{ik_n x_n} \equiv \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}} \quad (3)$$

$$(k_j = 0, \pm 1, \dots; j = 1, \dots, n)$$

от  $n$  переменных будут ортонормальны на кубе  $\Delta_*$ :

$$\int_{\Delta_*} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{kx}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\mathbf{l x}} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - l_j) x_j} dx_j = \begin{cases} 0, & \mathbf{k} \neq \mathbf{l}, \\ 1, & \mathbf{k} = \mathbf{l}. \end{cases}$$

Под равенством целочисленных векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{l}$  мы, как обычно, понимаем равенство соответствующих их координат и  $\mathbf{k} \neq \mathbf{l}$  означает, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{l}$  отличаются хотя бы одной координатой. Будем рассматривать функции  $f(x)$  периода  $2\pi$  по каждой из переменных  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Символ  $C^*$  будет обозначать класс (пространство) непрерывных функций с нормой (см. § 3.8)

$$\|f\|_{C^*} = \max_{\mathbf{x} \in \Delta_*} |f(\mathbf{x})|.$$

Множество всех кусочно-непрерывных периодических функций, для которых введено скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \int_{\Delta_*} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (4)$$

мы будем обозначать  $L_1^* \equiv L_1^*(\Delta_*)$  и называть пространством  $L_2^*$ .  
 Норма в этом классе (пространстве) вводится так:

$$\|f\| = \|f\|_{L_2^*} = \left( \int_{\Delta_*} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Тот факт, что  $f(x)$ —кусочно-непрерывная функция, означает следующее: куб  $\Delta_*$  (период) можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно-гладких поверхностей так, что на каждой части функция  $f(x)$  непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы.

Все свойства нормы (см. § 3.8) для пространства  $L_2^*$  выполнены. Под нулевой функцией ( $f = 0$ ) мы понимаем функцию, равную нулю всюду на  $\Delta_*$ , кроме конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

Например, в случае функций от двух переменных, мы допускаем, что нулевая функция  $f(x_1, x_2)$  может быть не равна нулю в конечном числе точек  $\Delta_*$  или на конечном числе кусочно-гладких кривых.

Отметим, что  $n$ -мерная мера Жордана указанных поверхностей равна нулю, поэтому  $n$ -кратный интеграл от нулевой функции по  $\Delta_*$  равен нулю.

Пусть теперь функция  $f(t)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_n)$ , периода  $2\pi$  по каждой из переменных и известно, что ее можно разложить в кратный ряд:

$$f(t) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \equiv \sum c_k e^{ikt}, \quad (5)$$

где последняя сумма распространена на всевозможные векторы  $k = (k_1, \dots, k_n)$  с целыми координатами

Спрашивается, как определить по функции  $f(t)$  коэффициенты  $c_k$ . Здесь можно поступить таким же образом, как это мы делали в § 3.3 в одномерном случае, т. е. для функции  $f$  от одного действительного переменного.

Если ряд (5) равномерно сходится на  $\Delta_*$ , то (аналогично, как и для функции одного переменного, см. § 3.6)

$$c_k \equiv c_k(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (6)$$

Числа  $c_k$ , вычисляемые по формуле (6), называют *коэффициентами Фурье функции  $f(t)$* , а ряд (5), в который вместо  $c_k$  подставлены коэффициенты Фурье, называют *рядом Фурье функции  $f(t)$*  в комплексной форме.

Итак, если функция  $f(t)=f(t_1, \dots, t_n)$  представима в виде суммы ряда (5), равномерно сходящегося на  $\Delta_*$ , то числа  $c_k$  необходимо являются коэффициентами Фурье функции  $f(t)$ .

Если в ряде (5) коэффициенты  $c_k$  вычислены по формулам (6), то ряд (5) будем называть рядом Фурье функции  $f(t)$  независимо от того, сходится он к  $f(t)$  или нег. В этом случае будем писать

$$f(t) \sim \sum c_k e^{ikt}. \quad (7)$$

Если функция  $f \in C^*$ , то ряд (7) не обязательно сходится к  $f(t)$  во всех точках  $t \in \Delta_*$  (см. § 3.16).

Зададим вектор  $N=(N_1, \dots, N_n)$ , где  $N_j$ -натуральные числа, и определим соответствующую ему частичную сумму Фурье функции  $f$  следующим образом:

$$\begin{aligned} S_N(f; x) &= \\ &= \sum_{\substack{|k_j| < N_j \\ j=1, \dots, n}} c_k e^{ikx} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_*} \sum_{\substack{|k_j| < N_j \\ j=1, \dots, n}} e^{-ik(t-x)} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^n D_{N_j}(t_j - x_j) f(t) dt, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$D_{N_j}(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N_j} \cos ku = \frac{\sin\left(N_j + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}}$$

— ядро Дирихле порядка  $N_j$ . Здесь мы воспользовались формулой Эйлера  $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$ .

В частности, если  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$ , то

$$S_N(f; x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \prod_{j=1}^n D_N(t_j - x_j) f(t) dt. \quad (8')$$

Многомерный аналог суммы Фейера имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_N(f; x) &= \frac{\sum_{k_1=0}^{N_1} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n} S_k(f; x)}{(N_1+1) \dots (N_n+1)} = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(t-x) f(t) dt = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) f(u+x) du, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_N(u) = \prod_{j=1}^n F_{N_j}(u_j), \quad F_{N_j}(t) = \frac{1}{2(N_j+1)} \left( \frac{\sin \frac{N_j+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

— ядро Фейера порядка  $N_j$ . Если  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$ , то в формуле (9) ядро  $\Phi_N(u)$  несколько упростится.

Так как функции  $e^{ikt}$  при  $k \neq 0$  ортогональны к 1, то

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) du = 1. \quad (10)$$

Далее, если  $\Delta_\varepsilon = \{|u_j| \leq \varepsilon, j=1, \dots, n\}$ , то

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du \leq \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_*} \Phi_N(u) du = 1.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du \rightarrow 0 \quad (11)$$

при  $N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty$ .

Докажем последнее свойство для двумерного случая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\varepsilon} \Phi_N(u) du &= \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left( \int_{|u_1| < \varepsilon} \int_{\varepsilon < |u_2| < \pi} + \int_{\varepsilon < |u_1| < \pi} \int_{|u_2| < \varepsilon} \right) \Phi_N(u) du \leq \\ &\leq c \left( \int_{\varepsilon < |u_2| < \pi} F_{N_2}(u_2) du_2 + \int_{\varepsilon < |u_1| < \pi} F_{N_1}(u_1) du_1 \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $N_1 \rightarrow \infty$  и  $N_2 \rightarrow \infty$  (см. свойство 3) ядра Фейера § 3.16).

**Теорема 1.** Если функция  $f(t) \in C^*$ , то

$$\|f(x) - \sigma_N(f; x)\|_{C^*} \rightarrow 0 \quad (N_j \rightarrow \infty, j=1, \dots, n).$$

**Доказательство.** В силу свойства (10) ядра  $\Phi_N(u)$  имеем

$$\sigma_N(f; x) - f(x) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\varepsilon} [f(x+t) - f(x)] \Phi_N(t) dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |\sigma_N(f; x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\varepsilon} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\delta} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt + \\ &\quad + \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) |f(x+t) - f(x)| dt, \end{aligned}$$

где  $\delta > 0$  — пока произвольное число ( $0 < \delta < \pi$ ).

Так как функция  $f(x)$  по условию теоремы непрерывна на  $\Delta_*$ , то она ограничена и равномерно непрерывна на  $\Delta_*$ :

$$|f(x)| \leq M \quad (\forall x \in \Delta_0) \quad (12)$$

для всякого  $\varepsilon > 0$  вуществует  $\delta > 0$  такое, что

$$|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon/2 \quad (13)$$

при  $|t| < \delta$  ( $j=1, \dots, n$ ) и любых  $x, (x+t) \in \Delta_*$ .

Теперь, взяв  $\delta$  такое, как указано в (13), на основании свойств ядра  $\Phi_N(t)$  получаем

$$\begin{aligned} |\sigma_N - f| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\pi^n} \int_{\Delta_\delta} \Phi_N(t) dt + \frac{2M}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\pi^n} \int_{\Delta_* \setminus \Delta_\delta} \Phi_N(t) dt. \end{aligned}$$

Теперь для вектора  $N^0$  с достаточно большими координатами, на основании свойства (11), второе слагаемое справа в последнем неравенстве можно сделать при  $N_j > N_j^0$  ( $j=1, \dots, n$ ) меньшим  $\varepsilon/2$ . Тогда окончательно получим

$$|\sigma_N(f; x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или

$$\|\sigma_N(f; x) - f(x)\|_{C^*} < \varepsilon$$

при  $N_j > N_j^0$  ( $j=1, \dots, n$ ),  $\forall x \in \Delta_*$ . Теорема доказана.

**Замечание 1.** Из теоремы 1 следует, что система функций (3) полна в  $C^*$ , а следовательно, и в  $L_2^*$  (см. § 3.17).

**Замечание 2.** Мы уже отмечали выше, что кратный ряд Фурье непрерывной функции не обязательно сходится к ней во всех точках  $\Delta_*$ . Однако кратная сумма Фейера  $\sigma_N(f; x)$  непрерывной периодической функции  $f(x)$ , как мы доказали выше, сходится к  $f(x)$  во всех точках  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_*$ .

Справедлива

**Теорема 2.** Ряд Фурье (7) функции  $f \in L_2^*$  сходится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического

$$\|f(x) - S_N(f; x)\|_{L_2^*} \rightarrow 0 \quad (N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty)$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_{L_2^*}^2 = (2\pi)^n \sum |c_k|^2.$$

Доказательство этой теоремы можно провести, как в одномерном случае (см. §§ 3.9, 3.17), воспользовавшись замечанием 1 о полноте системы (3).

Будем теперь рассматривать ряд Фурье (7) в двумерном случае. Если воспользоваться формулами Эйлера  $e^{\pm i x} = \cos x \pm i \sin x$ , то (7) формально преобразуется в ряд

$$\begin{aligned}
 f(x, y) \sim & \frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k0} \cos kx + d_{k0} \sin kx) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{0l} \cos ly + c_{0l} \sin ly) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{kl} \cos kx \cos ly + b_{kl} \sin kx \cos ly + \\
 & + c_{kl} \cos kx \sin ly + d_{kl} \sin kx \sin ly),
 \end{aligned} \tag{14}$$

где мы положили

$$\begin{aligned}
 a_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \cos lv \, du \, dv \\
 b_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \sin ku \cos lv \, du \, dv, \\
 c_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \cos ku \sin lv \, du \, dv, \\
 d_{kl} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u, v) \sin ku \sin lv \, du \, dv.
 \end{aligned} \tag{15}$$

**Замечание 3.** Если  $f(u, v)$  — действительная функция, то  $a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl}$  — действительные числа.

Отметим, что к ряду (14) мы могли бы прийти и непосредственно, исходя из ортогональной на  $\Delta = \{-\pi \leq x, y \leq \pi\}$  системы функций

$$\begin{aligned}
 & \cos kx \cos ly, \sin kx \cos ly, \cos kx \sin ly, \sin kx \sin ly \\
 & (k, l = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Ряд (14), где числа  $a_{kl}, b_{kl}, c_{kl}, d_{kl}$  вычисляются по формулам (15), называется *рядом Фурье функции  $f(x, y)$  по тригонометрической системе функций (16)*. Числа (15) называются *коэффициентами Фурье функции  $f(x, y)$  по системе (16)*.

Таким образом, кратный ряд Фурье можно записывать как в комплексной форме (7), так и в виде кратного тригонометрического ряда (14).

Рассматривая снова  $n$ -мерный случай, в предположении, что

$$f \in C^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \in C^*,$$

коэффициент Фурье  $c_k$ , где  $k \neq 0$ , можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_n^*} e^{-ikt} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_n^{(n-1)}} e^{-i \sum_{l=1}^{n-1} k_l t_l} dt_1 \dots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_n t_n} f(t) dt_n; \end{aligned}$$

интегрируя по частям в последнем интеграле ( $u=f(t)$ ,  $e^{-ik_n t_n} dt_n = dv$ ), получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Delta_n^{(n-1)}} e^{-i \sum_{l=1}^{n-1} k_l t_l} dt_1 \dots dt_{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ik_n} e^{-ik_n t_n} \frac{\partial f(t)}{\partial t_n} dt_n = \\ &= \frac{1}{i^n} c_k \left( \frac{\partial f}{\partial t_n} \right) \end{aligned}$$

$$(\Delta_n^{(n-1)} = \{-\pi \leq x_j \leq \pi, j=1, 2, \dots, n-1\}).$$

Вообще, если  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — заданный целый неотрицательный вектор и  $f^{(s)} \in C^*$  для любого неотрицательного целого вектора  $s \leq \lambda$  ( $s_j \leq \lambda_j, j=1, \dots, n$ ), то после соответствующего применения процесса интегрирования по частям (с учетом периодичности функции  $f$  и всех ее производных) получим

$$c_k(f) = \frac{i^{|\lambda|}}{i^{|\lambda|} i_n^{|\lambda|}} c_k(f^{(\lambda)}), \quad (17)$$

где

$$|\lambda| = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad k^\lambda = k_1^{\lambda_1} k_2^{\lambda_2} \dots k_n^{\lambda_n},$$

причем мы считаем, что если  $k_j = 0, \lambda_j = 0$ , то  $k_j^{\lambda_j} = 1$ . Числа  $c_k(f^{(\lambda)})$  — коэффициенты Фурье производной

$$f^{(\lambda)}(t) = \frac{\partial^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \dots \partial t_n^{\lambda_n}} = \frac{\partial^{|\lambda|} f}{\partial t_1^{\lambda_1} \dots \partial t_n^{\lambda_n}}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — вектор с целыми положительными компонентами и функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in C^*$  вместе со своими



частными производными  $f^{(k)}$  порядка  $k \leq \lambda$  ( $k_j \leq \lambda_j, j=1, \dots, n$ ), и выполняются неравенства

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |f^{(l)}(x)|^2 dx \leq M^2 \quad (18)$$

для любого вектора  $l = (l_1, \dots, l_n)$ , имеющего компоненты  $l_j$ , равные нулю или же  $\lambda_j$ .

Тогда сумма Фурье  $S_N(f; \mathbf{x})$  ( $N = (N_1, \dots, N_n)$ ) функции  $f$  отклоняется от  $f(x)$  с оценкой

$$|f(\mathbf{x}) - S_N(f; \mathbf{x})| \leq cM \sum_{j=1}^n (N_j + 1)^{-\lambda_j + \frac{1}{2}}, \quad (19)$$

где  $c$  не зависит от  $M$  и  $N_j$  и зависит только от  $\lambda$ .

**Доказательство.** Для простоты оценим остаток ряда Фурье функции в двумерном случае

$$\rho_N(f; \mathbf{x}) = \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \right) c_k e^{ikx}.$$

Если рассматривать плоскость точек  $(k_1, k_2)$  (рис. 1), то в остаточный член  $\rho_N(f; \mathbf{x})$  входят члены ряда Фурье, отвечающие точкам  $(k_1, k_2)$  с целочисленными координатами из заштрихованной части.

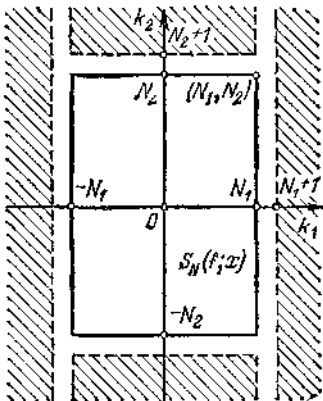


Рис.1

Учитывая, что  $|e^{ikx}| = 1$ , имеем

$$\begin{aligned}
 |\rho_N(f; x)| &\leq \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{k_2 = -\infty}^{\infty} + \sum_{|k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \right) |c_k| = \\
 &= \sum_{|k_1| > N_1} |c_{k_1, 0}| + \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} |c_k| + \\
 &\quad + \sum_{|k_2| > N_2} |c_{0, k_2}| + \sum_{1 < |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} |c_k|.
 \end{aligned}$$

В силу формулы (17) получаем

$$\begin{aligned}
 |\rho_N(f; x)| &\leq \sum_{|k_1| > N_1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1}} \left| c_{k_1, 0} \left( \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right) \right| + \\
 &\quad + \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right| + \\
 &\quad + \sum_{|k_2| > N_2} \frac{1}{|k_2|^{\lambda_2}} \left| c_{0, k_2} \left( \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right| + \\
 &\quad + \sum_{1 < |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \frac{1}{|k_1|^{\lambda_1} |k_2|^{\lambda_2}} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

Применяя неравенство Буняковского для сумм, получаем (пояснения ниже)

$$\begin{aligned}
 |\rho_N(f; x)| &\leq \\
 &\leq \left( \sum_{|k_1| > N_1} k_1^{-2\lambda_1} \right)^{1/2} \left( \sum_{|k_1| > N_1} \left| c_{k_1, 0} \left( \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 &\quad + \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} k_1^{-2\lambda_1} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{|k_1| > N_1} \sum_{|k_2| \geq 1} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 &\quad + \left( \sum_{|k_2| > N_2} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \left( \sum_{|k_2| > N_2} \left| c_{0, k_2} \left( \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2} + \\
 &\quad + \left( \sum_{1 < |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} k_1^{-2\lambda_1} k_2^{-2\lambda_2} \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{1 < |k_1| \leq N_1} \sum_{|k_2| > N_2} \left| c_k \left( \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right) \right|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Теперь в силу равенства Парсеваля и (18), а также неравенств  $\sum_{k > N} k^{-\alpha} \leq cN^{1-\alpha}$ ,  $\sum_{k \geq 1} k^{-\alpha} \leq c_1$  при  $\alpha > 1$  имеем

$(\lambda_j \geq 1, j = \bar{1}, \dots, n)$

$$\begin{aligned} \rho_N(f; \mathbf{x}) &\leq c(N_1 + 1)^{1/2 - \lambda_1} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1} f}{\partial x_1^{\lambda_1}} \right\|_{L'_{2^*}} + \\ &+ c(N_1 + 1)^{1/2 - \lambda_1} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L'_{2^*}} + c(N_2 + 1)^{1/2 - \lambda_2} \left\| \frac{\partial^{\lambda_2} f}{\partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L'_{2^*}} + \\ &+ c(N_2 + 1)^{1/2 - \lambda_2} \left\| \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2} f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2}} \right\|_{L'_{2^*}} \leq \\ &\leq cM [(N_1 + 1)^{1/2 - \lambda_1} + (N_2 + 1)^{1/2 - \lambda_2}]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\rho_N(f; \mathbf{x})| \leq cM [(N_1 + 1)^{1/2 - \lambda_1} + (N_2 + 1)^{1/2 - \lambda_2}], \quad (20)$$

где постоянная  $c$  не зависит от  $M$  и  $N_1, N_2$ .

В  $n$ -мерном случае оценку остатка можно провести подобным образом.

Оценка (20) говорит о том, что ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится равномерно на  $\Delta^*$  при  $\lambda_j \geq 1, j = 1, \dots, n$ .

В силу теоремы 2 ряд Фурье функции  $f$  сходится к  $f(x)$  в смысле среднего квадратического. В таком случае он сходится равномерно именно к функции  $f(x)$  (см. ниже лемму 1), и потому

$$|\rho_N(f; \mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - S_N(f; \mathbf{x})| \leq cM \sum_{j=1}^n (N_j + 1)^{1/2 - \lambda_j},$$

и теорема доказана.

**Следствие.** Если функция  $f$  и ее частные производные вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}, \dots \\ \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1 \dots \partial x_{n-1}}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_2 \dots \partial x_n}, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \end{aligned}$$

принадлежат к  $C^*$  то кратный ряд Фурье функции  $f$  сходится равномерно на  $\Delta^*$  к функции  $f(x)$ .

Ведь если эти частные производные непрерывны, то их квадраты интегрируемы на  $\Delta^*$  и верны оценки (18) при некоторой постоянной  $M$  и  $\lambda_j = \dots = \lambda_n = 1$ .

**Лемма.** Если ряд

$$u_0(\mathbf{x}) + u_1(\mathbf{x}) + \dots$$

непрерывных на области  $\Omega \subset R_n$  функций сходится в смысле среднего квадратического к непрерывной функции  $S(x)$  и в то же время он

сходится равномерно на  $\Omega$  к функции  $\varphi(x)$ , то для всех точек  $x \in \Omega$   $S(x) = \varphi(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $S_N(x)$  — сумма первых  $N$  членов ряда,  $V \subset \Omega$  — произвольный шар и

$$\kappa_N = \max_{x \in V} | \varphi(x) - S_N(x) |.$$

По условию леммы  $\kappa_N \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ). Поэтому в силу неравенства треугольника (см. § 3.8)

$$\begin{aligned} & \left( \int_V | S(x) - \varphi(x) |^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \int_V | S(x) - S_N(x) |^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_V | S_N(x) - \varphi(x) |^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \int_V | S(x) - S_N(x) |^2 dx \right)^{1/2} + \kappa_N \sqrt{mV} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, левая часть последнего неравенства равна нулю (она не зависит от  $N$ ):

$$\int_V | S(x) - \varphi(x) |^2 dx = 0.$$

Далее, так как по условию функция  $S(x)$  непрерывна на  $\Omega$ , а  $\varphi(x)$  непрерывна на  $\Omega$ , как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций, то для всех  $x \in V$

$$S(x) - \varphi(x) \equiv 0.$$

Если предположить, что существует хотя бы одна точка  $x^0$ , в которой

$$[S(x^0) - \varphi(x^0)]^2 > 0,$$

то мы получили бы, что

$$\int_V [S(x) - \varphi(x)]^2 dx > 0$$

Далее, так как  $V$  — произвольный шар, входящий в область  $\Omega$  (открытое связное множество), то

$$S(x) \equiv \varphi(x) \quad (\forall x \in \Omega),$$

и лемма доказана.

**Теорема 4.** Для функции  $f \in C^*$  при произвольном  $\eta > 0$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} & S_N(f; x) - f(x) = \\ & = \frac{1}{\pi^n} \int_{K_\eta} \prod_{j=1}^n D_{N_j}(u_j) [f(x+u) - f(x)] du + o(1) \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{21}$$

равномерно на любой области  $\Omega \subset \Delta^*$ .

Здесь множество  $K_n$  (крест) есть объединение множеств

$$\Omega_{j,n} = \{|u_j| < \eta\} \quad (j = 1, \dots, n), \text{ т. е. } K_n = \bigcup_{j=1}^n \Omega_{j,n}.$$

Символ  $N \rightarrow \infty$  означает, что  $N_1 \rightarrow \infty, \dots, N_n \rightarrow \infty$ .

Теорема имеет место и в случае, если функция  $f$  просто интегрируема (по Риману или Лебегу). Мы не будем доказывать данную теорему, отметим лишь, что при ее доказательстве придется использовать свойства кратных интегралов Фурье, аналогичные свойствам одномерных интегралов Фурье (см. формулы (9) — (11) § 3.12).

Заметим еще, что в формуле (21) нельзя заменить множество (крест)  $K_n$  на куб  $\Delta_n = \{|u_j| < \eta, j = 1, \dots, n\}$ , и в этом проявляется существенное различие между рядами Фурье функций многих переменных и функций одной переменной.

Формулу (21) можно использовать при получении различных достаточных признаков сходимости кратного ряда Фурье к функции  $f(x)$  в зависимости от свойств функции  $f(x)$ .

## 4. Тензорная тригонометрия

В начале раздела 4 дана проективная версия евклидовой тензорной тригонометрии, развиваемая с применением собственных проекторов. Определяются проективные сферические функции и рефлекторы для тензорного угла между линейными  $A_1$  и  $A_2$  или их образами - планарами ранга  $r_1$  и  $r_2$ . В иной, альтернативной интерпретации тензорный угол определяется между образами нуль-простых  $n \times n$ -матриц  $B$  и  $B'$  - планарами ранга  $r$ . Далее рассматривается каноническая структура тензорных тригонометрических функций и собственных рефлекторов. Определяется (с установлением его существенной роли в тензорной тригонометрии) понятие срединного рефлектора. Самостоятельным образом последний вводится как фундаментальный рефлектор-тензор пространства, задающий бинарную структуру тензорных тригонометрий, базирующихся на квадратичных метриках. В частности, он задаёт бинарную структуру квазиевклидовой тригонометрии. На основе этого понятия осуществляется развитие ротационной (синусно-косинусной) и деформационной (тангенсно-секансной) формы квазиевклидовой тензорной тригонометрии, то есть её

моторной версии. С применением сферическо-гиперболической аналогии абстрактного и конкретного типов осуществлено построение сходной по форме псевдоевклидовой тензорной тригонометрии с тем же рефлектор-тензором. Отдельно рассмотрена тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц. Введены алгебраическим способом общие геометрические и тригонометрические квадратичные нормы матричных объектов, обоснованные через соответствующие тригонометрические спектры и генеральные неравенства. Рассматривается тензорная тригонометрия в комплексных пространствах. Особое внимание уделено изучению движений в псевдоевклидовых пространствах, в том числе отдельно в пространстве Минковского.

Материал данного раздела изложен по книге А.С. Нинула «Тензорная тригонометрия». Издательство «Мир», 2004 г.

## **Раздел I. Ряд общих вопросов теории точных матриц**

Тензорная тригонометрия базируется на монобинарном тригонометрическом спектре всех собственных проекторов так называемой нуль-простой  $n \times n$ -матрицы, у которой её образ и ядро образуют прямую сумму. Полный тригонометрический спектр имеют простые матрицы. Существенную роль в выводе и строгом обосновании тригонометрического спектра для нуль-простой  $n \times n$ -матрицы играют коэффициенты её характеристических многочленов – скалярного и матричного. Соответственно структура и свойства скалярных и матричных коэффициентов детально изучаются в главе 1. Здесь формулируется и доказывается в целом генеральное неравенство для средних величин, включающее цепь частных неравенств Маклорена для средних алгебраических – основы вводимых впоследствии иерархических норм.

Показаны также его дополнительные возможности в теории решения алгебраических уравнений. Исходя из найденной структуры матричных характеристических коэффициентов высшего порядка  $n \times n$ -матрицы идентифицирован её минимальный аннулирующий многочлен. В главе 2 устанавливаются явные формулы для собственных проекторов нуль-простой матрицы через её характеристические коэффициенты высшего порядка. Как весьма важный частный случай, дополнительно вводятся и изучаются нуль-нормальные матрицы, у которых образ и ядро образуют прямую

ортогональную сумму. В главе 3 определяются скалярные характеристики матриц, имеющие косинусную и синусную природу и обобщающие известные алгебраические нормы для косинуса и синуса угла между векторами в евклидовом арифметическом пространстве. При этом здесь вводятся в рассмотрение в качестве общих линейных геометрических объектов – линеоры  $A$  и планары  $\langle \text{im } A \rangle$ , задаваемые  $p \times m$ -матрицами, где  $1 \leq m \leq n$  (в частности, при  $m = 1$  это векторы и прямые). В главе 4 рассматриваются альтернативные варианты комплексификации характеристик – адекватный и эрмитов при переходе от вещественного арифметического пространства к комплексному. Дан ряд конкретных примеров обоих подходов.

Ниже изложены основы тензорной тригонометрии, базирующейся на квадратичных метриках в многомерных арифметических пространствах. Результаты исследований по тензорной тригонометрии изложены в работе А.С. Нинула «Тензорная тригонометрия», которые взяты за основу при изложении материала раздела 4.

В теоретическом плане тензорная тригонометрия естественным образом дополняет классические разделы аналитической геометрии и линейной алгебры. В практическом плане она даёт инструментарий для решения разнообразных геометрических задач в многомерных аффинных, евклидовых и псевдоевклидовых пространствах. Движения, определяемые тензорной тригонометрией, задают геометрию в малом для вложенных в них подпространств постоянной кривизны.

Кроме того, тензорная ротационная и деформационная тригонометрия в элементарной форме применена к изучению движений в неевклидовых геометриях - сферической и гиперболической, а также в теории относительности. В результате приводятся наиболее общие — матричные, векторные и скалярные представления этих движений в весьма наглядной тригонометрической форме.

Редко какой раздел математической науки так хорошо известен и понятен всем ещё со школьных времён как тригонометрия. Зародившись в глубокой древности, она практически завершила своё развитие и приобрела современную форму в конце XVIII века в трудах Леонарда Эйлера. Между тем геометрия от исторически изначальных евклидовых форм за прошедшие два века шагнула далеко вперёд. В том числе были открыты и изучены её разнообразные неевклидовы и многомерные тензорные формы.

)Осуществленно построение общих тензорных форм тригонометрии в многомерных арифметических пространствах с квадратичной метрикой - как евклидовой, так и псевдоевклидовой. В частности, в этих формах классическая скалярная тригонометрия проявляется на собственных плоскостях или псевдоплоскостях тригонометрического подпространства тензорного угла.

Реализация намеченной цели потребовала от А.С. Нинулина основательно разобраться в ряде смежных вопросов, относящихся к теории точных матриц - составной части линейной алгебры. С этой задачей он блестяще справился, в результате чего был получен ряд интересных результатов в теории линейной алгебры и геометрии.

С точки зрения тензорной тригонометрии некоторые довольно сложные и трудно воспринимаемые математические и физические теории видятся довольно прозрачно и естественным образом. Здесь это показано на примере тригонометрического моделирования движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности.

Тензорная тригонометрия находится на стыке проблем, изучаемых многомерной аналитической геометрией и линейной алгеброй. Ввиду того что изложение новой теории потребовало применения дополнительных обозначений и терминологии, А.С. Нинулин придал им наиболее удобную и логичную форму.

Рассматриваемые методы тензорной тригонометрии предназначены для применения в ряде областей математики, математической физики, в информационных технологиях, нанотехнологиях и др.

Прежде всего приведем используемые в разделе 4 обозначения.

## **Используемые обозначения**

### **1. Обозначения матриц (матричный алфавит)**

$A$  — прямоугольная матрица или  $n \times r$ -линеор,

$\{ \text{lig}(t)A \}$  - субматрица строк  $A$  порядка  $t$ ,

$\{ \text{col}(t)A \}$  - субматрица столбцов  $A$  порядка  $t$ ,

$A^+$  — (сферически ортогонально) квазиобратная матрица Мура - Пенроуза,



$V$  — квадратная матрица или внешняя мультипликация линейоров  $A_1$  и  $A_2$ ,  
 $V^*$  — аффинно (гиперболически ортогонально) квазиобратная матрица,  
 $V_i = (V - \mu_i I)$  -  $i$ -я собственная матрица для  $V$ ,  
 $V_r$  - нуль-простая матрица,  
 $\overleftarrow{V}$  или  $\overleftarrow{V}_r$  - аффинный проектор на  $\langle \text{im } V \rangle$  параллельно  $\langle \ker V \rangle$  или гиперболически ортогональный проектор на  $\langle \text{im } V \rangle$ ,  
 $\overrightarrow{V}$  или  $\overrightarrow{V}_r$  - аффинный проектор на  $\langle \ker V \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } V \rangle$  или гиперболически ортогональный проектор на  $\langle \ker V \rangle$ ,  
 $V_m$  и  $V_n$  - (адекватно и эрмитово) нуль-нормальные матрицы,  
 $\overleftarrow{V} \overleftarrow{V}'$  или  $\overleftarrow{V}_m (\overleftarrow{V}_n)$  - сферически ортогональный проектор на  $\langle \text{im } V \rangle$ ,  $\overrightarrow{V}' \overrightarrow{V}$  или  $\overrightarrow{V}_m (\overrightarrow{V}_n)$  - сферически ортогональный проектор на  $\langle \ker V \rangle$ ,  
 $\{D\text{-minor}(t)V\}$  - диагональный минор  $V$  порядка  $t$ ,  
 $\{Dh\text{-minor}(t)V\}$  - гиподиагональный минор  $V$  порядка  $t$ ,  
 $C$  - внутренняя мультипликация линейоров  $A_1$  и  $A_2$  или свободный матричный множитель, в том числе клеточный,  
 $C_\mu$  - матрица клеточной формы,  
 $D$  - диагональная матрица,  
 $D\{P\}$  — диагональная форма простой матрицы  $P$ ,  
 $E$  — матрица единичного полирёберного угла,  
 $\tilde{E}$  - матрица единичного базиса,  
 $F$  - матрица-функция,  
 $G$  - метрический тензор,  
 $G^\oplus$  и  $G^\ominus$  - метрические тензоры риманова и псевдориманова пространства,  
 $H$  — (эрмитово симметричная) эрмитова комплексная матрица,  
 $I$  - единичная матрица,  
 $\{\sqrt{I}\}_S$  и  $I^\oplus$  - фундаментальный рефлектор-тензор квази- или псевдоевклидова пространства, ориентированного и нет,  
 $J$  - матрица жордановой формы,  
 $K$  — матричный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы  $V$  порядка  $t$  либо 1-го рода  $K_1(V,t)$ , либо 2-го рода  $K_2(V,t)$ ,  
 $K_V(\varepsilon)$  - матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $V$ ,

$L$  - треугольная матрица,  $L_\varepsilon$  - матрица клеточной треугольной формы,  
 $M$  - (адекватно) нормальная вещественная или комплексная матрица,  
 $N$  - (эрмитово) нормальная комплексная матрица,  
 $O$  - нильпотентная матрица,  
 $P$  - простая матрица,  
 $Q$  — редуцированный матричный характеристический коэффициент для сингулярной матрицы  $B$  порядка  $t$  либо 1-го рода  $Q_1(B,t)$ , либо 2-го рода  $Q_2(E,t)$ ,  
 $Q_B(\varepsilon)$  - редуцированный матричный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$  матрицы  $B$ ,  
 $R$  - (адекватно) ортогональная вещественная или комплексная матрица,  $R_q$  - квазиортогональная матрица,  
 $S$  - симметричная матрица,  
 $S^\oplus$  - положительно определённая симметричная матрица,  
 $T$  — матрица ротационного тригонометрического преобразования,  
 $U$  — (эрмитово ортогональная) унитарная комплексная матрица,  
 $V$  — матрица общего линейного преобразования (активного и пассивного),  
 $W$  - моно-бинарная клеточная форма простой матрицы,  
 $X$  и  $Y$  - матрица-аргумент,  
 $Z$  — нулевая матрица.

## 2. Обозначение тензорных углов и их функций

$\bar{\Phi} = \tilde{\Phi}'$  и  $\Phi = -\Phi'$  - основной сферический угол, проективный и моторный,  
 $\text{Rot } \Phi$  ( $\text{rot } \Phi$ ) - матрица ротации на угол  $\Phi$ , в том числе элементарной.  $\text{Def } \Phi$  ( $\text{def } \Phi$ ) - матрица деформации на угол  $\Phi$ ,  
 $\xi = (\pi/2 - \Phi)$  — дополнительный к  $\Phi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол (все три угла отвечают рефлектор-тензору),  
 $\tilde{\Gamma} = -\tilde{\Gamma}'$  и  $\Gamma = \Gamma'$  - основной гиперболический угол, проективный и моторный,  
 $\text{Roth } \Gamma$  ( $\text{roth } \Gamma$ ) — матрица ротации на угол  $\Gamma$ , в том числе элементарной,  
 $\text{Defh } \Gamma$  ( $\text{defh } \Gamma$ ) - матрица деформации на угол  $\Gamma$ ,

$\Delta$  - дополнительный к  $\Gamma$  (до бесконечного прямого угла  $\Delta$ ) гиперболический угол (все три угла отвечают рефлектор-тензору),

$\Theta$  — ортосферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi$  или  $\Gamma$ ,

$\check{\Psi} = \check{\Phi} + i\check{\Gamma}$  и  $\Psi = \Phi + i\Gamma$  - комплексные сферические углы, проективный и моторный,

$\check{\Xi} = \check{\Xi}^*$  и  $\Xi = -\Xi^*$  - эрмитов сферический угол, проективный и моторный.

### 3. Обозначения пространств

$\langle \mathcal{A}^n \rangle$  - арифметическое (аффинное) пространство размерности  $n$ ,  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  — евклидово пространство размерности  $n$ ,

$\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle$  — комплексное бинарное евклидово (псевдоевклидово) пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ ,

$\langle \mathcal{P}_k \rangle$  — подпространства пересечений собственных пространств,

$\langle \mathcal{P}^{n+q} \rangle$  - вещественное псевдоевклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ ,

$\langle \mathcal{Q}^{n+q} \rangle$  - вещественное квазиевклидово пространство индекса  $q$  и размерности  $(n+q)$ .

### 4. Прочие обозначения

$C_n^t$  — биномиальные коэффициенты Ньютона,

$\|A\|_F$  - норма Фробениуса матрицы  $A$ ,

$\|A\|_t^h$  - определённая геометрическая норма матрицы или линейора  $A$  порядка  $t$  и степени  $h$ ,

$\{B\}_t^h$  — полуопределённая геометрическая норма квадратной матрицы  $B$  порядка  $t$  и степени  $h$ ,

$\det B$  - детерминант (определитель) матрицы  $B$ ,

$\dim \dots$  - размерность пространства  $\dots$ ,

$\mathcal{D}(r)B$  — диагональ квадратной матрицы  $B$ , численно равная сумме детерминантов всех её базисных диагональных миноров,

$\langle \text{im } B \rangle$  — образ матрицы  $B$ ,  $\langle \text{im } A \rangle$  - образ матрицы  $A$ ,  
 $\langle \text{ker } B \rangle$  - ядро матрицы  $B$ ,  $\langle \text{ker } A \rangle$  - ядро матрицы  $A$ ,  
 $k(B, t)$  - скалярный характеристический коэффициент для  
 сингулярной матрицы  $B$  порядка  $t$ ,  
 $k_B(\varepsilon)$  - скалярный характеристический многочлен от параметра  $\varepsilon$   
 для матрицы  $B$ ,

$l$  и  $\tilde{l}$  - евклидова и псевдоевклидова протяжённость,  
 $\overline{m}_t$  и  $M_\theta$  — средние алгебраические и средние степенные  
 порядка  $t$  и  $\theta$ ,

$M_A(r)A$  — минорант матрицы  $A$ , численно равный квадратному  
 корню из суммы квадратов детерминантов всех её базисных  
 миноров,

$n$  - размерность аффинного или евклидова пространств,

$q(B, t)$  - редуцированный скалярный характеристический  
 коэффициент для сингулярной матрицы  $B$  порядка  $t$ ,

$q_B(\varepsilon)$  - редуцированный скалярный характеристический  
 многочлен от параметра  $\varepsilon$  для матрицы  $B$ ,

$r = \text{rang } B$  или  $\text{rang } A$  - ранг матрицы,

$r'$  — 1-й рок сингулярной матрицы  $B$ , то есть максимальный  
 порядок ненулевого коэффициента  $k(B, t)$ ,

$r''$  - 2-й рок сингулярной матрицы  $B$ , то есть максимальный  
 порядок ненулевых коэффициентов  $K_{1,2}(B, t)$ ,

$s_i = (n - r_i)$ ,  $s_i' = (n - r_i')$  и  $s_i^\circ = (r_i'' - r_i' + 1)$  - геометрическая,  
 алгебраическая и аннулирующая кратность собственного  
 значения  $\mu_i$ ,

$t$  (или  $\theta$ ) - порядок характеристик (либо размер выборки из  
 совокупности чисел, либо размер миноров матрицы),

$\text{tr } B$  — след  $B$ ,

$\overline{V}_t$  и  $\overline{V}_\theta$  — реверсивные средние алгебраические и средние  
 степенные порядка  $t$  и  $\theta$ .

$\gamma$  - скалярный основной гиперболический угол.

$\varepsilon$  - скалярный сферический эрмитов угол,

$\theta$  — скалярный угол ортосферической ротации, ортогональной  
 по отношению к  $\varphi$  или  $\gamma$ ,

$\lambda$  - дополнительный к  $\gamma$  (до бесконечного прямого угла  $\delta$ )  
 гиперболический угол,

$\mu_i$  -  $i$ -е собственное значение матрицы  $B$ ,

$v'$  - размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\text{im } A_2$ ,

$v''$  — размерность пространства пересечения  $\text{im } A_1$  и  $\text{ker } A'_2$  (или  
 $\text{im } A_2$  и  $\text{ker } A'_1$ ),

$\xi$  — дополнительный к  $\varphi$  (до прямого угла  $\pi/2$ ) сферический угол,  
 $\pi$  — открытый сферический угол,  
 $\sigma_i$  -  $i$ -е собственное значение матрицы  $AA'$  или  $A'A$ ,  
 $\varphi$  — скалярный основной сферический угол,  
 $\omega = \text{Arsh } 1$  - особый гиперболический угол, отвечающий фокусу гиперболы.

## **5. Используемые символы**

' - знак простого транспонирования,  
\* - знак эрмитового транспонирования,  
 $\subset$  - множество... принадлежит множеству...,  
 $\subseteq$  — множество... принадлежит или тождественно множеству...,  
 $\in$  — элемент... принадлежит множеству...,  
 $\notin$  -элемент... не принадлежит множеству...,  
 $\cup$  - знак объединения множеств,  
 $\cap$  - знак пересечения множеств,  
 $\equiv$  — знак тождества множеств,  
 $\oplus$  - знак прямого суммирования,  
 $\textcircled{+}$  — знак сферически ортогональной прямой суммы,  
 $\textcircled{-}$  - знак гиперболически ортогональной прямой суммы,  
 $\sim$  - обозначение для тензорных углов (сверху) проективного типа,  
 $\prec$  - обозначение для тензорных углов (сверху) в случае многоступенчатых ротаций с обратным порядком частных движений.

В теории матриц такие классические понятия, как сингулярная матрица и её ранг, собственные подпространства, аннулирующие многочлены, проекторы и т. д., имеют смысл лишь для точных матриц и при точных вычислениях. Различают точную теорию понятий и аппроксимационную теорию оценок понятий. Каждая из них играет свою роль. Очевидно, что понятия, связанные с точными числовыми характеристиками, относятся к точной теории. Эта теория используется не только для построения и анализа абстракций, но она важна и для

анализа объектов прикладных задач. **Ведь числовые характеристики объектов всегда точные, а приближённые лишь их разнообразные оценки.**

В разделе 4 содержатся результаты исследований по теории точных матриц, и развитая на этой платформе тензорная тригонометрия. Последняя, сама по себе, является составной частью соответствующей геометрии с квадратичным метрическим инвариантом в многомерном арифметическом пространстве.

Исторические корни классической скалярной тригонометрии, как составной части двумерной геометрии, уходят в далёкое прошлое. Некоторые тригонометрические формулировки содержались ещё в «Началах Евклида». Следует отметить, что сферическая тригонометрия стала математически развиваться раньше тригонометрии на плоскости. Это было обусловлено потребностью в ней со стороны практической астрономии. Сферические функции встречались уже в IX — X веках у арабских математиков. В европейскую науку тригонометрию ввёл Р. Уоллингфорд, применив её, в частности, к решению прямоугольного треугольника. Гиперболические функции открыл А. Муавр, а реально их начали применять в геометрических исследованиях И. Ламберт и Ф. Тауринус. Современный завершённый вид скалярная тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера, который также осуществил её комплексификацию. С другой стороны, геометрия вообще продолжала развиваться далее и особенно бурно в связи с появившейся идеей многомерного геометрического пространства.

Многомерная геометрия в истории развития математики возникла впервые, по-видимому, в середине XIX века в классическом труде Г. Грассмана "Учение о линейном протяжении" (1844г.). Им же и независимо от него У. Гамильтоном были заложены основы векторного анализа в многомерных арифметических пространствах. Выдающийся вклад в обоснование алгебраического подхода к геометрии объектов арифметического пространства внесла знаменитая аксиома Кантора-Дедекинда о континууме.

Возникновение примерно в то же время и последующее развитие линейной алгебры в трудах Фробениуса, Крамера, Кронекера, Капелли, Сильвестра, Жордана, Эрмита, Вейля и других математиков приводило со временем к всё большему её наполнению геометрическим содержанием. Она нашла

эффективное применение в теории векторных евклидовых, а после известных работ А. Пуанкаре и Г. Минковского и псевдоевклидовых пространств. Этому способствовало алгебраическое определение понятий, связанных с метрическими свойствами арифметических пространств (длин векторов и значений углов между ними). Как известно, базисными для определения мер и норм евклидова пространства явились косинусное неравенство Коши и синусное неравенство Адамара. Впоследствии Э. Мур и Р. Пенроуз предложили общие методы квазиобращения матриц. А. Н. Тихонов дал предельный метод нормального решения систем линейных уравнений. Результаты этих исследований имели также большое геометрическое значение и явились отправной точкой данной работы.

Главная цель изложения заключается в формулировке и применении тригонометрических понятий многомерной геометрии. В качестве основной теоретической платформы используется и развивается далее теория точных матриц. При этом показаны дополнительные возможности в использовании получаемых результатов.

Найдена структура матричных характеристических коэффициентов 1-го и 2-го рода, широко фигурирующих в теории точных матриц с середины XX века (и возникшие в работах Ж.-М. Сурьё и Д. К. Фаддеева), - в дополнение к известной со времён У. Леверьё структуре скалярных характеристических коэффициентов. Идентифицирован минимальный аннулирующий многочлен матрицы исходя из полученного в работе фундаментального соотношения для её основных параметров сингулярности. Установлен тригонометрический спектр нуль-простой матрицы, на основе которого получены генеральные нормирующие косинусное и синусное неравенства.

Введены общие квадратичные нормы для особых линейных геометрических объектов - линеоров, задаваемых  $n \times m$ -матрицами  $A$ , где  $1 \leq m < n$  (при  $m = 1$  это векторы), а также для тензорных углов между ними или между их образами в  $n$ -мерном арифметическом пространстве. Генеральная норма имеет порядок  $r$ , равный рангу матрицы. Евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет порядок 1. Теоретической базой для этих норм стали, во-первых, иерархическое генеральное неравенство для средних величин и, во-вторых, общие тригонометрические неравенства. Первое из них (иерархическое) даёт полную

иерархию средних геометрических, алгебраических и степенных, в том числе в их реверсивных формах. Последующие из них (тригонометрические) обобщают неравенства Коши (косинусное) и Адамара (синусное) для общего случая определения скалярного угла между вышеуказанными объектами — линеорами или между их образами - планарами ранга  $m$  (при  $m = 1$  между векторами или прямыми). В качестве сопутствующего применения иерархического неравенства средних величин изложен глобальный предельный метод поэтапного вычисления всех корней векового уравнения спектрально положительной матрицы, а также дан более строгий необходимый признак положительности корней алгебраического уравнения, нежели классический признак Декарта.

**Главным же результатом работы является создание в полномасштабных формах тензорной тригонометрии — в трёх естественным образом дополняющих друг друга формах: проективной, рефлективной и моторной.** Определены и изучены два типа моторных тригонометрических преобразований: **ротационные** (синусно-косинусные) и **деформационные** (тангенсно-секансные). В свою очередь, ротационные преобразования через их полярное представление подразделены на **сферические, гиперболические и ортосферические**. Между всеми сферическими и гиперболическими понятиями установлены дуальные отношения на основе широко используемой в работе сферическо-гиперболической аналогии в абстрактной и конкретной формах в исходном универсальном базисе.

Дано сходное определение квазиевклидовых и псевдоевклидовых пространств, а также их собственных тензорных тригонометрических преобразований через фундаментальный рефлектор-тензор и квадратичную метрику базового  $n$ -мерного арифметического пространства — как ротационных, так и орторефлективных.

В парах (сферическое, ортосферическое), (гиперболическое, орто-сферическое) ротационные тригонометрические преобразования образуют две некоммутативные группы. Первая из них есть **группа квазиевклидовых ротаций**. Вторая из них - **группа псевдоевклидовых ротаций, или группа Лоренца**. Пересечение этих двух групп есть **подгруппа ортосферических ротаций**. Гиперболические и сферические ротации, вообще говоря, не образуют собственных подгрупп. В свою очередь, аналогичные им два собственных множества орторефлективных



преобразований (в квазиевклидовом и псевдоевклидовом пространствах с одним и тем же рефлектор-тензором) с общим их пересечением в виде подмножества ортосферических рефлексий не образуют собственных групп.

Тензорная тригонометрия применима в решении разнообразных задач геометрий с квадратичными инвариантами, реализуемых в многомерных арифметических пространствах и во вложенных в них подпространствах постоянной кривизны. В качестве отдельных примеров специфического применения новых методов тензорной тригонометрии в линейной алгебре дано спектральное представление собственных проекторов, тригонометрическая теория простых квадратных корней из единичной матрицы, а также показана тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц.

В качестве весьма важного частного и простейшего случая дано представление тензорных тригонометрических ротаций и деформаций в элементарных формах (то есть с одним собственным углом движения и с реперной осью для его отсчёта). Показано, что при этом открываются новые возможности для изучения движений в неевклидовых геометриях постоянной кривизны и в теории относительности. Эти вопросы освещаются достаточно подробно в отдельном приложении.

Тензорная тригонометрия базируется на монобинарном тригонометрическом спектре всех собственных проекторов так называемой нуль-простой  $n \times n$ -матрицы, у которой её образ и ядро образуют прямую сумму. Полный тригонометрический спектр имеют простые матрицы. Существенную роль в выводе и строгом обосновании тригонометрического спектра для нуль-простой  $n \times n$ -матрицы играют коэффициенты её характеристических многочленов — скалярного и матричного. Соответственно структура и свойства скалярных и матричных коэффициентов детально изучаются в микромодуле 30. Здесь формулируется и доказывается в целом генеральное неравенство для средних величин, включающее цепь частных неравенств Маклорена для средних алгебраических — основы вводимых впоследствии иерархических норм. Показаны также его дополнительные возможности в теории решения алгебраических уравнений. Исходя из найденной структуры матричных характеристических коэффициентов высшего порядка  $n \times n$ -матрицы идентифицирован её минимальный аннулирующий

многочлен. Устанавливаются явные формулы для собственных проекторов нуль-простой матрицы через её характеристические коэффициенты высшего порядка. Как весьма важный частный случай, дополнительно вводятся и изучаются нуль-нормальные матрицы, у которых образ и ядро образуют прямую ортогональную сумму. Определяются скалярные характеристики матриц, имеющие косинусную и синусную природу и обобщающие известные алгебраические нормы для косинуса и синуса угла между векторами в евклидовом арифметическом пространстве. При этом здесь вводятся в рассмотрение в качестве общих линейных геометрических объектов - линейоры  $A$  и планары  $\langle \text{im } A \rangle$ , задаваемые  $n \times m$ -матрицами, где  $1 \leq m \leq n$  (в частности, при  $m = 1$  это векторы и прямые). Рассматриваются альтернативные варианты комплексификации характеристик - адекватный и эрмитов при переходе от вещественного арифметического пространства к комплексному. Дан ряд конкретных примеров обоих подходов.

## **4.1. Коэффициенты характеристических многочленов**

### **4.1.1. Совместное определение скалярных и матричных коэффициентов**

В теории точных матриц особое место занимает раздел, относящийся к характеристическим многочленам. Он включает алгебраические и геометрические аспекты. Их детальная проработка необходима нам для последующего построения фундамента тензорной тригонометрии. Как известно, каждая  $n \times n$ -матрица имеет своё *вековое* алгебраическое уравнение. Его задаёт *скалярный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен со скалярными коэффициентами. Решения векового уравнения суть собственные значения матрицы  $\mu$ . С другой стороны, та же  $n \times n$ -матрица имеет *матричный характеристический многочлен* от параметра  $\mu$ , то есть многочлен с матричными коэффициентами. В данной работе указанные характеристические многочлены квадратной матрицы применяются, как правило, в *знакопостоянной форме* от противоположного скалярного параметра  $\varepsilon = -\mu$ . Введём в рассмотрение сразу же оба

типа характеристических многочленов и их коэффициентов, например, по методу Д. К. Фаддеева.

Пусть  $B$  есть ненулевая  $n \times n$ -матрица ранга  $r$ ,  $I$  – единичная матрица. Обратимся к следующему преобразованию:

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^V}{\det(B + \varepsilon I)} = \frac{K_B(\varepsilon)}{k_B(\varepsilon)} \quad (1)$$

По существу это есть обычная формула обращения квадратной матрицы  $(B + \varepsilon I)$  в виде дроби, в числителе которой находится присоединённая к ней матрица, а в знаменателе детерминант; где  $\varepsilon$  – произвольный скалярный параметр. При указанной операции обращения получаются сразу оба характеристических многочлена от  $\varepsilon$ , а именно скалярный порядка  $n$  в знаменателе дроби и матричный порядка  $(n - 1)$  в её числителе:

$$k_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^n k(B,t) \cdot \varepsilon^{n-t} = \varepsilon^n + \text{tr } B \cdot \varepsilon^{n-1} + \dots + \det B,$$

$$K_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n-1} K_t(B,t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}.$$

В данных многочленах присутствуют скалярные  $k(B,t)$  и матричные  $K_t(B,t)$  характеристические коэффициенты для исходной матрицы  $B$ . Причём последние – пока 1-го рода, а матричные коэффициенты 2-го рода  $K_2(B,t)$  будут определены позднее. Последовательно увеличивающееся число  $t$  есть порядок этих скалярных и матричных коэффициентов. Противоположный параметр  $\mu = -\varepsilon$  относится к собственным значениям матрицы  $B$ . Аналогичный скалярный многочлен от параметра  $\mu$  для матрицы  $B$  и её вековое уравнение исп ользуются в знакпеременной форме:

$$k_B(-\mu) = (-\mu)^n + \text{tr } B \cdot (-\mu)^{n-1} + \dots + \det B = 0.$$

Поэтому определённые выше скалярные коэффициенты порядка  $t$  представляют собой суммы Виета или суммы детерминантов всевозможных диагональных миноров размера  $t \times t$ , но без изменения алгебраического знака перед ними. Согласно методу Лаврье, для матрицы  $B$  они вычисляются по рекуррентной формуле Варинга, где осуществляется замена сумм Виета на её характеристические скалярные коэффициенты, а сумм Варинга на её характеристические следы одного и того же порядка  $t$ :

$$k(B,t) = 1/t \cdot \sum_{\theta=1}^t (-1)^{\theta-1} \cdot k(B,t-\theta) \cdot \text{tr } B^\theta. \quad (2)$$

Это есть рекуррентная формула Варинга – Лаврье *прямого* типа.

Аналогичная формула для тех же коэффициентов, но выраженная в явном виде, представляет больше теоретический интерес

$$k(B,t) = 1/t! \cdot \det \begin{vmatrix} \text{tr}B & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \text{tr}B^2 & \text{tr}B & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr}B^{t-1} & \text{tr}B^{t-2} & \text{tr}B^{t-3} & \dots & t-1 \\ \text{tr}B^t & \text{tr}B^{t-1} & \text{tr}B^{t-2} & \dots & \text{tr}B \end{vmatrix} \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) получаются из системы линейных уравнений Ньютона с  $n$  известными корнями относительно  $n$  неизвестных коэффициентов применением той же схемы замены. Последовательность скалярных коэффициентов или сумм Виета, согласно системе линейных уравнений Ньютона, взаимно-однозначно связана с такой же последовательностью характеристических следов или сумм Варинга вплоть до порядка  $t = r' = \min\{\text{rang } B_h\} \leq r$ , то есть до минимума ранга указанной степенной матрицы. (При  $t > r'$  все скалярные характеристические коэффициенты порядка  $t$  обнуляются.) Параметр  $r'$  для матрицы  $B$  здесь определяется как её *1-й рок*. (В дальнейшем будет видно, что обнулению матричных характеристических коэффициентов отвечает некий *2-й рок*  $r''$ .) Решение любых задач, связываемых изначально со скалярными коэффициентами, можно рассматривать также исходя из значений характеристических сумм Варинга, а для матриц – значений характеристических следов.

#### 4.1.2. Генеральное неравенство средних величин

Во втором разделе основной части раздела особое значение имеют положительно (полу)определённые ранга  $r$  симметричные или эрмитовы матрицы и их скалярные инварианты. Для таких матриц вековое уравнение в принятой знакопеременной форме имеет необходимо положительные скалярные коэффициенты вплоть до порядка  $r' = r = \text{rang } B$ . Кроме того, все  $n$  его решений (собственных значений) – вещественные неотрицательные числа. Для совокупности  $n$  неотрицательных чисел  $\mu_i$ , причём  $r \leq n$  из них ненулевые, определим специальные характеристики – малые медианы (или средние алгебраические), большие медианы (или средние степенные):

$$\bar{m}_1 = \bar{M}_1 = \sum \frac{\mu_i}{n}, \quad (4)$$

$$\bar{m}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i) / C_n^t} = \sqrt[t]{k(B, t) / C_n^t}, \quad (5)$$

$$\bar{M}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i) / n} = \sqrt[\theta]{\text{tr} B^\theta / n} \quad (6)$$

где черта сверху означает усреднение. Здесь  $s_t(\mu_i)$  – суммы Виета,  $S_\theta(\mu_i)$  – суммы Варинга,  $n$  – размер совокупности чисел или матрицы,  $t$  или  $\theta$  – порядок соответствующих средних величин,  $C_n^t$  – биномиальные коэффициенты Ньютона. (Среднее арифметическое  $\bar{m}_1 = \bar{M}_1$  является пересечением множеств средних алгебраических и средних степенных.)

При  $t > r$  малые медианы вырождаются в нуль, что имеет место при наличии нулевых исходных чисел. Если же таковые отсутствуют, то могут быть полезными реверсивные аналоги малых и больших медиан, которые определяются как

$$\bar{v}_1 = \bar{V}_1 = \left( \sum \frac{\mu_i}{n} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$\bar{v}_t = \sqrt[t]{s_t(\mu_i^{-1}) / C_n^t} = \sqrt[t]{k(B^{-1}, t) / C_n^t}, \quad (8)$$

$$\bar{V}_\theta = \sqrt[\theta]{S_\theta(\mu_i^{-1}) / n} = \sqrt[\theta]{\text{tr} B^{-\theta} / n}. \quad (9)$$

Они производятся как обращенные средние от обратных исходных чисел и также являются средними величинами. Например, если прямая медиана относится к косинусному инварианту, то реверсивная медиана относится к секансному инварианту, но обратна ему, как и должно быть для секанса. (Среднее геометрическое является пересечением множеств средних алгебраических и их реверсивных аналогов.)

*Для совокупности  $n$  вещественных положительных чисел  $\langle \mu_i \rangle$ , из которых хотя бы одно число отличается от другого, имеет место генеральное неравенство средних величин, охватывающее всю область данной совокупности:*

$$\max \langle \mu_i \rangle = \bar{M}_\infty > \dots > \bar{M}_\theta > \dots > \bar{M}_1 = \quad (10)$$

$$= \overline{m}_1 > \dots > \overline{m}_t > \dots > \overline{m}_n = \quad (11)$$

$$= \overline{v}_n > \dots > \overline{v}_t > \dots > \overline{v}_1 = \quad (12)$$

$$= \overline{V}_1 > \dots > \overline{V}_\theta > \dots > \overline{V}_\infty = \min \langle \mu_i \rangle \quad (13)$$

( $t = 1, \dots, n$ ;  $\theta = 1, \dots, \infty$ ).

Знак же равенства, причём сразу для всех медиан (средних величин), имеет место тогда и только тогда, когда  $\mu_1 = \dots = \mu_n$ . Если бы совокупность содержала  $s=n - r$  нулевых чисел, то цепь неравенств вырождалась справа, начиная с  $\overline{m}_{r+1}$ , а слева все медианы оставались ненулевыми. При этом в случае равенства ненулевых чисел между собой медианы изменялись бы как функции:

$$\overline{m}_t = \mu \cdot \sqrt[t]{C_1^t / C_n^t}, \quad \overline{M}_\theta = \mu \cdot \sqrt[\theta]{r/n}.$$

Генеральное неравенство содержит как частные случаи неравенство Коши для средних арифметического и геометрического и его реверсивный аналог для средних гармонического и геометрического, неравенство Маклорена для средних алгебраических и его реверсивный аналог и неравенство Гёльдера для средних арифметического и степенных и его реверсивный аналог. Для спектрально положительной матрицы (для которой  $\mu_i > 0$ ) определим, в частности, арифметическую, геометрическую и гармоническую медианы:

$$\overline{m}_1 = \text{tr } B / n = \overline{M}_1, \quad (14)$$

$$\overline{m}_n = \sqrt[n]{\det B} = \overline{v}_n, \quad (15)$$

$$\overline{v}_1 = (\text{tr } B^{-1} / n)^{-1} = \overline{V}_1. \quad (16)$$

Если  $B = AA'$  где  $A$  есть  $n \times m$ -матрица и, в частности,  $A = a$  есть  $n \times 1$ -вектор, то арифметическая медиана выражается через нормы Фробениуса и Евклида как

$$n \cdot \overline{m}_1(B) = \text{tr } B = \begin{cases} \|A\|_F^2, \\ \|a\|_E^2. \end{cases}$$

Для спектрально положительной матрицы ( $\mu_i > 0$ ) в соответствии с вышеуказанным генеральным неравенством справедливы оценки:

$$\max \langle \mu_i^n \rangle \geq \text{tr } B^n / n \geq (\text{tr } B / n)^n \geq \det B \geq (\text{tr } B^{-1} / n)^{-n} \geq (\text{tr } B^{-n} / n)^{-1} \geq \min \langle \mu_i^n \rangle. \quad (17)$$

Дефекты этих неравенств тем меньше, чем ближе друг к другу все собственные значения матрицы. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда матрица прямо пропорциональна единичной матрице. Очевидно, что предельные медианы совпадают с крайними собственными значениями:

$$\max \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{M}_\theta, \quad (18)$$

$$\min \langle \mu_i \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \overline{V}_\theta. \quad (19)$$

Далее рассмотрим доказательство сформулированного выше генерального неравенства средних величин в целом и его анализ. Воспользуемся дифференциальным методом изучения экстремума. Определим скалярные функции для разности и для отношения соответствующих средних величин из совокупности  $n$  положительных чисел  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), задающих радиус-вектор  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  в первом квадранте:

$$r \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_t(\mathbf{x}) - \overline{m}_{t+1}(\mathbf{x}),$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_1(\mathbf{x}) - \overline{m}_n(\mathbf{x}),$$

$$f \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_t(\mathbf{x}) / \overline{m}_{t+1}(\mathbf{x}),$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{m}_1(\mathbf{x}) / \overline{m}_n(\mathbf{x}),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta+1}(\mathbf{x}) - \overline{M}_{\theta}(\mathbf{x}),$$

$$R \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta}(\mathbf{x}) - \overline{M}_1(\mathbf{x}),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta+1}(\mathbf{x}) / \overline{M}_{\theta}(\mathbf{x}),$$

$$F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{x}) = \overline{M}_{\theta}(\mathbf{x}) / \overline{M}_1(\mathbf{x}).$$

Функции  $r$  и  $R$ , а также  $f$  и  $F$ , на области положительных  $x_i$  имеют общее и единственное стационарное значение с аргументом-решением в форме центрального луча  $\langle \mathbf{b} \rangle$  - биссектрисы первого квадранта, соответствующее их нулевому градиенту:

$$r'(\mathbf{b}) = f'(\mathbf{b}) = R'(\mathbf{b}) = F'(\mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{b}$  — любая точка этой биссектрисы, то есть это решение

$$x_1 = \dots = x_n = \mathbf{b};$$

$$r(\mathbf{b}) = R(\mathbf{b}) = 0, \quad f(\mathbf{b}) = F(\mathbf{b}) = 1.$$

В силу своей вогнутости, эти функции принимают минимальные значения. Например, матрицы Гессе в окрестности биссектрисы — положительно полуопределённые ранга  $(n - 1)$ :

$$\begin{aligned} r'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{b}) &= (n-1) \cdot r'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot f'' \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot (n-1) \cdot f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = \\ &= R'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = 1/(\theta-1) \cdot R'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = b/(\theta-1) \cdot F'' \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} (\mathbf{b}) = \frac{n \cdot 1 - 1t}{n^2 \cdot b} = G, \end{aligned}$$



где  $I_t$  есть *тотально-единичная* матрица, все элементы которой равны 1. Детерминанты главных миноров матрицы  $G$  порядка  $r$ :

$$\left(\frac{1}{n \cdot b}\right)^r \cdot \frac{n-r}{n} > 0 \quad \text{при } r < n.$$

Матрица Гессе вырождена вдоль биссектрисы — линейного подпространства размерности 1. Учитывая вышеуказанные стационарные значения функций, получаем:

$$r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+m \end{pmatrix}(\mathbf{b}) = m \cdot r'', f'' \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}(\mathbf{b});$$

$$R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+m \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{b}) = m \cdot R'', F'' \begin{pmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{pmatrix}(\mathbf{b}).$$

Этот анализ показывает, что в окрестности биссектрисы  $\langle \mathbf{b} \rangle$ , во-первых, матрицы Гессе отношений соседних средних величин не зависят от порядка; во-вторых, они изменяются аддитивно с ростом интервала между порядками; в-третьих, они совпадают для функций отношений между соседними средними степенными и отношения между средними арифметическим и геометрическим. Для отношений соседних средних алгебраических эта же матрица делится на  $(n - 1)$  равных частей. Но самое важное заключается в том, что матрица Гессе для функции отношения между средним степенным и средним арифметическим на биссектрисе неограниченно возрастает пропорционально порядку  $\theta$ . Хотя при  $\theta \rightarrow \infty$  в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к отношению  $x_{\max}/\bar{M}_1$ , изменяется непрерывно и на биссектрисе равна 1 (минимуму). Кроме того, матрица Гессе для функции отношения соседних средних степенных на биссектрисе даже при  $\theta \rightarrow \infty$  сохраняет постоянное значение. Хотя в силу (18) эта же функция  $F$  стремится к 1 независимо от аргумента, то есть к константе, для которой градиент и матрица Гессе нулевые. Эти, казалось бы, противоречивые факты объясняются влиянием соотношения бесконечно малого (отклонения аргумента от биссектрисы) и бесконечно большого (параметра  $\theta$ ). Вследствие чего в окрестности биссектрисы матрица Гессе терпит разрыв и

становится нулевой. В свою очередь, функция  $F \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}(\mathbf{x})$  при  $\theta \rightarrow \infty$  имеет постоянное значение 1, но с точностью до бесконечно малой зависит от аргумента, принимая абсолютный минимум

(1) на биссектрисе, где  $F\left[\begin{smallmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{smallmatrix}\right](x)$  принимает сразу же это минимальное значение.

Более наглядно указанные закономерности можно продемонстрировать на модельной функции от одного скалярного аргумента, например:

$$F_1\left[\begin{smallmatrix} \theta+1 \\ \theta \end{smallmatrix}\right](x) = \sqrt{\frac{1+x^{\theta+1}}{2}} / \sqrt{\frac{1+x^\theta}{2}},$$

$$F_2\left[\begin{smallmatrix} \theta \\ 1 \end{smallmatrix}\right](x) = \sqrt{\frac{1+x^\theta}{2}} / \frac{1+x}{2} \quad (\text{при } x > 0, \theta \geq 2).$$

Здесь  $x \geq 1$  играет роль аргумента и максимального элемента из выборки  $\langle 1, x \rangle$ . При конечном  $\theta$ :

$$F_1(1) = F_2(1) = 1 = \min, \quad F_2(x) > F_1(x) > 1;$$

$$\frac{dF_1}{dx}(1) = \frac{dF_2}{dx}(1) = 0;$$

$$\frac{d^2F_1}{dx^2}(1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2F_2}{dx^2}(1) = \frac{\theta-1}{4}, \quad \frac{d^2F_2}{dx^2}(x) \geq \frac{d^2F_1}{dx^2}(x) > 0.$$

При бесконечном  $\theta$ :

$$F_1(x) = 1 + \beta(x), \quad \beta(x) \rightarrow 0, \quad \beta(1) = 0; \quad F_2(1) = 1 = \min,$$

$$F_2\left[\begin{smallmatrix} x > 1 \\ x < 1 \end{smallmatrix}\right] = \begin{cases} 2x/(1+x), \\ 2/(1+x); \end{cases}$$

$$\frac{dF_1}{dx}(x) = 0, \quad \frac{dF_2}{dx}(1) = 0, \quad \frac{dF_2}{dx}(1 \pm \alpha) = \pm \frac{1}{2} \quad (\alpha \rightarrow 0);$$

$$\frac{d^2F_1}{dx^2}(1) = \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2F_1}{dx^2}\left[\begin{smallmatrix} x > 1 \\ x < 1 \end{smallmatrix}\right] = 0,$$

$$\frac{d^2F_2}{dx^2}(1) = \frac{\theta-1}{4} \rightarrow \infty, \quad \frac{d^2F_2}{dx^2}(1 \pm \alpha) = 0 \quad (\alpha \rightarrow 0).$$

Ввиду разрыва матрицы Гессе в окрестности биссектрисы можно сделать вывод, что трёхвалентная симметричная матрица третьих производных при  $\theta \rightarrow \infty$  должна быть на биссектрисе бесконечной, но в отрицательной области. Отметим также, что для аналогичных функций реверсивных средних величин все вышеизложенные закономерности остаются в силе, но знак

перед матрицами Гессе меняется на противоположный, а формальный их вид сохраняется. То же происходит, если в функциях отношений средних величин поменять местами числитель и знаменатель. Таким образом, с учётом предельных формул (18) и (19), доказательство и анализ генерального неравенства средних величин нами завершён. Далее рассмотрим отдельные возможности его применения в теории решений алгебраических уравнений, в том числе векового уравнения квадратной матрицы.

### 4.1.3. Предельный метод решения векового уравнения с вещественными корнями

Малые и большие медианы связаны системой модифицированных уравнений Ньютона и модифицированной рекуррентной формулой Варинга—Леверьё, например *прямого* типа - аналог формулы (2), где при

$$t > r \rightarrow \bar{m}_t = 0:$$

$$C_{n-1}^{t-1} \cdot (\bar{m}_t)^t = C_n^{t-1} \cdot (\bar{m}_{t-1})^{t-1} \cdot (\bar{M}_t)^t - C_n^{t-2} \cdot (\bar{m}_{t-2})^{t-2} \cdot (\bar{M}_t)^2 + \dots$$

$$\dots + (-1)^{t-2} C_n^1 \cdot (\bar{m}_t)^1 \cdot (\bar{M}_{t-1})^{t-1} + (-1)^{t-1} \cdot (\bar{M}_t)^t,$$

где  $C_{n-1}^{t-1} = C_n^{t-1} - C_n^{t-2} + \dots + (-1)^{t-2} C_n^1 + (-1)^{t-1}$ .

Предельные формулы (18) и (19) могут использоваться для последовательного вычисления всех корней алгебраического уравнения при условии, что все они - вещественные. Кратность каждого корня может находиться в процессе сокращения. Однако целесообразно предварительно отделить лишние корни, используя 1-ю производную и алгоритм Евклида. С применением метода Штурма и априорных границ вещественных корней ( $\pm\infty$ ) устанавливаются их вещественность. Кроме того, вещественные корни уравнения, как известно, удовлетворяют неравенству для знакопеременной формы уравнения:

$$[-1 \cdot \sqrt[h_1]{-\min k_j}] = \Delta^{(-)} < \mu < \Delta^{(+)} = [1 + \sqrt[h_2]{-\min (-1)^j \cdot k_j}],$$

где  $\Delta^{(-)}$  — граница отрицательных корней,  $\Delta^{(+)}$  - граница положительных корней,  $h_1$  и  $h_2$  - индексы первых отрицательных коэффициентов  $k_j$  и  $(-1)^j \cdot k_j$ .

*Предельный метод* решения алгебраического уравнения сводится к следующему. Пусть уже известно, что корни уравнения - вещественные неотрицательные числа. В частности, это суть собственные значения положительной матрицы типа  $AA'$ . Первый этап - вычисление сумм Виета и характеристических сумм Варинга вплоть до порядка  $r$ . Например, для матриц используется рекуррентная формула Варинга -Леверье *прямого* типа (2), а для самостоятельного уравнения *обратного* типа, которая при  $0 > r$  имеет вид:

$$S_{\theta} = s_1 \cdot S_{\theta-1} - s_2 \cdot S_{\theta-2} + \dots + (-1)^i \cdot s_{r-1} \cdot S_{\theta-r+1} - (-1)^{r-1} \cdot s_r \cdot S_{\theta-r} =$$

$$= F_{\theta}(S_1, \dots, S_r) = f_{\theta}(s_1, \dots, s_r),$$

$$\theta = r + 1, r + 2, \dots$$

Откуда далее последовательно вычисляются средние степенные:

$$\overline{M}_{\theta} = \sqrt[\theta]{S_{\theta} / r}.$$

Причём приближение к цели идёт именно снизу, согласно неравенству (10). Очевидно, что скорость процесса тем выше, чем более различны корни уравнения между собой. Подставив в вышеуказанную рекуррентную формулу предельное значение (18) и сократив общий множитель  $x^{\theta-n}$ , получим исходное уравнение как тождество.

Именно поэтому на каком-то этапе вычисления обрываются из-за неминуемой ошибки округления. Так находится максимальный корень. Минимальный ненулевой корень, согласно (19), можно вычислять аналогично, используя реверсивную форму алгебраического уравнения, то есть поделив исходное уравнение на  $x^n$  и старший коэффициент  $a_n$ .

Если корни уравнения - точные рациональные числа, то в процессе последовательного приближения у результата неизбежно появляются цифровые периоды после некоторой значащей цифры. Исходя из этого вычисляется точное значение корня с проверкой по заданному уравнению. *Иррациональные* корни вычисляются с задаваемой степенью точности. Таким образом, применяя соответствующий алгоритм, последовательно находят все корни алгебраического уравнения. Обратим внимание на то, что изложенный метод, близкий по идее к методу Лобачевского - Греффе (1834г), по сути, имеет глобальный характер. Все исходные расчётные характеристики в нём строго предопределены.

Если же уравнение имеет вещественные законоопределённые корни, то вначале сместим аргумент, например, в область положительных корней, но, по возможности, меньше - для большей скорости сходимости. Априори, как известно, вещественные собственные значения имеют вещественные симметричные матрицы  $S = S'$  и мнимые кососимметричные матрицы  $(iK)' = -iK$ , где  $K' = -K$  вещественные.

Для вещественной  $B$  это могут быть соответствующие характеристические матрицы:

$$S_B = (B + B')/2, \quad K_B = (B - B')/2 \quad (B = S_B + K_B).$$

В случае  $S_B \cdot K_B = K_B \cdot S_B \leftrightarrow B \in \langle M \rangle$  - нормальная матрица. Тогда они вместе приводятся к диагональной форме. Их собственные значения суммируются для суммы этих матриц. Следовательно, решая отдельные уравнения для  $S_M$  и  $-iK_M$  (последнее - биквадратное), можно получить также отдельно вещественные и сопряжённые мнимые части комплексных собственных значений матрицы  $M$ . Далее остаётся сделать подбор соответствующих пар путём проверки на вековом уравнении для  $M$

Аналогичный подход с использованием эрмитова сопряжения распространяется на комплексные матрицы. Среди них априори вещественные собственные значения имеют эрмитовы матрицы. Для комплексной эрмитово нормальной матрицы используется разложение:

$$H_B = (B + B^*)/2, \quad Q_B = (B - B^*)/2 \quad (B = H_B + Q_B - H_B + i \cdot H_Q).$$

$$H_B \cdot Q_B = Q_B \cdot H_B \leftrightarrow H_B \cdot H_Q = H_Q \cdot H_B \leftrightarrow B \in \langle N \rangle, \quad \text{где } N \cdot N^* = N^* \cdot N, \text{ и т.д.}$$

Таким образом, множество матриц, которые априори подходят для использования предельного метода, включает вещественные нормальные матрицы и комплексные эрмитово нормальные матрицы. Пусть для матрицы или для уравнения с вещественными корнями используется метод смещения. Тогда для знакопеременной формы уравнения нижняя граница отрицательных корней удовлетворяет неравенству:

$$\min \langle \mu_i \rangle \Delta^{(-)} = -1 - \sqrt{1 - \min k_j}.$$

После подстановки  $x = y + \Delta^{(-)}$  получаем уравнение с положительными

коэффициентами и корнями. (Проверяется методом Штурма в интервале  $+\infty \div 0$ ) Для матрицы преобразование смещения трактуется как

$$B \rightarrow \{B - \Delta^{(\cdot)} \cdot 1\}.$$

Альтернатива вышеуказанному методу смещения для матриц с вещественными знаковоопределёнными собственными значениями: возведение матрицы в квадрат, далее вычисление квадратов собственных значений и затем подбор их знаков по вековому уравнению для исходной матрицы.

*В случае вещественности и положительности всех корней алгебраического уравнения максимальный корень в явной форме теоретически выражается как*

$$\max \langle \mu_1 \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sqrt[\theta]{S_\theta / \Gamma}, \quad (20)$$

где  $S_\infty = \det$

$1 \cdot k_1$	$-1$	$0$	$0$	$\dots$
$-2 \cdot k_2$	$k_1$	$-1$	$0$	$\dots$
$3 \cdot k_3$	$-k_2$	$k_1$	$-1$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(-1)^{r-1} \cdot r \cdot k_r$	$(-1)^{r-2} \cdot k_{r-1}$	$(-1)^{r-3} \cdot k_{r-2}$	$(-1)^{r-4} \cdot k_{r-3}$	$\dots$
$0$	$(-1)^{r-1} \cdot k_r$	$(-1)^{r-2} \cdot k_{r-1}$	$(-1)^{r-3} \cdot k_{r-2}$	$\dots$
$0$	$0$	$(-1)^{r-1} \cdot k_r$	$(-1)^{r-2} \cdot k_{r-1}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Согласно признаку Сильвестра, для положительной определённости симметричной или эрмитовой матрицы необходимо и достаточно, например, чтобы детерминанты всех угловых миноров были положительными. Поскольку последний из них — детерминант матрицы, то это означает и её несингулярность. С другой стороны, для неотрицательности тех же, но сингулярных матриц необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты векового уравнения вплоть до порядка  $r$  были положительными и при  $t > 0$  нулевыми. Это следует из правила знаков Декарта и вещественности корней. Из вышесказанного можно сделать вывод, что элементы нормальных матриц содержат достаточно первоначальной информации, чтобы

решить задачу об отыскании их собственных значений, сведя её к алгебраическому уравнению с положительными корнями, (что требуется для предельного метода). Решение аналогичной задачи для матриц более общего вида или для самостоятельного алгебраического уравнения при  $n > 4$  зависит от ответа на вопрос: *"Имеет ли вещественное алгебраическое уравнение комплексные сопряженные корни или нет?"* Выше было указано, что точный ответ на него всегда можно получить с помощью метода Штурма. Однако этот метод не даёт необходимых и достаточных условий, которым вообще должны удовлетворять коэффициенты уравнения для вещественности всех его корней или с учётом метода смещения — для положительности всех корней.

Первоочередное необходимое условие положительности и, вместе с тем, вещественности всех корней, согласно признаку Декарта, заключается в положительности всех коэффициентов (для знакопеременной формы алгебраического уравнения). Однако это не гарантирует, что не имеется пар комплексных сопряжённых корней. Например, при выборе ещё большего параметра смещения  $(-\Delta) = 1 + \max |k_i|$  можно гарантировать только то, что вещественные их части будут положительные.

*Согласно цепи (11) генерального неравенства средних, для алгебраического уравнения с вещественными положительными корнями различные медианы могут совпадать, причём всегда вместе, тогда и только тогда, когда уравнение имеет биномиальную форму*

$$(x - \mu)^n = 0 \leftrightarrow \bar{m}_t = \mu.$$

При отличии хотя бы двух корней друг от друга коэффициенты уравнения уже не соответствуют биномиальному ряду, при этом действует неравенство (11). Например, совпадение каких-либо соседних медиан, обнуление коэффициентов до  $t = r$ , нарушение иерархии медиан — это отклонения, которые свидетельствуют о том, что уравнение с неотрицательными коэффициентами имеет комплексные сопряжённые корни.

*Поэтому более строгое необходимое условие вещественности и положительности корней уравнения заключается как в положительности его коэффициентов, так и выполнении цепи (11) генерального неравенства или любого отрезка цепи из  $v$  медиан.*

Заметим также, что для любой алгебраической медианы при условии  $1 \leq p < q$  в силу (10)

$$\sqrt[p]{m_i(x_1^p, \dots, x_n^p)} < \sqrt[q]{m_i(x_1^q, \dots, x_n^q)},$$

где  $(p - 1) \geq i \geq 1$  и хотя бы два элемента различны, а количество ненулевых элементов больше  $i$ .

#### **4.1.4. Структура и основные свойства скалярных и матричных характеристических коэффициентов**

Пусть  $O$  — нильпотентная матрица, коммутирующая с  $B$ . Тогда

$$k(\{B \cdot O\}, t) = 0, \tag{21}$$

$$k(\{B + O\}, t) = k(B, t). \tag{22}$$

Как известно, у нильпотентной матрицы все скалярные характеристические коэффициенты нулевые. Но  $B \cdot O = O \cdot B$  - также нильпотентная. Если в (3) подставить  $\{B + O\}$ , то в детерминанте все слагаемые, содержащие  $O$  в произведениях, - нулевые. Откуда следуют обе формулы. В частности, они действуют, когда нильпотентная матрица является многочленом от  $B$ . Известно, что скалярные коэффициенты не зависят от линейного преобразования базиса и матрицы. Используя, например, клеточно-треугольную  $L_\mu$  или жорданову  $J$  каноническую форму, можно каждой произвольной квадратной матрице поставить во взаимно-однозначное соответствие пару характеристических матриц — простую и нильпотентную, коммутирующие между собой:

$$B = P_B + O_B \quad (B = T_1 \cdot L_\mu \cdot T_1^{-1} = T_2 \cdot J \cdot T_2^{-1}) \quad P_B \cdot O_B = O_B \cdot P_B \tag{23}$$

Матрицы  $B$  и  $P_B$  имеют одно и то же вековое уравнение, одинаковые собственные значения и их алгебраические кратности. Степень нильпотентности для  $O_B$  равна максимальной степени множителей в минимальном аннулирующем многочлене, или максимальному размеру жордановой субклетки.



Далее с учётом изначальной формулы (1) рассмотрим особенности и свойства матричных характеристических коэффициентов и их взаимосвязь со скалярными коэффициентами. Из (1) непосредственно вытекают тождественные ей формулы:

$$\det (B + \varepsilon I) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot (B + \varepsilon I)^Y,$$

$$k_B(\varepsilon) \cdot I = (B + \varepsilon I) \cdot K_B(\varepsilon), \tag{24}$$

$$\sum_{t=0}^n \varepsilon^{n-t} [k(B,t) \cdot I - B \cdot K_1(B,t-1) - K_1(B,t)] = Z,$$

где Z - нулевая матрица.

Во-первых, отсюда следует, что в тождестве (24) возможна замена скалярного параметра  $\varepsilon$  на  $n \times n$ -матричный параметр E, коммутирующий с B. При этом тождество сохраняется:  $k_B(E) = (B + E) \cdot K_B(E)$ .

При такой замене оба многочлена преобразуются в соответствующие матричные формы. В частности, при  $E = -B$  из последнего весьма просто выводится теорема Гамильтона - Кэли:  $k_B(-B) = Z$ ; но при  $E = +B$ :  $k_B(B) = 2B \cdot K_B(B)$  и т.д. Во-вторых, ввиду произвольности параметра  $\varepsilon$  отсюда же следует рекуррентная формула Сурьё:

$$K_1(B,t) = -B \cdot K_1(B,t-1) + k(B,t) \cdot I, \tag{25}$$

где исходно  $k(B,0) = 1$ ,  $K_1(B,0) = I$  - из (1). Пусть, по определению,

$K_1(B,t)$  и  $K_2(B,t) = B \cdot K_1(B,t-1)$  - характеристические матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода. Для последних  $K_2(B,0) = Z$ ,  $K_2(B,1) = B$ . Учитывая это, (25) приводится к форме

$$K_1(B,t) + K_2(B,t) = k(B,t) \cdot I \tag{26}$$

В результате последовательного повторения (25) и с учётом начальных условий матричные характеристические коэффициенты выражаются многочленами от B:

$$\left. \begin{aligned} K_1(B,t) &= \sum_{\theta=0}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta, \\ K_2(B,t) &= - \sum_{\theta=1}^t k(B,t-\theta) \cdot (-B)^\theta. \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

В силу этого они коммутативны с  $B$  и друг с другом. Из (27) с учётом (2), то есть метода Леверье, следует формула Сурьё:

$$k(B, t) = \frac{1}{n-t} \cdot \text{tr } K_1(B, t) = \frac{1}{t} \cdot \text{tr } K_2(B, t). \quad (28)$$

С целью вычисления  $B^{-1}$  Сурьё предложил алгоритм последовательного расчёта всех характеристических коэффициентов, начиная с  $t = 1$ , используя (25) и (28), но в его статье, к сожалению, была опубликована только сводка результатов. Фаддеев, используя (1) и (2), пришёл независимо к тем же результатам и алгоритму, но при этом он связал эти коэффициенты с производящей их формулой (1). Из (27) и теоремы Гамильтона — Кэли следует  $K_1(B, n) = k_B(-B) = Z$ , а из (26) следует, что

$$K_2(B, n) = B K_1(B, n-1) = k(B, n) \cdot I = \det B \cdot I = B \cdot B^n.$$

Если матрица несингулярная, то, умножая обе части на  $B^{-1}$ , имеем:

$$B^{-1} = \frac{K_1(B, n-1)}{k(B, n)}$$

(алгоритмический метод Сурьё - Фаддеева вычисления обратной матрицы). Объединяя установленные значения матричных коэффициентов, можно записать:

$$\left. \begin{array}{ll} K_1(B, 0) = I, & K_2(B, 0) = Z, \\ K_1(B, 1) = \text{tr } B \cdot I - B, & K_2(B, 1) = B, \\ \dots & \dots \\ K_1(B, n-1) = B^n, & K_2(B, n-1) = \text{tr } B^n \cdot I - B^n, \\ K_1(B, n) = Z, & K_2(B, n) = \det B \cdot I. \end{array} \right\} \quad (29)$$

Здесь предпоследняя строка верна, но получена пока для несингулярной матрицы. Логично далее определить порядок коэффициентов, выше которого происходит обнуление цепи (29) или алгоритма Сурьё — Фаддеева. Из (26) и (28) для сингулярной матрицы следует, что, матричные коэффициенты 1-го и 2-го рода обнуляются только вместе и окончательно. Это должно происходить при некотором порядке  $r'' \geq r'$ , где  $r'$  — максимальный порядок, при котором обнуляется скалярный коэффициент (ранее определённый как 1-й *рок* матрицы). Соответственно порядок обнуления матричных характеристических коэффициентов, а именно  $r''$ , определяется как 2-й *рок* сингулярной матрицы. (Для несингулярной матрицы

эти понятия значения не имеют, оба рока формально равны размеру  $n$ .)

Неравенство  $r' \leq r$ , как известно, устанавливается только из структуры скалярных коэффициентов (сумма всех диагональных миноров порядка  $r$ ). Аналогично, положение 2-го рока относительно  $r'$  и  $r$  можно установить только исходя из структуры матричных коэффициентов и которую поэтому нужно найти. После этого можно будет установить взаимоотношение основных параметров сингулярности матрицы, включая показатель степени собственной матрицы в минимальном аннулирующем многочлене. Кроме того, искомая структура интересна ещё тем, что через коэффициенты высшего порядка весьма просто выражаются многие важнейшие матричные характеристики, например: проекторы, квазиобратные матрицы, модальные матрицы.

Для означенной цели воспользуемся *дифференциальным методом*. Причём для скалярных коэффициентов, чтобы показать аналогию в дальнейшем доказательстве для матричных коэффициентов, их вывод придётся повторить.

Пусть  $b_{i_1 j_1}, \dots, b_{i_m j_m}$  - произвольная совокупность  $m$  образующих элементов  $n \times n$ -матрицы  $B$  ( $1 \leq m \leq n$ ), то есть  $i_p \neq i_q$  и  $j_p \neq j_q$ .

Коэффициент при произведении

$$\prod_{k=1}^m b_{i_k j_k}$$

в разложении детерминанта матрицы определяется формулой

$$\frac{\partial^m \det B}{\partial b_{i_1 j_1} \dots \partial b_{i_m j_m}} = (-1)^{\sum_{k=1}^m (i'_k + j'_k)} \cdot \det \left\{ \begin{array}{l} \text{lig } i_1, \dots, i_m \notin \\ \text{col } j_1, \dots, j_m \notin \\ \text{minor } (n-m) \end{array} B \right\}, \quad (30)$$

где  $i'_k$  и  $j'_k$  - новые индексы элементов  $b_{i_k j_k}$  в ряду миноров, образуемых из матрицы последовательно при вычёркивании строк и столбцов элементов  $b_{i_1 j_1}, \dots, b_{i_m j_m}$ ; в фигурных скобках обозначен минор  $B$  порядка  $(n - m)$ , где дополнительно показано: какие строки и столбцы он не содержит. Общая формула (30) получается в результате последовательного частного дифференцирования детерминанта матрицы. Далее вычисляем обратную матрицу в (1), то есть знаменатель и числитель дроби

$$(B + \varepsilon I)^{-1} = \frac{(B + \varepsilon I)^{\vee}}{\det(B + \varepsilon I)}.$$

Знаменатель дроби представляет собой скалярный многочлен от  $\varepsilon$  степени  $n$ . В силу (30) коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  равен

$$\det \left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t} i_{n-t}) \notin}{D\text{-minor}(t)} (B + \varepsilon I) \right\}.$$

То есть это диагональный минор матрицы  $(B + \varepsilon I)$  порядка  $t$ , не содержащий указанных диагональных элементов. Поскольку только диагональные элементы содержат  $\varepsilon$ , то, полагая в этих детерминантах  $\varepsilon = 0$ , получаем коэффициенты при  $\varepsilon^{n-t}$  в данном скалярном многочлене как сумму всех диагональных миноров порядка  $t$ , причём  $k(B, 0) = 1$ .

Числитель вышеуказанной дроби представляет собой матрицу, у которой диагональные элементы - многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n - 1)$ , а недиагональные элементы - многочлены от  $\varepsilon$  степени  $(n - 2)$ . Эта матрица разлагается в многочлен от  $\varepsilon$  степени  $(n - 1)$  с матричными коэффициентами

$$\sum_{t=0}^n K_t(B, t) \cdot \varepsilon^{n-t-1}, \quad \text{причём } K_1(B, 0) = I.$$

Элемент  $(pp)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^{\vee}$  равен

$$\frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial (b_{pp} + \varepsilon)} = \text{Ad}_{pp}(B + \varepsilon I) = \det \left\{ \frac{(pp) \notin}{D\text{-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\},$$

где  $\text{Ad}_{pp}$  — адьюнкта элемента  $(pp) = (b_{pp} + \varepsilon)$ . По аналогии с вышеизложенным, коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$  в разложении этого детерминанта и он же - элемент  $(pp)$  матрицы  $K_1(B, t)$  равен

$$(pp) \{K_1(B, t)\} = \sum_{C_{n-1}^t} \text{Ad}_{pp'} \left\{ \frac{(pp) \in}{D\text{-minor}(t+1)} B \right\} = \sum_{C_{n-1}^t} \det \left\{ \frac{(pp) \notin}{D\text{-minor}(t)} B \right\},$$

где  $p'$  - новые индексы строк и столбцов в минорах. В свою очередь, элемент  $(pq)$  матрицы  $(B + \varepsilon I)^{\vee}$  равен

$$\frac{\partial \det(B + \varepsilon I)}{\partial b_{qp}} = \text{Ad}_{qp}(B + \varepsilon I) = (-1)^{p+q} \cdot \det \left\{ \frac{(pq) \in}{Dh\text{-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\},$$

где Dh-minor обозначает соответствующий *гиподиагональный* минор. То есть последний содержит один недиагональный образующий элемент, а именно  $b_{pq}$ , и соответственно не содержит элементов  $b_{qp}$ ,  $(b_{pp} + \varepsilon)$  и  $(b_{qq} + \varepsilon)$ . В силу (30)

коэффициент при  $\prod_{k=1}^{n-t-1} (b_{i_k i_k} + \varepsilon)$  в разложении этого детерминанта (с учётом того, что порядок выполнения частного дифференцирования значения не имеет) равен

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-t-1} \det \left\{ \frac{(pq) \varepsilon}{\text{Dh-minor}(n-1)} (B + \varepsilon I) \right\}}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} = \\ & \frac{\partial \left[ \frac{\partial^{n-t-1} \det (B + \varepsilon I)}{\partial (b_{i_1 i_1} + \varepsilon) \dots \partial (b_{i_{n-t-1} i_{n-t-1}} + \varepsilon)} \right]}{\partial b_{qp}} = \\ & = \text{Ad}_{q|p'} \left\{ \frac{(i_1 i_1), \dots, (i_{n-t-1} i_{n-t-1}) \notin}{\text{D-minor}(t+1)} (B + \varepsilon I) \right\}. \end{aligned}$$

Полагая  $\varepsilon = 0$ , получаем коэффициент при  $\varepsilon^{n-t-1}$ , или элемент  $(pq)$  матрицы  $K_1(B, t)$  как сумму всевозможных слагаемых

$$\begin{aligned} (pq) \{K_1(B, t)\} &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} \text{Ad}_{q|p'} \left\{ \frac{(pq) \varepsilon}{\text{D-minor}(t+1)} B \right\} = \\ &= \sum_{C_{n-2}^{t-1}} (-1)^{p''+q''+1} \cdot \det \left\{ \frac{(pq) \varepsilon}{\text{Dh-minor}(t)} B \right\}. \end{aligned}$$

Здесь индексы одного и того же элемента  $b_{pq}$  в диагональном миноре порядка  $(t+1)$  и в гиподиагональном миноре порядка  $t$  связаны между собой соотношением:  $p' + q' = p'' + q'' + 1$ .

Матричные коэффициенты 2-го рода легко выразить, используя (26). Вывод структуры коэффициентов закончен.

Итак, в сравнении со скалярными коэффициентами матричные коэффициенты в своей структуре дополнительно содержат гипо-диагональные миноры и также не содержат прочих миноров (последние для исходной матрицы  $B$  существуют при ранге  $r < n-1$ ). Это обстоятельство и

определяет местоположение 2-го рока относительно  $r'$  и  $r$ . А именно 2-й рок не может быть меньше 1-го рока в силу (28). Но он может быть больше его, в том числе на несколько единиц вплоть до величины ранга, для чего достаточно, чтобы имелся один ненулевой гиподиагональный минор порядка  $r'' > r'$ . Из структуры же видно, что 2-й рок не может быть больше ранга. Но он может быть меньше его (при условии  $r' < r$ ), в том числе на несколько единиц вплоть до 1-го рока, для чего достаточно, чтобы имелся один ненулевой прочий минор порядка  $r > r''$ .

*Следовательно, из структуры скалярных и матричных характеристических коэффициентов следует фундаментальное неравенство, связывающее основные параметры сингулярности матрицы:*

$$0 \leq r' \leq r'' \leq r \leq n. \quad (31)$$

Случай  $r' = 0$  соответствует нильпотентной матрице. В свою очередь, случай  $r'' = 0$  соответствует нулевой матрице. Если же она ненулевая, то  $r'' \geq 1$ , так как  $K_2(B,1)=B$ . Поэтому также  $r = 1 \leftrightarrow r'' = 1$ . Последний особый случай:  $r = n - 1 \leftrightarrow r'' = n - 1$ , так как  $K_1(B, n-1)=B^V$  - присоединённая матрица, в которой фигурируют все миноры ранга  $(n - 1)$ . Найденная структура подтверждает (29), а также (28) и через (27) рекуррентную формулу Варинга - Леверье (2). Заметим, что именно порядок  $r''$  является границей для обрыва алгоритма Сурьё - Фаддеева. Второй рок (наряду с другими параметрами сингулярности) для исходной  $B$  и для любой её собственной  $B_i$  является инвариантом линейного преобразования и неотъемлемой характеристикой сингулярной матрицы.

## **4.1.5. Минимальный аннулирующий многочлен от матрицы**

Одним из приложений полученных выше результатов является установление точной формулы для минимального аннулирующего многочлена. Пусть  $\mu_i = 0$  и  $\mu_i$  ( $i = \overline{1, q}$ ) - собственные значения некоторой сингулярной матрицы  $B$ ;  $s_i' = (n - r_i')$  суть их алгебраические кратности (индекс 1 у параметров сингулярной матрицы  $B$  в дальнейшем опускается, чтобы отметить факт её сингулярности). Например, это может быть любая собственная матрица  $B_i$ . Согласно (27) и теореме

Гамильтона - Кэли с учётом разложения на простые множители, имеем:

$$\begin{aligned}
 K_1(B, n) &= \sum_{t=0}^n (-B)^{n-t} k(B, t) = (-B)^{s'} \cdot \sum_{t=0}^{r'} (-B)^{t-1} k(B, t) = \\
 &= (-B)^{s'} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{s'} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} = Z. \tag{32}
 \end{aligned}$$

По сути это есть нулевой характеристический многочлен от матрицы  $B$ . С другой стороны, все характеристические коэффициенты порядка  $r'$  всегда ненулевые. Поэтому далее имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 K_1(B, r') &= \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} \neq Z, \\
 k(B, r') &= \prod_{i=2}^q \mu_i^{s_i'} \neq 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Из рекуррентной формулы Сурьё (25) в интервале  $r' < t \leq r''$  следует справедливость соотношений:

$$K_1(B, t) = (-B)^{t-1} \cdot K_1(B, r') = -K_2(B, t) \neq Z \tag{34}$$

(нильпотентные матричные коэффициенты).

Далее при превышении критического порядка на 1 имеем.

$$\begin{aligned}
 K_1(B, r'' + 1) &= (-B)^{r''-r'+1} \cdot K_1(B, r') = (-B)^{r''-r'+1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i'} = \\
 &= Z = (-B)^{r''-r'+1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} = (-B)^{s_0} \cdot \prod_{i=2}^q B_i^{s_i^0}, \tag{35}
 \end{aligned}$$

где  $s_i^0$  — кратность собственного значения  $\mu_i$  в минимальном аннулирующем многочлене, или его аннулирующая кратность. Но

$$(-B)^{r''-r'+1} \cdot \prod_{i=2}^q (\mu_i I - B)^{s_i^0} \neq Z.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned}
 s^0 &= r'' - r' + 1, \\
 s_i^0 &= r_i'' - r_i' + 1.
 \end{aligned} \right\} \tag{36}$$

Формулы (36) дают точные значения аннулирующих кратностей, то есть показателей степеней собственных матриц  $V_i = V - \mu_i I$  в минимальном аннулирующем многочлене от матрицы  $V$ . Эти кратности подчиняются классическому неравенству  $1 \leq s_i^0 \leq s_i'$ , так как  $r_i' \leq r_i''$  и имеет место (32). Подставляя в него значения из (36), получаем слабое неравенство  $r_i'' \leq n - 1$ . Следовательно, указанное классическое неравенство для сингулярной матрицы можно усилить сверху, а именно:

$$1 \leq s_i^0 \leq r_i - r_i' + 1 \leq s_i' \tag{37}$$

Теперь видно, что если, наоборот, выразить неизвестный 2-й рок через известную аннулирующую кратность по (36), то тогда не получилось бы ограничения  $r_i'' \leq r_i$ . Поэтому 1-й и 2-й рок являются первичными понятиями для сингулярной матрицы, а аннулирующая кратность - вторичное понятие. Равенства сверху в (37) имеют место сначала при  $r_i'' = r_i$  и затем при  $r_i'' = n - 1 = r_i \geq r_i'$ . Далее рассмотрим, при каких условиях имеет место равенство в (37) снизу, или  $r_i' = r_i''$ . Для этого воспользуемся классическим неравенством Сильвестра

$$\min(r_1, r_2) \geq \text{rang} \{C_2 \cdot C_1\} \geq r_1 + r_2 - n$$

Для произведения нескольких матриц или для степени матрицы лучше перейти к сингулярностям вместо рангов. Тогда ограничение выражается лаконично с характеристиками, независящими от  $n$ :

$$\max(\text{sing } C_i) \leq \text{sing} \prod_{i=k}^l C_i \begin{cases} \leq n, \\ \leq \sum_{i=1}^k \text{sing } C_i; \end{cases} \tag{38}$$

$$\text{sing } C \leq \text{sing } C^h \begin{cases} \leq n, \\ \leq h \text{ sing } C, \end{cases} \tag{39}$$

где  $h$  — целое положительное число.

Благодаря применению сингулярностей вместо рангов непосредственно видно, что в правой нижней части (38) или (39) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\langle \ker C_i \rangle \subset \langle \text{im} \prod_{i=1}^k C_i \rangle, \quad i = \overline{2, k}.$$



В частности, для попарно коммутативных матриц это тождественно условию

$$\langle \ker B_1^h \rangle \cap \langle \ker B_2^h \rangle \equiv \langle 0 \rangle$$

Тогда из (38) имеем'

$$n = \text{sing} \prod_{i=1}^q B_i^{h_i \geq r_i^0} = \sum_{i=1}^q \text{sing} B_i^{h_i \geq r_i^0}.$$

С другой стороны,  $\text{rang} B_i^h \geq r_i'$ , или  $\text{sing} B_i^h \leq s_i'$ , так как алгебраическая кратность и 1-й рок для степеней матрицы не изменяются. С учётом того, что  $\sum_{i=1}^q s_i' = n$ , отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \text{sing} B_i^{h_i < s_i^0} < s_i', \\ \text{sing} B_i^{h_i < s_i^0} = s_i'. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Тогда из (39) и (40) следуют частные неравенства

$$\left. \begin{aligned} s_i^0 \cdot s_i \geq s_i' \quad (s_i^0, s_i \leq s_i'), \\ s_i^0 \cdot s_i \geq s_i' \quad (s_i^0, s_i \leq s_i'). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Набор значений сингулярностей или рангов степеней матрицы в (40), как известно, однозначно определяет набор жордановых субклеток в ультраинвариантной клетке размера  $s_i' \times s_i'$ , а критический показатель степени матрицы определяет размер максимальной жордановой субклетки  $s_i^0 \times s_i^0$ . Если  $s_i^0 = 1$ , или  $r_i' = r_i''$ , то из (41) вытекает  $s_i = s_i'$ . И наоборот  $s_i = s_i' \rightarrow r_i' = r_i'' = r_i$ . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} s_i^0 = 1 \leftrightarrow r_i' = r_i'' \leftrightarrow r_i' = r_i, \\ s_i^0 = 1 \leftrightarrow r_i' = r_i'' \leftrightarrow r_i' = r_i. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Заметим, что известное классическое утверждение, получаемое из жордановой формы:

$$"(s_i^0 = 1 \xleftrightarrow{i=1, q} s_i = s_i') \leftrightarrow B \in \langle P \rangle - \text{простая матрица}"$$

непосредственно следует из (42), но не детализировано, как здесь, по каждому собственному подпространству. Другой крайний случай, согласно (41), имеет вид:

$$s_i = 1 \leftrightarrow s_i^0 = s_i' \leftrightarrow r_i'' = n - 1 = r_i. \quad (43)$$

### 4.1.6. Нуль-простые и нуль-дефектные сингулярные матрицы

Матрица, соответствующая  $r' = r$ , определяется здесь как *нуль-простая* и далее иногда обозначается как  $Вр$ . То есть она обладает свойствами простой матрицы на собственном подпространстве  $\langle \ker Вр \rangle \equiv \langle \ker Вр^h \rangle$ , соответствующем её нулевому собственному значению.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-простой тогда и только тогда, когда справедливо любое из утверждений:*

- 1) 1-й рок равен 2-му року,
- 2) 1-й рок равен рангу,
- 3) ранг квадрата матрицы равен рангу матрицы,
- 4) пересечение ядра и образа матрицы есть нулевой элемент,
- 5) ядро и образ матрицы образуют прямую сумму.

Последнее свойство обуславливает существование для нуль-простой матрицы характеристических аффинных проекторов.

Матрица, для которой  $r' < r$ , определяется здесь как *нуль-дефектная*. Согласно (35), для неё существует характеристическая нильпотентная матрица

$$O_1 = \{K_1(B^{s^0}, r_B') / k(B^{s^0}, r_B')\} \cdot B; \quad O_1^{s^0} = Z, \quad (I \pm O_1)^{s^0} = I. \quad (44)$$

В свою очередь, нильпотентная матрица из (23) является суммой всех собственных матриц  $O_i$ , где  $i = 1, q$ . Для нильпотентной матрицы  $r' = 0, r'' = s^0 - 1; s^0$  — степень нильпотентности. Согласно (39), её ранг подчиняется неравенствам:

$$s^0 - 1 = r'' \leq \text{rang } O_1 \leq n \cdot [r'' / (r'' + 1)] = n \cdot [(s^0 - 1) / s^0] \leq n - 1, \quad (45)$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \\ [n - s^0 \cdot (n - r)] \leq \end{array} \right\} \text{rang } O_1^h \leq r. \quad (46)$$

Из неравенства (37) следуют более точные оценки параметров сингулярности:

$$(n - 1) - (s_1' - s_1^0) \leq r_1 \leq n - 1, \quad (47)$$

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \leq s_1' - (s_1^0 - 1), \\ s_1^0 \leq s_1' - (s_1 - 1). \end{array} \right\} \quad (48)$$

Согласно жордановой форме, параметр  $(s_i^0 - 1) = r_i'' - r_i'$  выражает максимальное количество единиц на прилегающей диагонали, идущих подряд в пределах  $i$ -й ультраинвариантной клетки. Общее число единиц выражает параметр  $(s_i' - s_i) = r_i - r_i'$ . Это трактует неравенства (47) и (48), а также 1-й и 2-й рок. В свою очередь, неравенство (41) тоже иллюстрируется жордановой формой. А именно, удлинним на один нулевой элемент, например снизу, прилегающую диагональ  $i$ -й клетки. Получается квазидиагональ из  $s_i'$  элементов 0 или 1, выходящая за пределы клетки и оканчивающаяся нулём. При заданном  $s_i^0$  максимум общего количества единиц на квазидиагонали обеспечивает её равномерная разбивка на суботрезки длиной  $s_i^0$  с возможным остатком деления  $s_i'/s_i^0$ . Каждый из суботрезков состоит из единиц и оканчивается нулём, в том числе неполный при остатке есть последний суботрезок. Поэтому  $\min(s_i) = [s_i'/s_i^0]$  - целая часть указанного отношения. Равенство в (41) возможно только при целом отношении. Из неравенств (41) следуют тождественные им неравенства:

$$(n - r_i')(r_i'' - r_i') \geq r_i - r_i', \quad (49)$$

$$r_i' + [(s_i' - s_i)/s_i] \leq r_i'' \leq (n - 1) - [(s_i' - s_i^0)/s_i^0]. \quad (50)$$

Поэтому (41), (49) и (50) эффективны для оценок только при  $r_i'' < r_i$ . При этом условии  $s_i < s_i', s_i^0 > 3, s_i > 2, s_i^0 > 1, n > 3$ .

Определим параметр  $(r_i - r_i'')$  как  $i$ -й *дифферент* матрицы. Если  $r_i'' < r_i$ , то дефектная матрица - *нуль-дифферентная*. Из (49) следует, что максимальный дифферент как частный, так и общий составляет  $(\sqrt{n} - 1)^2 \leq n - 3$ , что достижимо, когда  $n$  есть квадрат целого числа. Максимум достигается при  $r = n - \sqrt{n}, r'' = \sqrt{n} - 1$  и  $r' = 0$  ( $q = 1$ ). Согласно (49),  $B_i$  есть *нуль-индифферентная* матрица в частных случаях:

$$\left. \begin{aligned} r_i = 1 &\leftrightarrow r_i'' = 1, \\ r_i = 2 &\leftrightarrow r_i'' = 2, \\ (n \leq 3 \text{ или } s_i' \leq 3). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Откуда следует правило, *дифферент отсутствует, если размерность пространства или ультраинвариантного подпространства не боchee трех*. Например, это правило может быть полезно при составлении минимального анулирующего многочлена исходя из рангов. Согласно жордановой форме, оно

означает, что в случае второго соотношения в (51) единицы на прилегающих диагоналях могут стоять только непрерывно.

*Некоторая квадратная матрица является нуль-индифферентной тогда и только тогда, когда ранги ее степеней последовательно уменьшаются на 1 (вплоть до степени  $s^0$ ).*

### 4.1.7. Характеристические коэффициенты в редуцированной форме

В заключение раздела вычислим все характеристические коэффициенты матрицы в редуцированной форме. Под редукцией здесь понимается максимально возможное понижение степеней характеристических многочленов от  $\varepsilon$  в числителе и знаменателе дроби (1) за счёт сокращения их общего делителя. Известен метод вычисления минимального аннулирующего многочлена матрицы  $B$  через *наибольший общий делитель* элементов матрицы  $(B + \varepsilon I)^v = (B - \mu I)^v$ . Нетрудно видеть, что последний сокращается в дроби (1) у числителя и у знаменателя. Вследствие этого претерпевают редукцию как многочлен Гамильтона - Кэли, так и характеристические коэффициенты, формулы их связи и алгоритм Сурьё — Фаддеева. Применение редукции к (24) даёт соотношение

$$q_B(\varepsilon) \cdot I = (B - \varepsilon I) \cdot Q_B(\varepsilon). \tag{52}$$

Здесь

$$q_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0} q(B,t) \cdot \varepsilon^{n^0-t},$$

$$Q_B(\varepsilon) = \sum_{t=0}^{n^0-1} Q_1(B,t) \cdot \varepsilon^{n^0-t-1},$$

где  $n^0$  - порядок минимального многочлена. Аналогично (24), формула (52) справедлива и для матричного параметра  $E$ . В частности, при  $E = -B$  отсюда следует минимальный аннулирующий многочлен как в скалярной, так и матричной форме (редуцированная теорема Гамильтона - Кэли), а также

следует редуцированная теорема Виета для скалярных коэффициентов:

$$\varphi_B(-B) = Q_1(B, n^0) = \sum_{t=0}^{n^0} (-B)^{n^0-t} \cdot \varphi(B, t) = \prod_{i=1}^q (\mu_i - B)^{s_i^0} = Z, \quad (53)$$

$$\varphi_B(-\mu) = \sum_{t=0}^{n^0} (-\mu)^{n^0-t} \cdot \varphi(B, t) = \prod_{i=1}^q (\mu_i - \mu)^{s_i^0}, \quad (54)$$

$$\varphi(B, t) = \sum_{C_n^t} \prod_{(t)} \mu_i \quad (q \leq n^0 = \sum_{i=1}^q s_i^0 \leq n). \quad (55)$$

Соответственно редуцируются (25) - (29). В редуцированном алгоритме Сурьё - Фаддеева начальные условия те же, но далее используется редуцированный след и т.д.

$$Q_1(B, 0) = I, \quad Q_2(B, 0) = Z, \quad Q_2(B, 1) = B; \quad \varphi(B, 1) = \sum_{n^0} \mu_i.$$

Редуцированный детерминант есть

$$\varphi(B, n^0) = \prod_{i=1}^q \mu_i^{s_i^0}.$$

Обратная несингулярная матрица есть

$$B^{-1} = Q_1(B, n^0 - 1) / \varphi(B, n^0).$$

Интересно, что как бы эффективное количество собственных значений при этом снижается до  $n^0$ , а размер матрицы остаётся прежним. Высшие коэффициенты собственных матриц в редуцированной форме выражаются в виде.

$$\left. \begin{aligned} Q_1(B, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - B)^{s_j^0}, \\ \varphi(B, r_i^0) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i)^{s_j^0}, \quad j \neq i, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где  $r_i^0 = (n^0 - s_i^0)$  — редуцированный 1-й рок. Причём 2-й рок вследствие редукции формально равен  $(n^0 - 1)$ . Частная редукция составляет  $[(n - 1) - r_i'']$ , общая редукция равна  $(n - n^0)$ . Сумма основных частных параметров укладывается в неравенство

$$(n \cdot q - 1) = \sum_{i=1}^q r_i' \leq \sum_{i=1}^q r_i'' \leq \sum_{i=1}^q r_i \leq (n \cdot q - q).$$

Для простой матрицы:

$$n^0 = q, s_i^0 = 1, \varphi(P^h, 1) = \sum_{i=1}^q \mu_i^h, \varphi(P^h, q) = \varphi^h(P, q).$$

Для её же собственных матриц:

$$\left. \begin{aligned} Q_i(P, q-1) &= \prod_{j \neq i}^q (\mu_j \cdot I - P), \\ \varphi(P, q-1) &= \prod_{j=1}^q (\mu_j - \mu_i), \quad j \neq i. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

В свою очередь, для генерального спектрального представления матрицы общего вида интересны ещё три типа аннулирующих многочленов (кроме минимального), а именно в порядке повышения их степени:

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j^{\max s_i^0} \cdot I - B^{\max s_i^0}) = Z, \quad (58)$$

$$\prod_{j=1}^q [\mu_j^{\max (r_i - r_i' + 1)} I - B^{\max (r_i - r_i' + 1)}] = Z, \quad (59)$$

$$\prod_{j=1}^q (\mu_j^{\max s_i'} \cdot I - B^{\max s_i'}) = Z. \quad (60)$$

В этих формулах все три типа степени  $B$  являются простыми матрицами. Редуцированные коэффициенты высшего порядка для этих степенных матриц определяют формулы (57). Конечно, вышеуказанное представление основных характеристик точных матриц в редуцированной форме имеет, прежде всего, теоретическое значение. В какой-то мере оно переносит методы теории чисел на теорию точных матриц.

В практическом же плане несравненно более важное значение имеет корректное определение *основных* параметров сингулярности точной матрицы, что непосредственно связано со структурой её характеристических коэффициентов - скалярных и матричных.

Таким образом, в данном микромодуле была полностью идентифицирована структура всех характеристических коэффициентов квадратной матрицы, в том числе коэффициентов высшего порядка для сингулярной матрицы. (Напомним, что к множеству последних принадлежат все собственные матрицы  $B_i$ .) Это, в частности, позволило

установить взаимоотношения между основными параметрами сингулярности, которые имеют особое значение в развиваемой далее тензорной тригонометрии. В свою очередь, через характеристические коэффициенты высшего порядка непосредственно в явном виде выражаются собственные проекторы сингулярных матриц, а также конструируются модальные матрицы для приведения к основной и другим каноническим формам.

## 4.2. Собственные аффинные и ортогональные проекторы

### 4.2.1. Аффинные проекторы и квазиобратная матрица во взаимосвязи с коэффициентами высшего порядка

Пусть  $V_r$  есть нуль-простая матрица. Тогда  $k(V_r, r) \neq 0$ , где порядок коэффициента  $r = \text{rang } V_r$ . Формула (26) приводится к виду:

$$\{K_1(V_r, r)/k(V_r, r)\} + \{K_2(V_r, r)/k(V_r, r)\} = \vec{V}_r + \overleftarrow{V}_r = I.$$

Здесь и далее  $\vec{V}_r$  и  $\overleftarrow{V}_r$  обозначают собственные характеристические *аффинные* проекторы для  $V_r$  и вместе с тем — идемпотентные матрицы. В случае пространства с евклидовой метрикой это также суть собственные характеристические *косогональные* проекторы. В аффинном пространстве  $\vec{V}_r$  проецирует на ядро  $\langle \ker V_r \rangle$  параллельно образу  $\langle \text{im } V_r \rangle$ , а  $\overleftarrow{V}_r$  проецирует на образ  $\langle \text{im } V_r \rangle$  параллельно ядру  $\langle \ker V_r \rangle$ . Действительно,

$$K_2(V_r, r) = V_r \cdot K_1(V_r, r - 1) = K_1(V_r, r - 1) \cdot V_r;$$

$$\vec{V}_r + \overleftarrow{V}_r = I, \quad \vec{V}_r \cdot \overleftarrow{V}_r = \overleftarrow{V}_r \cdot \vec{V}_r = Z;$$

$$\left(\vec{V}_r\right)^2 = \vec{V}_r \cdot (I - \overleftarrow{V}_r) = \vec{V}_r, \quad \left(\overleftarrow{V}_r\right)^2 = \overleftarrow{V}_r \cdot (I - \vec{V}_r) = \overleftarrow{V}_r;$$

$$\langle \ker V_r \rangle \oplus \langle \text{im } V_r \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle, \quad x = \vec{V}_r x + \overleftarrow{V}_r x = \vec{x} + \overleftarrow{x}.$$

Отсюда видно, что произвольный элемент  $x$  однозначно разлагается на проекции  $\vec{x}$  (на  $\langle \ker B_p \rangle$  параллельно  $\langle \text{im } B_p \rangle$ ) и  $\overleftarrow{x}$  (на  $\langle \text{im } B_p \rangle$  параллельно  $\langle \ker B_p \rangle$ ). Итак,

$$\vec{B}_p = K_1(B_p, r) / k(B_p, r), \tag{61}$$

$$\overleftarrow{B}_p = K_2(B_p, r) / k(B_p, r) = B_p \cdot K_1(B_p, r - 1) / k(B_p, r) = K_1(B_p, r - 1) \cdot B_p / k(B_p, r). \tag{62}$$

Для некоторых частных случаев имеем:  $\vec{a} = 0, \overleftarrow{a} = 1$  (где  $a$ -скаляр);

$$\vec{Z} = I, \overleftarrow{I} = Z;$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(B_p, r) \rangle &\equiv \langle \ker K_2(B_p, r) \rangle \equiv \langle \ker B_p \rangle, \\ \langle \ker K_1(B_p, r) \rangle &\equiv \langle \text{im } K_2(B_p, r) \rangle \equiv \langle \text{im } B_p \rangle; \end{aligned} \right\} \tag{63}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rang } K_1(B_p, r) &= \text{sing } B_p, \\ \text{rang } K_2(B_p, r) &= \text{rang } B_p; \end{aligned} \right\} \tag{64}$$

$$(\vec{B}_p)' = (\overleftarrow{B}_p)', (\overleftarrow{B}_p)' = (\vec{B}_p)', (\vec{B}_p) = (\overleftarrow{B}_p) = \overleftarrow{B}_p, (\overleftarrow{B}_p) = (\vec{B}_p) = \vec{B}_p; \tag{65}$$

$$k(\vec{B}, t) = C_{n-1}^{-1}, \quad k(\overleftarrow{B}, t) = C_1^{-1}. \tag{66}$$

Для степени сингулярной матрицы получаем обобщения:

$$k(B^h, r') = k^h(B, r'), \tag{67}$$

$$K_{1,2}(B_p^h, r) = K^h_{1,2}(B_p, r) = k^{h-1}(B_p, r) \cdot K_{1,2}(B_p, r). \tag{68}$$

В аффинном пространстве определяется собственная аффинная квазиобратная матрица, коммутирующая с исходной матрицей:

$$\begin{aligned} B_p^- &= \overleftarrow{B}_p \cdot [K_1(B_p, r - 1) / k(B_p, r)] = [K_1(B_p, r - 1) / k(B_p, r)] \cdot \overleftarrow{B}_p = \\ &= B_p \cdot [K_1(B_p, r - 1) / k(B_p, r)]^2 = [K_1(B_p, r - 1) / k(B_p, r)]^2 \cdot B_p. \end{aligned} \tag{69}$$



Она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } B_p \rangle$  и нулевой — на  $\langle \text{ker } B_p \rangle$  и определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} B_p^{-\leftarrow} B_p &= B_p \cdot B_p^{-\leftarrow} = \overleftarrow{B_p} \\ B_p^{-\leftarrow} &= B_p \cdot B_p^{-\leftarrow} = B_p^{-\leftarrow} \cdot B_p \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Для неё же справедливы соотношения:  $\text{rang } B_p^{-\leftarrow} = \text{rang } B_p$ ;  
 $\langle \text{im } B_p^{-\leftarrow} \rangle \equiv \langle \text{im } B_p \rangle$ ,  $\langle \text{ker } B_p^{-\leftarrow} \rangle \equiv \langle \text{ker } B_p \rangle$ ;  $B^{-\leftarrow} = B^{-1} \leftrightarrow \det B \neq 0$ ;

$$B_p \cdot B_p^{-\leftarrow} B_p = B_p, \quad B_p^{-\leftarrow} B_p \cdot B_p^{-\leftarrow} = B_p^{-\leftarrow};$$

$$(B_p^{-\leftarrow})^{-\leftarrow} = B_p, \quad (B_p^h)^{-\leftarrow} = (B_p^{-\leftarrow})^h, \quad (B_p^{\leftarrow})^{-\leftarrow} = (B_p^{\leftarrow})^{\leftarrow}.$$

Согласно (1), (61), (62) и (69), аффинные проекторы и квазиобратная матрица представляются пределами:

$$\overrightarrow{B_p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \cdot (B_p + \varepsilon I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} (N \cdot B_p + I)^{-1}, \quad (71)$$

$$B_p^{-\leftarrow} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B_p (B_p + \varepsilon I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot B_p (N \cdot B_p + I)^{-1}], \quad (72)$$

$$B_p^{-\leftarrow} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B_p \cdot (B_p + \varepsilon I)^{-2}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [N^2 \cdot B_p (N \cdot B_p + I)^{-2}]$$

$$(\overrightarrow{B_p} - \overleftarrow{B_p}) = I, \quad B_p^{-\leftarrow} B_p = B_p \cdot B_p^{-\leftarrow} = \overleftarrow{B_p}; \quad N = 1/\varepsilon. \quad (73)$$

Тривиальными частными случаями нуль-простых матриц  $B_p$  являются собственные простые матрицы  $P_1 = P - \mu_1 \cdot I$ ,  $P_1 = P$  ( $\mu_1 = 0$ ), в том числе собственные нормальные и симметричные матрицы, степенные матрицы вида  $B^{h \geq s^+}$ ,  $B_i^{h \geq s_i^+}$ .

## 4.2.2. Применение результатов в спектральном представлении матрицы и для её приведения к основной канонической форме

Характеристические аффинные проекторы для собственных *ультраинвариантных* подпространств, образующих всегда прямую сумму, можно вычислить исходя из (57) для простой матрицы  $P$  и исходя из (58)—(60) для дефектной матрицы  $B$  :

$$\vec{P}_i = \prod_{j=1}^q (\mu_j \cdot I - P) / (\mu_j - \mu_i), \tag{74}$$

$$\vec{Bp}_{(i)} = \prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{s_j^0} / (\mu_j - \mu_i)^{s_i^0} = \prod_{j=1}^q (\mu_j^{h'} \cdot I - B^h) / (\mu_j^{h'} - \mu_i^{h'}) = \overrightarrow{(B^h)}_i, \tag{75}$$

где  $(j \neq i)$ ,  $h' \geq \max s_i^0$ ;  $Bp_{(i)} = B_i^{s_i^0}$ . Спектральное представление матрицы  $B$  с точностью до ультраинвариантных подпространств дает одновременно её разложение на характеристические простую и нильпотентную матрицы. Такое разложение, согласно (23), интерпретируется жордановой формой и выражается формулой:

$$B = B \cdot \sum_{i=1}^q \vec{Bp}_{(i)} = \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot \vec{Bp}_{(i)} + \sum_{i=1}^q B_i \cdot \vec{Bp}_{(i)} = \sum_{i=1}^q P_i + \sum_{i=1}^q O_i = P_B + O_B$$

$$(P_B^{h'} = B^{h'}, O_B^{h'} = Z). \tag{76}$$

Для составления модальной матрицы преобразования  $B$  к *основной* (диагонально-клеточной) канонической форме могут использоваться коэффициенты вида:

$$K_1(B_i, r_i^1) = \prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{s_j^1}, \text{ согласно (33).}$$

$$Q_1(B_i, r_i^0) = \prod_{j=1}^q (\mu_j I - B)^{s_j^0}, \text{ согласно (56),}$$

$$Q_1[(B^h)_i, q-1] = \prod_{j=1}^q (\mu_j^h I - B^h)^{s_j^0}, \text{ согласно (58)-(69), } (j \neq i).$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } K_1(B_i, r_i^1) \rangle &\equiv \langle \text{im } Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \text{im } Q_1[(B^h)_i, q-1] \rangle \equiv \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle, \\ \langle \ker K_1(B_i, r_i^1) \rangle &\equiv \langle \ker Q_1(B_i, r_i^0) \rangle \equiv \langle \ker Q_1[(B^h)_i, q-1] \rangle \equiv \langle \text{im } B_i^{s_i^0} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Все эти коэффициенты являются нуль-простыми матрицами. Но высшие скалярные коэффициенты последних - ненулевые. Поэтому такие матрицы обязательно имеют базисный диагональный минор, на перекрёстке которого расположены базисная  $r_i^1 \times n$ -субматрица строк и базисная  $n \times r_i^1$ -субматрица столбцов. Соответственно из субматриц столбцов составляется ковариантная, а из субматриц строк - контравариантная модальные матрицы:

$$V_{\text{col}}^{-1} \cdot B \cdot V_{\text{col}} = C_\mu, \quad \tilde{E}_1 = V_{\text{col}} \cdot \tilde{E}. \quad (78)$$

$$V_{\text{lg}} \cdot B \cdot V_{\text{lg}}^{-1} = C_\mu, \quad \tilde{E}_2 = V_{\text{lg}}^{-1} \cdot \tilde{E}, \quad (79)$$

$$V'_{\text{lg}} \cdot B' \cdot V'_{\text{lg}} = C'_\mu, \quad \tilde{E}_3 = V'_{\text{lg}} \cdot \tilde{E}, \quad (80)$$

$$V^*_{\text{lg}} \cdot B^* \cdot V^*_{\text{lg}} = C^*_\mu, \quad \tilde{E}_4 = V^*_{\text{lg}} \cdot \tilde{E}, \quad (81)$$

где  $C_\mu$  обозначает каноническую клеточную форму матрицы  $B$  в последовательности собственных значений  $\mu_1, \dots, \mu_q$ ;  $\tilde{E}$  и  $\tilde{E}_k$  — матрицы вектор-столбцов исходного базиса и базиса канонической формы. Кроме того, каждое ультраинвариантное подпространство содержит, как известно, инвариантные подпространства:

$$\left. \begin{aligned} \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle &\supset \langle \text{im } O_i^1 \rangle \supset \dots \supset \langle \text{im } O_i^{s_i^0-1} \rangle, \\ \langle \ker B_i^{s_i^0} \rangle &\supset \langle \ker O_i^{s_i^0-1} \rangle \supset \dots \supset \langle \ker O_i^1 \rangle; \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } O_i^t \rangle &\equiv \langle \text{im } K_i(B_i, r_i^t) \cdot \cdot \cdot \rangle \equiv \langle \text{im } Q_i(B_i, r_i^0) \cdot B_i^t \rangle, \\ \langle \text{ker } O_i^t \rangle &\equiv \langle \text{im } B_i^t \rangle \quad (t = 1, \dots, s_i^0 - 1). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Если из проекции в ультраинвариантной клетке вычесть простую диагональную часть, то остаётся нильпотентная клетка, которая может далее подвергаться модальному преобразованию вплоть до нильпотентной жордановой формы.

Модальная матрица, составленная в (78) - (81), получена, в принципе, для простой матрицы  $P_B = \sum_{j=1}^q P_j$ . Поэтому общая форма ковариантной модальной матрицы имеет вид:

$$\langle V_{\text{col}} \rangle \equiv V_{\text{col}} \cdot \langle C_q \rangle \quad (V_{\text{lg}}^{-1} \in \langle V_{\text{col}} \rangle), \quad (84)$$

где  $C_q$  - клеточная произвольная несингулярная матрица, состоящая из несингулярных блоков  $c_1, \dots, c_q$ . Количество нильпотентных жордановых субклеток размера  $t \times t$  в  $i$ -й клетке основной формы с учётом известной формулы определится как

$$[(\text{rang } O_i^t - \text{rang } O_i^{t+1}) - (\text{rang } O_i^{t+1} - \text{rang } O_i^{t+2})].$$

Для генерального спектрального представления матрицы  $B$  и её аналитических функций используют интерполяционный многочлен Лагранжа, который даёт компонентные матрицы:

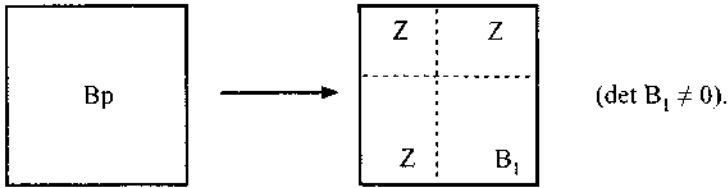
$$B_{(ik)} = [B_i^{k-1} / (k-1)!] \cdot \vec{B} p_{(i)}, \quad (\langle \text{im } B_{(ik)} \rangle \equiv \langle \text{im } O_i^{k-1} \rangle) \quad (85)$$

$$(k = 1, \dots, s_i^0).$$

Подставим сюда ранее полученное выражение (75) для фигурирующего здесь аффинного проектора. В результате итоговая формула для интерполяционного многочлена Лагранжа приобретает вполне завершённый вид, определяемый только самой исходной квадратной матрицей.

### 4.2.3. Приведение нуль-простой матрицы к нуль-клеточной форме

Нуль-простая матрица приводится модальным преобразованием к нижеуказанной *нуль-клеточной* форме  $B_c$ :



Обратим внимание на то, что высшие матричные коэффициенты  $K_{1,2}(B_p, r)$  и  $K_{2,2}(B_p, r)$  как нуль-простые матрицы обязательно содержат базисные диагональные миноры. Они определяют две базисные  $p \times s$ -и  $p \times r$ -субматрицы столбцов. Из последних составляется ковариантная модальная матрица для преобразования базиса:

$$V_{col}^{-1} \cdot B_p \cdot V_{col} = B_c$$

$$(\tilde{E}_1 = V_{col} \cdot \tilde{E}, \langle V_{col} \rangle \equiv V_{col} \cdot \langle C_2 \rangle).$$

(86)

Заметим, что вместо вышеуказанного коэффициента 2-го рода может использоваться непосредственно исходная матрица  $B_p$ , так как их образы тождественные. Пусть дана пара нуль-простых матриц  $B_p$  одинакового размера, для которых выполняется одновременно два условия:

$$\langle im B_{p_1} \rangle \equiv \langle im B_{p_2} \rangle, \langle im B_{p_1}' \rangle \equiv \langle im B_{p_2}' \rangle$$

$$(\vec{B}_{p_1} = \vec{B}_{p_2}, \overleftarrow{B}_{p_1} = \overleftarrow{B}_{p_2}).$$

Тогда с учётом (86) для них следуют соотношения:

$$K_{1,2}(B_{p_1} \cdot B_{p_2}, r) = K_{1,2}(B_{p_2} \cdot B_{p_1}, r) = K_{1,2}(B_{p_1}, r) \cdot K_{1,2}(B_{p_2}, r),$$

$$k(B_{p_1} \cdot B_{p_2}, r) = k(B_{p_2} \cdot B_{p_1}, r) = k(B_{p_1}, r) \cdot k(B_{p_2}, r).$$

(87)

В частности, последнее из них обобщает классическую формулу для детерминанта произведения матриц:  $\det(B_1 \cdot B_2) = \det(B_2 \cdot B_1) = \det B_1 \cdot \det B_2$ .

## 4.2.4. Нуль-нормальные сингулярные матрицы

Рассмотренные выше проекторы  $\overrightarrow{V_r}$  и  $\overleftarrow{V_r}$  взаимно-однозначно связаны с парой линейных подпространств  $\langle \text{im } V_r \rangle$  и  $\langle \text{ker } V_r \rangle$  в аффинном пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  с некоторым линейным базисом.

Пусть это есть *вещественное* пространство. Выделим множество вещественных нуль-простых матриц  $\langle V_m \rangle$ , для которых имеют место соотношения:

$$\overrightarrow{V_m} = \overrightarrow{V_m'} = (\overrightarrow{V_m})' \leftrightarrow \overleftarrow{V_m} = \overleftarrow{V_m'} = (\overleftarrow{V_m})', \quad (88)$$

Геометрически данное условие выражается так

$$\langle \text{ker } V_m \rangle \equiv \langle \text{ker } V_m' \rangle \leftrightarrow \langle \text{im } V_m \rangle \equiv \langle \text{im } V_m' \rangle. \quad (89)$$

При этом  $\langle \text{im } V_m \rangle$  и  $\langle \text{ker } V_m \rangle$  образуют в  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  прямую сумму, так как  $k(V_m, r) \neq 0$ . В евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  проявляется геометрическая исключительность этих матриц, причём при использовании ортонормированного базиса:

$$\langle \text{ker } V_m' \rangle \equiv \langle \text{im } V_m \rangle^\perp \equiv \langle \text{ker } V_m \rangle,$$

$$\langle \text{im } V_m' \rangle \equiv \langle \text{ker } V_m \rangle^\perp \equiv \langle \text{im } V_m \rangle.$$

(90)

*То есть матрица, заданная в ортонормированном базисе в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , имеет симметричные характеристические проекторы тогда и только тогда, когда подпространства  $\langle \text{im } V_m \rangle$  и  $\langle \text{ker } V_m \rangle$  образуют прямую ортогональную сумму.*

Матрица  $V_m$  обладает свойствами нормальной матрицы на собственном подпространстве, соответствующем нулевому собственному значению. Поэтому она определяется как *нуль-нормальная*, а её проекторы — как ортогональные. В частности, это суть сингулярные нормальные, в том числе симметричные и кососимметричные матрицы, а также несингулярные матрицы. Имеют место соотношения:

$$\begin{array}{l}
 \overrightarrow{Bm} = \overrightarrow{Bm}' = K_1(Bm,r)/k(Bm,r) \leftrightarrow K_1(Bm,r) = K_1'(Bm,r) \\
 \overleftarrow{Bm} = \overleftarrow{Bm}' = K_2(Bm,r)/k(Bm,r) \leftrightarrow K_2(Bm,r) = K_2'(Bm,r). \quad (91)-(92)
 \end{array}$$

Проектор  $\overrightarrow{Bm}$  проецирует в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ортогонально на ядро матрицы  $Bm$ , а проектор  $\overleftarrow{Bm}$  проецирует ортогонально на её образ:  $\overrightarrow{Bm} \perp \overleftarrow{Bm}$ .

Очевидно, что все собственные матрицы  $B_i$  нуль-простые и вещественные, или все они имеют вещественные аффинные проекторы  $\overrightarrow{B}_i$  и  $\overleftarrow{B}_i$ , тогда и только тогда, когда  $B$  простая вещественная матрица с вещественной диагональной формой (собственными значениями). В свою очередь, для нормальной вещественной матрицы  $B = M$  существует ортогональная вещественная модальная матрица  $R$  её приведения к вещественной диагональной форме тогда и только тогда, когда она симметрична:  $M = S$ . Образ и ядро всех собственных матриц  $S$ , ортогонально дополняют друг друга в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ .

*Следовательно, некоторая вещественная матрица имеет все нуль-нормальные вещественные собственные матрицы тогда и только тогда, когда она симметрична*

В частном же случае собственные матрицы  $B_i$  и  $B_i'$  ранга  $(n - 1)$  имеют один и тот же  $i$ -й собственный вектор тогда и только тогда, когда  $B_i^V = (B_i^V)'$ . При этом ортонормирование столбцов по Граму — Шмидту отдельно в 2-х блоках модальной матрицы  $V_{col} = V_{lig}' B$  (86) даёт ортогональную модальную матрицу приведения к канонической нуль-клеточной форме:

$$R_{col}' \cdot Bm \cdot R_{col} = Bc$$

$$\langle R_{col} \rangle \equiv R_{col}' \langle R_2 \rangle, \quad \langle V_{col} \rangle \equiv R_{col}' \langle C_2 \rangle.$$

(93)

Если исходный базис был декартов, например  $\{1\}$ , то новый орто-нормированный базис будет выражаться в нём вектор-столбцами модальной матрицы  $\{R_{col}\} = \{R_{lig}'\}$ . Ориентация базиса сохраняется или выбирается путём умножения  $R_{col}$  справа на знакопеременную единичную матрицу. В частности, к нуль-нормальным матрицам принадлежат сингулярные  $M$  и  $S$ .

Аналогично (78), для симметричной матрицы  $S$  можно полностью сформировать ортогональную модальную матрицу

$R_{col}$  её приведения к диагональной форме. Если собственные значения матрицы  $S$  различны, то находимые через  $\langle \ker S_i \rangle$  все  $n$  её единичных собственных векторов сразу же дают искомую  $R_{col}$ . Если же некоторые из них вырождены (при  $s_i > 1$ ), то прибегают к ортонормированию по Ераму - Шмидту. Приведём встречаемый в основной части раздела характерный пример нуль-нормальных матриц, образуемых из прямоугольной  $n \times m$ -матрицы  $A$ :

$$Bm_1 = A_1 \cdot A_2', \quad Bm_1' = A_2 \cdot A_1'$$

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle, \quad \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = m < n),$$

(94)

$$Bm_2 = A_1' \cdot A_2, \quad Bm_2' = A_2' \cdot A_1$$

$$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \quad \text{rang } A_1 = \text{rang } A_2 = n < m).$$

(95)

Укажем некоторые другие свойства изучаемых нуль-нормальных матриц:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{(Bm' \cdot Bm)} &= \overrightarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overrightarrow{Bm}, \\ \overleftarrow{(Bm' \cdot Bm)} &= \overleftarrow{(Bm \cdot Bm')} = \overleftarrow{Bm}; \\ \langle \ker Bm' \cdot Bm \rangle &\equiv \langle \ker Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \ker Bm \rangle, \\ \langle \text{im } Bm' \cdot Bm \rangle &\equiv \langle \text{im } Bm \cdot Bm' \rangle \equiv \langle \text{im } Bm \rangle. \end{aligned} \right\}$$

(96)

Нуль-нормальные матрицы  $Bm$  и  $Bm'$  удовлетворяют двум условиям формулы (87). Поэтому для них также справедливы формулы расщепления:

$$\left. \begin{aligned} K_{1,2}(Bm \cdot Bm', r) &= K_{1,2}(Bm' \cdot Bm, r) = K_{1,2}^2(Bm, r), \\ k(Bm \cdot Bm', r) &= k(Bm' \cdot Bm, r) = k^2(Bm, r). \end{aligned} \right\}$$

(97)

В частности, последняя из них обобщает классическую формулу для детерминанта гомомультимпликации матрицы:

$$\det (B \cdot B') = \det (B' \cdot B) = \det^2 B.$$



### 4.2.5. Сферически ортогональные проекторы и квазиобратная матрица

Пусть  $A$  -  $n \times m$ -матриц,  $r = \text{rang } A$ . Тогда  $AA'$  и  $A'A \in \langle \text{Вм} \rangle$ . Согласно (91) и (92),

$$\overrightarrow{AA'} = K_1(AA', r) / k(AA', r), \quad \overrightarrow{A'A} = K_1(A'A, r) / k(A'A, r). \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} \overleftarrow{AA'} &= K_2(AA', r) / k(AA', r) = A \cdot A, \\ \overleftarrow{A'A} &= K_2(A'A, r) / k(A'A, r) = A' \cdot A, \end{aligned} \right\} \{k(AA', r) = k(A'A, r)\} \quad (99)$$

где  $\overrightarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \ker A' \rangle$ ,  $\overrightarrow{aa'} = [-aa' / a'a]$ ,

$\overleftarrow{AA'}$  проецирует ортогонально на  $\langle \text{im } A \rangle$ ,  $\overleftarrow{aa'} = a'a' / a'a$ ;

$A^+$ - квазиобратная  $m \times n$ -матрица Мура - Пенроуза, для которой  $\text{rang } A = \text{rang } A'$ . Согласно (99), она удовлетворяет условию:

$$\overleftarrow{A'A} \cdot A^+ = A^+ = A^+ \cdot \overleftarrow{AA'}. \quad (100)$$

Отсюда следует формула Диселла

$$A^+ = A' \cdot K_1(AA', r-1) / k(AA', r) = [K_1(A'A, r-1) / k(A'A, r)] \cdot A', \quad (101)$$

полученная им ранее через алгоритм Сурьё - Фаддеева. Если матричный коэффициент развернуть в многочлен (27), то непосредственно видна тождественность обеих частей этой формулы. В частности,  $\{a\}^+ = a'a'a$ . Квазиобратная матрица Мура - Пенроуза играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A \rangle$  и нулевой на  $\langle \ker A' \rangle$  при умножении слева:

$$A^+ \cdot C = A^+ \cdot (\overleftarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'}) \cdot C = A^+ \cdot \overleftarrow{AA'} \cdot C. \quad (102)$$

При умножения справа она играет роль обратной матрицы на  $\langle \text{im } A' \rangle$  и нулевой на  $\langle \ker A \rangle$ :

$$C \cdot A^+ = [C \cdot (\overleftarrow{A'A} + \overrightarrow{A'A})] \cdot A^+ = (C \cdot \overleftarrow{A'A}) \cdot A^+. \quad (103)$$

В частности,  $B^+$  коммутирует с  $B$  только на пересечении подпространств:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \text{im } B^+ \rangle$ . Отсюда следует, что

$$B^- = B \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle \leftrightarrow B^+ \cdot B = B \cdot B^+. \tag{104}$$

В любом случае, согласно (102) и (103),  $B^+$  представляется прямой ортогональной суммой обратной и нулевой матриц. Ортогональная квазиобратная матрица имеет исключительное геометрическое значение в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом. Среди всех квазиобратных матриц, задаваемых уравнением Пенроуза  $A \cdot X \cdot A = A$ , она, как известно, имеет минимальную норму Фробениуса, то есть матричную норму 1-го порядка. При этом, что тождественно, она является его нормальным решением как слева, так и справа. Указанное обстоятельство обусловлено требованием (100). Кроме того, она сама даёт те же нормальные решения с минимумом нормы Фробениуса для правого, левого и смешанного линейного матричного уравнения:

$$A_1 \cdot X = A \rightarrow \dot{X} = A_1^{-+} \cdot A, \tag{105}$$

$n \times m \quad n \times t \quad m \times t$

$$Y \cdot A_2 = A \rightarrow \dot{Y} = A \cdot A_2^{-+}, \tag{106}$$

$n \times m \quad t \times m \quad t \times n$

$$A_1 \cdot X \cdot A_2 = A \rightarrow \dot{X} = A_1^{-+} \cdot A \cdot A_2^{-+}. \tag{107}$$

$n_1 \times m_1 \quad n_2 \times m_2 \quad n_1 \times m_2 \quad m_1 \times n_2$

При этом невязка вышеуказанных линейных уравнений также имеет минимальную норму:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta}_1 &= -\overrightarrow{A_1 A_1^{-+}} \cdot A, \\ \dot{\Delta}_1 = Z &\leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1^{-+}} \cdot \mathcal{E}^{n \times t} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1^{-+}} \rangle; \end{aligned} \right\} \tag{108}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta}_2 &= -A \cdot \overrightarrow{A_2^{-+} A_2}, \\ \dot{\Delta}_2 = Z &\leftrightarrow A \in \langle \mathcal{E}^{t \times m} \cdot \overleftarrow{A_2^{-+} A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_L \overrightarrow{A_2^{-+} A_2} \rangle; \end{aligned} \right\} \tag{109}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Delta} &= -\overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A - A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2} + \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A \cdot \overrightarrow{A_2' A_2}, \\ \dot{\Delta} = Z &\leftrightarrow A \in \langle \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \mathcal{E}^{n_1 \cdot m_2} \cdot \overleftarrow{A_2' A_2} \rangle \equiv \langle \text{KER}_R \overrightarrow{A_1 A_1'} \cap \text{KER}_L \overrightarrow{A_2' A_2} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Кроме того,  $A^+$  является единственным элементом пересечения множеств правых и левых квазиобратных матриц, задаваемых уравнениями типа (99). В общем виде имеем:

$$\langle A_R^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overrightarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m \cdot n} \cdot \overleftarrow{A A'} \rangle \quad (111)$$

- они производят ортопроекторы, указанные в (108);

$$\langle A_1^- \rangle \equiv A^+ \oplus \langle \overleftarrow{A' A} \cdot \mathcal{E}^{m_1 \cdot n} \cdot \overleftarrow{A A'} \rangle; \quad (112)$$

— они производят ортопроекторы, указанные в (109);

$$A^+ = \langle A_R^- \rangle \cap \langle A_L^- \rangle. \quad (113)$$

Согласно (108) - (110), имеем:

$$\begin{aligned} \text{rang } A_1 &= n \rightarrow \dot{\Delta}_1 = Z, \\ \text{rang } A_2 &= m \rightarrow \dot{\Delta}_2 = Z, \\ \left. \begin{aligned} \text{rang } A_1 &= n_1 \\ \text{rang } A_2 &= m_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \dot{\Delta} = Z. \end{aligned} \quad (114)$$

В частности, исследуем дополнительно классическое уравнение:

$$\| Ax - a \| = \min, \quad \dot{x} = A^- \cdot a = \{ \dot{A}(r) / k(AA', r) \} \cdot a, \quad (115)$$

$$\dot{\delta} = -\overrightarrow{AA'} \cdot a; \quad (116)$$

$$\dot{\delta} = 0 \leftrightarrow a \in \langle \overrightarrow{\text{ker } AA'} \rangle \equiv \langle \text{ker } K_1(AA', r) \rangle. \quad (117)$$

Геометрически минимодульная невязка уравнения (115) есть антипроекция (116). Поэтому для её евклидовой нормы справедливо:

$$\|\dot{\delta}\|^2 = -\dot{\delta}' \cdot \mathbf{a}, \tag{118}$$

$$\|\dot{\delta}\| = \sin \varphi \|\mathbf{a}\|, \tag{119}$$

где  $\varphi$  - скалярный угол между вектором  $\mathbf{a}$  и подпространством  $\langle \text{im } A \rangle$ .

В заключение исходя из (101) дадим формулу для элементов  $(pq)$   $m \times n$ -матрицы  $\dot{A}(r)$  в (115) в эрмитизированной форме:

$$(pq) = \sum_{C_{m-1}^r} \sum_{C_{n-1}^r} \overline{\det \left\{ \begin{matrix} (qp) \in \\ \text{minor}(r) \end{matrix} A \right\}} \cdot \text{Ad}_{q'p'} \left\{ \begin{matrix} (qp) \in \\ \text{minor}(r) \end{matrix} A \right\},$$

где  $p = \overline{1, m}$ ,  $q = \overline{1, n}$ ;  $p'$  и  $q'$  - новые индексы элемента  $a_{qp}$  в минорах  $A$ .

В итоге формула (115) даёт обобщение формул Крамера. В частности, при  $r = n = m$  она даёт матричное решение невырожденного линейного уравнения, так как  $\dot{A}(n) = \det A \cdot A^v$ .  $k(AA^*, n) = \det A \cdot \det A$ .

## 4.3. Основные скалярные инварианты сингулярных матриц

### 4.3.1. Минорант матрицы и его применение

Если  $A_1$  и  $A_2$  суть  $n \times m$ -матрицы, то  $k(A_1 A_2', t) = k(A_2 A_1', t)$ . Напомним, что скалярные коэффициенты представляют собой сумму детерминантов диагональных миноров одного и того же порядка  $t$ . Представим каждый диагональный минор матрицы  $A_1 A_2'$  через мультипликацию  $t \times m$ -субматриц строк:

$$\{D\text{-minor}(t) A_1 A_2'\} = \{\text{lig}(t) A_1\} \cdot \{\text{lig}(t) A_2'\}.$$

Согласно формуле Бине — Коши, его детерминант есть сумма всех парных произведений детерминантов миноров порядка  $t$  с одним и тем же набором номеров столбцов. При транспонировании матриц  $A_1$  и  $A_2$  во всех указанных формулировках строки заменяют на столбцы, а столбцы на

строки. Именно так устанавливается взаимнооднозначное соответствие между двумя совокупностями  $C_n^t \cdot C_m^t$  произведений детерминантов миноров, которые в сумме составляют скалярные коэффициенты порядка  $t$  для матриц  $A_1 \cdot A_2'$  и  $A_1' \cdot A_2$ . Следовательно, эти коэффициенты равны между собой, что даёт формулу перегруппировки:

$$k(A_1 A_2', t) = k(A_1' A_2, t) = k(A_2 A_1', t) = k(A_2' A_1, t). \tag{120}$$

В частности, если  $A_1 = A_2 = A$ , то

$$k(AA', t) = \sum_{C_m^t} \sum_{C_n^t} \det^2 \{ \text{minor}(t)A \} = k(A'A, t) \geq 0. \tag{121}$$

Для высшего порядка  $t = r$  определим положительную характеристику прямоугольной матрицы — *минорант*:

$$\mathcal{M}t(r)A = \sqrt{k(AA', r)} = \sqrt{k(A'A, r)} = \mathcal{M}t(r)A' > 0.$$

Из (121) непосредственно видно, что минорант равен квадратному корню из суммы квадратов детерминантов всех базисных миноров матрицы.

Частные случаи для миноранта.

1) Пусть  $n > m = r$ . Тогда,  $\mathcal{M}t^2(m)A = \det A'A$  и квадрат миноранта равен определителю Грама для совокупности  $m$  вектор-столбцов  $A$ .

2) Пусть  $m = 1$ . Тогда минорант есть евклидова норма вектора  $\mathbf{a}$ .

3) Пусть  $n = m = r$ . Тогда минорант есть модуль детерминанта квадратной матрицы.

Используя (67), нетрудно получить минорант гомомультипликации

$$\begin{aligned} \mathcal{M}t(r) \underbrace{\{AA'A \dots\}}_h &= \mathcal{M}t(r) \{A'AA' \dots\} = \sqrt{k[(AA')^h, r]} = \sqrt{k^h(AA', r)} = \\ &= \mathcal{M}t^h(r)A. \end{aligned}$$

Пусть  $\{A|\mathbf{a}\}$  - расширенная по столбцам матрица уравнения (115). С учётом (116), используя известное свойство определителя Грама, получаем формулу

$$\mathcal{M}t(r+1)\{A|\mathbf{a}\} = \sin \varphi \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \mathcal{M}t(r)A = \|\dot{\delta}\| \cdot \mathcal{M}t(r)A. \tag{122}$$

В частности, отсюда имеем *формульное* выражение теоремы Кронекера - Капелли через значение суммы квадратов детерминантов всех миноров порядка  $(r + 1)$ :

$$\Delta^2(r + 1)\{A|a\} = 0 \leftrightarrow \delta = 0 \leftrightarrow \sin \varphi = 0.$$

Представим формулу (122) тригонометрически

$$0 \leq \sin \varphi = \Delta(r + 1)\{A|a\} / \Delta(r)A \cdot \Delta(1)a \leq 1. \tag{123}$$

В частности, получаем формулу для синуса угла между двумя векторами

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{12} &= \Delta(2)\{a_1|a_2\} / \Delta(1)a_1 \cdot \Delta(1)a_2 = \\ &= \sqrt{\det\{[a_1|a_2] \cdot [a_1|a_2]\} / \|a_1\| \cdot \|a_2\|} \geq 0. \end{aligned} \tag{124}$$

Используя связь миноранта  $n \times m$ -матрицы с определителем Грама для совокупности её вектор-столбцов ( $m \leq n$ ), нетрудно установить его геометрический смысл. Вначале рассмотрим случай  $m = r$ . (Такие специальные матрицы широко используются далее для представления линейных геометрических объектов.) Запишем матрицу в виде набора вектор-столбцов. Пусть  $A_j$  есть  $n \times j$ -матрица, образуемая первыми  $j$  вектор-столбцами. Каждая последующая  $A_{j+1}$  рассматривается как расширенная матрица  $\{A_j | a_{j+1}\}$ . К ней применяются формулы (119) и (122) или известная геометрическая связь с корнем из определителя Грама. В результате последовательного применения этих формул получаем выражение для миноранта в виде

$$\Delta(r)A = v_r = \|a_1\| \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \|a_2\| \cdot \sin \varphi_{1,2,3} \cdot \dots \cdot \|a_r\| \leq \|a_1\| \cdot \|a_2\| \cdot \dots \cdot \|a_r\|, \tag{125}$$

где  $v_r$  - обобщённый  $r$ -мерный объём косоугольного параллелепипеда, натянутого на вектор-столбцы матрицы  $A$  ( $0 < \varphi \leq \pi/2$ ). При  $n = m = r$  имеет место синусное неравенство Адамара. Кроме того, на основании (74) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta(r)A &= \prod_{i=2}^q \sigma_i^{\eta_i} > 0, \\ \overrightarrow{AA'} &= \prod_{i=2}^q (\sigma_i^2 \cdot I_{n \times n} - AA') / \sigma_i^2. \end{aligned} \right\} (\sigma_i > 0) \tag{126}$$

где  $\sigma_i^2$  - ненулевые собственные значения матрицы  $AA'$  или  $A'A$ .

В самом общем случае ( $n \geq m \geq r \geq t$ ) коэффициенты выражаются либо геометрически как суммы квадратов частных  $t$ -мерных объёмов, либо алгебраически как суммы Виета для собственных значений:

$$\left. \begin{aligned} k(AA',t) &= \sum_{C'_m} v_{t(p)}^2 = s_t(\sigma_i^2) = v_t^2 > 0, \\ k(AA',l) &= \sum_{l_{(p)}} l^2 = s_l(\sigma_i^2) = l^2 = \|A\|_t^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Если используются декартовы координаты, то  $v_{t(p)}$  есть ортопроекция объёма  $v_t$  ранга  $t$ . Отношение  $v_{t(p)}/v_t = \cos \alpha_p$  есть  $p$ -й направляющий косинус. Формула (127) выражает теорему Пифагора для линейных объектов, задаваемых, в частности,  $n \times r$ -матрицей. Все вышеуказанные характеристики всегда положительны и инвариантны по отношению к ортогональному преобразованию вектор-столбцов или вектор-строк  $A$  и базиса. Например,

$$Mt(r)A = Mt(r)\{R_1 \cdot A \cdot R_2\} = Mt(r)\sqrt{AA'} = Mt(r)\sqrt{A'A}. \quad (128)$$

Здесь, возможно, сингулярные арифметические корни связаны с матрицей через *квазиполярное разложение* (называемое ещё как *QR-разложение*):

$$A = S_1^{\oplus} \cdot Rq = \sqrt{AA'} \cdot \{(\sqrt{AA'})^+ \cdot A\}, \quad (129)$$

$$A = Rq \cdot S_2^{\oplus} = \{A \cdot (\sqrt{A'A})^+\} \cdot \sqrt{A'A}, \quad (130)$$

где  $S_1^{\oplus} = Rq \cdot S_2^{\oplus} \cdot Rq' \leftrightarrow AA' = Rq \cdot A'A \cdot Rq'$ ,

$$Rq = A (\sqrt{A'A})^+ = (\sqrt{AA'})^- \cdot A \rightarrow A \cdot \sqrt{A'A} = \sqrt{AA'} \cdot A,$$

$$Rq \cdot Rq' = \overleftarrow{AA'}, \quad Rq' \cdot Rq = \overleftarrow{A'A}, \quad Rq' = Rq^+.$$

Нетрудно видеть, что здесь преобразование  $A \rightarrow Rq$  тождественно по результату процессу ортогонализации Грама — Шмидта для системы  $m$  линейно независимых векторов:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \rightarrow \{e_1, e_2, \dots, e_m\} = Rq.$$

Это алгебраическое преобразование есть его некий *однозначный* вариант (для заданной последовательности). Вообще же в евклидовом пространстве процесс ортогонализации Грама — Шмидта приобретает мнемонически более удобную

алгебраическую форму и более очевидную геометрическую интерпретацию в сравнении с классической, если для его реализации применять ортопроекторы:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{a}_t - \sum_{k=1}^{t-1} [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k'] \cdot \mathbf{a}_t = \{I - \sum_{k=1}^{t-1} [\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k']\} \cdot \mathbf{a}_t;$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{v}_t / \|\mathbf{v}_t\|, \quad t = \overline{1, m}; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i' \quad (\text{в итоге имеем: } \mathbf{v}_1 = [\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1'] \cdot \mathbf{a}_1).$$

### 4.3.2. Синусные характеристики матриц

Если  $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_i\}_{n \times n}$ , где  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$ , то в декартовом базисе матрица  $\mathbf{E}$  задаёт  $n$ -рёберный (полигрантный) тензорный угол в  $\mathcal{E}^n$ , а  $|\det \mathbf{E}|$ , согласно неравенству Адамара (см. выше), определяет его скалярную синусную характеристику. Этому же полигранному углу однозначно соответствует взаимный тензорный угол, задаваемый матрицей  $\hat{\mathbf{E}} = \{\hat{\mathbf{e}}_i\}_{n \times n} = \{\overrightarrow{\mathbf{E}}_i' \cdot \mathbf{e}_i \cdot \sec \beta_i\}$ , где  $\mathbf{E}_i$  получают из исходной  $\mathbf{E}$  обнулением  $i$ -го столбца. Причём имеем ряд соотношений:

$$\cos \beta_i = \mathbf{e}_i' \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \cos^2 \beta_i = \mathbf{e}_i' \cdot \overrightarrow{\mathbf{E}}_i' \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i' \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = 0 \quad (0 < \cos \beta_i \leq 1).$$

Внутренние мультипликации этих двух матриц связаны формулами:

$$\mathbf{E}' \cdot \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{D}_{\cos \beta} = \hat{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{E},$$

$$\mathbf{E}' \mathbf{E} = \mathbf{D}_{\cos \beta} \cdot (\hat{\mathbf{E}}' \cdot \hat{\mathbf{E}})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{\cos \beta},$$

$$\hat{\mathbf{E}}' \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{D}_{\cos \beta} \cdot (\mathbf{E}' \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{\cos \beta};$$

$$\mathbf{G} = \sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}} \cdot \mathbf{E}' \mathbf{E} \cdot \sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}} = \hat{\mathbf{G}}^{-1} = [\sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}} \cdot \hat{\mathbf{E}}' \cdot \hat{\mathbf{E}} \cdot \sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}}]^{-1}. \quad (131)$$

Во взаимных базисах  $\{\mathbf{E} \sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}}\}$  и  $\{\hat{\mathbf{E}} \sqrt{\mathbf{D}_{\sec \beta}}\}$  матрицы  $\mathbf{G}$  и  $\hat{\mathbf{G}}$  суть соответствующие взаимные метрические тензоры. Синусные характеристики взаимных тензорных углов связаны формулой

$$\det (\mathbf{E}' \mathbf{E}) \cdot \det (\hat{\mathbf{E}}' \hat{\mathbf{E}}) = \det^2 \mathbf{D}_{\cos \beta} = \prod_{i=1}^n \cos^2 \beta_i.$$

Откуда следует, что  $|\det \mathbf{E}| \cdot |\det \hat{\mathbf{E}}| = \det \mathbf{D}_{\cos \beta} \cdot |\det \mathbf{E}| \cdot |\det \hat{\mathbf{E}}| \leq 1$ . Однако в данном разделе изучаются только тензорные углы



бинарного типа, то есть углы, образуемые парами линейных подпространств (при  $r = 1$  — прямых) или парами конечных линейных объектов (при  $r = 1$  - векторов).

Вернёмся к специальным прямоугольным матрицам ( $n>m=r$ ). Докажем, что для миноранта их внешних мультипликаций имеет место формула расщепления

$$\mathcal{M}^2(r)\{A_1 A_2'\} = \mathcal{M}^2(r)A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r)A_2 = \sqrt{\det(A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2' A_2)}. \tag{132}$$

Используя определение миноранта, квазиполярное разложение типа (130) и формулу (128), последовательно получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^2(r)\{A_1 \cdot A_2'\} &= k[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] = k[(Rq_1 \cdot S_1^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_1^{\oplus} \cdot Rq_1'), r] = \\ &= k[(S_1^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_2^{\oplus} \cdot S_1^{\oplus}), r] = \det(A_1' A_1) \cdot \det(A_2' A_2) = \mathcal{M}^2(r)A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r)A_2. \end{aligned}$$

Далее для внешних мультипликаций будут применяться обозначения:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1',$$

где для специальных прямоугольных матриц имеем:

$$\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle,$$

$$\langle \text{ker } B \rangle \equiv \langle \text{ker } A_2' \rangle, \quad \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle, \quad \langle \text{ker } B' \rangle \equiv \langle \text{ker } A_1' \rangle.$$

С учётом того, что  $m = \text{rang } A$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overrightarrow{A_1 A_1'}, \\ \overrightarrow{B'B} &= \overrightarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overrightarrow{A_2 A_2'}, \\ \overleftarrow{BB'} &= \overleftarrow{\{A_1 A_2' A_2 A_1'\}} = \overleftarrow{A_1 A_1'}, \\ \overleftarrow{B'B} &= \overleftarrow{\{A_2 A_1' A_1 A_2'\}} = \overleftarrow{A_2 A_2'}. \end{aligned} \right\}$$

$$\tag{133}$$

С учётом формул (61), (62) и (132), (133) имеем:

$$\left. \begin{aligned} K_{1,2}[(A_1 A_2' A_2 A_1'), r] &= \det(A_2' A_2) \cdot K_{1,2}(A_1 A_1', r), \\ K_{1,2}[(A_2 A_1' A_1 A_2'), r] &= \det(A_1' A_1) \cdot K_{1,2}(A_2 A_2', r). \end{aligned} \right\}$$

$$\tag{134}$$

Пусть теперь ранг обеих прямоугольных матриц может отличаться, но  $r_1 + r_2 \leq n$ . Определим их *внешнюю суперпозицию* как  $\{A_1|A_2\}$ .

Обобщая (123), вводим *синусное отношение*:

$$\begin{aligned}
 |\{A_1|A_2\}|_{\sin} &= \mathcal{M}t(r_1 + r_2)\{A_1|A_2\} / \mathcal{M}t(r_1)A_1 \cdot \mathcal{M}t(r_2)A_2 = \\
 &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} A_1'A_1 & A_1'A_2 \\ A_2'A_1 & A_2'A_2 \end{pmatrix}} / \sqrt{\det(A_1'A_1)} \cdot \sqrt{\det(A_2'A_2)} \geq 0. \quad (135)
 \end{aligned}$$

Оно обобщает классическое соотношение (124) для синуса угла между векторами  $a_1$  и  $a_2$ . Синусное отношение имеет природу полу-определённой нормы. Отметим также, что с использованием миноранта классическая теорема Кронекера - Капелли естественным образом обобщается на матричные линейные уравнения типа (105) - (107):

$$\mathcal{M}t^2(r_1 + r_2 + 1) \begin{pmatrix} A_1 & A \\ Z & A_2 \end{pmatrix} = 0 \leftrightarrow \dot{\Delta} = Z. \quad (136)$$

### 4.3.3. Косинусные характеристики матриц

Далее определим ещё одну высшую скалярную характеристику, но только для квадратной матрицы — *дианаль*:

$$\mathcal{D}(r) B = k(B, r) = \mathcal{D}'(r) B'.$$

Используя понятия минорант и дианаль, определим другую скалярную тригонометрическую характеристику - *косинусное отношение*:

$$|\{B\}|_{\cos} = |\mathcal{D}(r) B| / \mathcal{M}t(r) B \geq 0, \quad (137)$$

которое имеет природу косинусной полуопределённой нормы. Нетрудно видеть, что это отношение равно 0 для нуль-дефектной матрицы и 1 для нуль-нормальной матрицы. В свою очередь, имеем:

$$\{B\}_{\cos} = \mathcal{D}(r) B / \mathcal{M}t(r) B = \prod_{i=2}^{q_1} \mu_i^{s_{1i}} / \prod_{j=2}^{q_2} \sigma_j^{s_{2j}}. \quad (138)$$

Если  $A_1$  и  $A_2$  суть  $n \times m$ -матрицы, то

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{Dl}(r) (A_1 \cdot A_2') / \mathcal{Ml}(r) (A_1 \cdot A_2') = \\ &= \mathcal{Dl}(r) (A_2 \cdot A_1') / \mathcal{Ml}(r) (A_2 \cdot A_1'). \end{aligned} \tag{139}$$

Если же  $A_1$  и  $A_2$  -  $n \times r$ -матрицы, то, согласно (120) и (132), имеем:

$$\begin{aligned} \{A_1 \cdot A_2'\}_{\cos} &= \mathcal{Dl}(r) (A_1 \cdot A_2') / \mathcal{Ml} r A_1 \cdot \mathcal{Ml} r A_2 = \\ &= \det (A_1' \cdot A_2) / \sqrt{\det (A_1' A_1)} \cdot \sqrt{\det (A_2' A_2)}. \end{aligned} \tag{140}$$

Причём  $\mu_1 (A_1 \cdot A_2') = \mu_1 (A_1' \cdot A_2)$ ,  $\sigma_j (A_1 \cdot A_2') = \sigma_j (A_1' \cdot A_2)$ . Соотношение (140) обобщает классическую формулу для косинуса угла между векторами  $a_1$  и  $a_2$ :

$$-1 \leq \cos \varphi_{12} = \text{tr} (a_1 \cdot a_2') / \mathcal{Ml}(1) a_1 \cdot \mathcal{Ml}(2) a_2 = a_1' \cdot a_2 / \|a_1\| \cdot \|a_2\| \leq +1. \tag{141}$$

Тригонометрический смысл косинусного и синусного отношений устанавливается далее на основе матричного тригонометрического спектра. Заметим, что квадрат формулы (135) можно рассматривать как тождество для координат некоторых линейных геометрических объектов, задаваемых матрицами  $A_1$  и  $A_2$ . При  $m = 1$  оно соответствует тождеству Лагранжа ( $n = 3$ ) и тождеству Коши ( $n > 2$ ) применительно к координатам пары центральных векторов в аффинном пространстве. С точки зрения евклидовой геометрии эти тождества для векторов имеют тригонометрический характер:

$$[\mathcal{Ml}(2) \{a_1 | a_2\} / \mathcal{Ml}(1) a_1 \cdot \mathcal{Ml}(2) a_2]^2 + [a_1' \cdot a_2 / \mathcal{Ml}(1) a_1 \cdot \mathcal{Ml}(2) a_2]^2 = 1. \tag{142}$$

Они являются основой для нормирования или измерения угла между векторами в евклидовом пространстве. Все дальнейшие родственные понятия рассматриваются далее применительно к линейным объектам - более общим, чем векторы.

### **4.3.4. Предельные методы вычисления проекторов и квазиобратных матриц**

Согласно (1) и (101), справедливы предельные формулы:

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A' \cdot (AA' + \varepsilon I)^{-1}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(A'A + \varepsilon I)^{-1} \cdot A'] = \quad (143)$$

$$\approx \lim_{N \rightarrow \infty} [N \cdot A' \cdot (N \cdot AA' + I)^{-1}] = \lim_{N \rightarrow \infty} [(N \cdot A'A + I)^{-1} \cdot N \cdot A']. \quad (144)$$

Здесь  $\xrightarrow{N \rightarrow \infty}$  используется то обстоятельство, что из  $A'A \cdot A' = Z = A' \cdot AA'$  следует соотношение  $K_1(A'A, r) \cdot A' = Z = A' \cdot K_1(AA', r)$ . Как и общие формулы (71)-(73), частные предельные формулы (143), (144) получены здесь чисто алгебраическим путём.

Впервые же нормальное решение линейного уравнения типа  $Ax = a$  в форме предела получил Тихонов, но функциональным способом. При этом был использован его же метод регуляризации применительно к задаче на условный экстремум частного характера. А именно: найти значение аргумента с минимумом евклидовой нормы на множестве, соответствующем минимуму невязки уравнения:

$$U(x, \varepsilon) = \varepsilon \cdot F_1(x) + F_2(x) = \min_{(\varepsilon \rightarrow 0)}, \quad dU/dx = 0_{(\varepsilon \rightarrow 0)}$$

$$(F_1(x) = x' \cdot x; \quad F_2(x) = \delta'(x) \cdot \delta(x), \quad \delta(x) = Ax - a).$$

(145)

Аналогичный результат, но в форме (144), мог быть получен ещё раньше методом штрафных функций Куранта:

$$W(x, N) = F_1(x) + N \cdot F_2(x) = \min_{(N \rightarrow \infty)}; \quad dW/dx = 0_{(N \rightarrow \infty)}.$$

(146)

Оба эти метода связаны взаимно-однозначно через умножение или деление на соответствующий скалярный параметр. В свою очередь, метод штрафных функций Куранта решает задачу на условный экстремум  $F_1(x)$  с градиентной  $(1 \times n)$  функцией ограничений  $h(x) = dF_2/dx = 0$ . Интегрирование позволяет в таком случае перейти от обычной *векторной* к новой и тождественной ей *скалярной форме* ограничения:

$$h(x) = \int_{x_0}^x h(x) dx = 0 = \text{const}.$$

(147)

Тогда имеем в (146) функцию Лагранжа  $W(x, N)$  и *единственный* в ней скалярный множитель Лагранжа  $N \rightarrow \infty$ , так как при этом из дифференциального уравнения в (146) следует, что

$$dh/dx \cdot N = h(x) \cdot N = 0 \cdot N = dF_1/dx \neq 0.$$

Например, вышеуказанные предельные методы применимы к решению задачи на условный экстремум  $F_1(\mathbf{x})$  на области стационарности  $F_2(\mathbf{x})$ . Данную цепочку можно продолжить в форме многочлена от  $\varepsilon$  или от  $N$ . Достаточное условие применимости этих двух предельных методов в дифференциальной форме (с малым или с большим параметром) есть, согласно (147), интегрируемость  $1 \times n$ -вектор-функции ограничений, а, следовательно, симметричность  $n \times n$ -матрицы Якоби:  $d\mathbf{h}/d\mathbf{x} = (d\mathbf{h}/d\mathbf{x})'$ . В случае нормального решения уравнения  $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$  указанная матрица Якоби есть матрица  $A$ .

*Согласно общему предельному методу, дифференциальные уравнения  $\varepsilon \cdot dF_1/d\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(0 \rightarrow 0)}$ , или  $dF_1/d\mathbf{x} + N \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{(N \rightarrow \infty)}$  дают полное решение, соответствующее условной стационарности функции  $F_1(\mathbf{x})$  при ограничении  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , тогда и только тогда, когда матрица Якоби вектор-функции ограничений  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  является нуль-нормальной; при этом характер условной стационарности задаёт предельная условная матрица Гессе (с точностью до скалярного параметра).*

В частности, этот метод даёт весьма просто явное решение задачи на условный экстремум функции второго порядка  $Q(\mathbf{x})$  при линейном ограничении  $\mathbf{V}m \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}$ . Для квазиобратной матрицы Мура - Пенроуза

$\mathbf{V}m^*$  имеем предельное значение, согласно (73) и (104). В свою очередь, аффинная квазиобратная матрица находится тем же функциональным способом, если использовать вспомогательное линейное преобразование базиса, приводящее нуль-простую матрицу Якоби к нуль-нормальной форме с учётом (69) и (104):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}p \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} &\rightarrow \{\mathbf{T} \cdot \mathbf{V}p \cdot \mathbf{T}^{-1}\} \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{a} \sim \mathbf{V}m \cdot \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{a} \rightarrow (\dot{\mathbf{T}}\mathbf{x}) = \mathbf{V}m^{-1} \cdot \mathbf{T}\mathbf{a} \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{V}m^{-1} \cdot \mathbf{T}\} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{V}p^{-1} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

## **4.4. Два альтернативных варианта комплексификации**

### **4.4.1. Сопоставление основных вариантов**

В силу природы комплексных чисел реализуются два принципиально различных подхода к операциям с задаваемыми

ими комплексными элементами. Эти операции определяют сущность выполняемой комплексификации.

*Адекватный подход* заключается в том, что комплексные элементы подвергают тем же операциям, которые применяют для вещественных элементов. Такой вариант комплексификации даёт возможность, как правило, использовать результаты, полученные ранее для вещественных понятий. Исключением при этом являются отношения типа неравенств, конечно, не для заведомо вещественных параметров. Особый случай отвечает *псевдоизащи*, когда комплексные элементы - вещественные и мнимые.

*Симбиозный подход*, помимо указанных операций, применяет для некоторых комплексных элементов независимую операцию комплексного сопряжения. В частности, *эрмитов подход* к комплексному векторному и матричному исчислению сопровождает каждую операцию транспонирования дополнительно комплексным сопряжением. Эрмитов вариант комплексификации даёт возможность использовать в самосопряжённой форме понятия вещественного положительного модуля и нормы, а также сохранить в той же форме отношения типа неравенств.

Эти альтернативные варианты определяют два пути дальнейшего развития теории и её приложений в комплексных пространствах. Так, соотношение  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle$  задаёт *адекватно нуль-нормальные* матрицы, а  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B^* \rangle$  задаёт *эрмитово нуль-нормальные* матрицы. Адекватно и эрмитово ортогональные проекторы и квазиобратная матрица определяются различно с учётом (98)—(101). Причём адекватные комплексные характеристики существуют также всегда, как и эрмитовы, поскольку из (86) имеем:

$$\text{Mt}^2(r)A = k(AA', r) = k(A'A, r) = \det B_1 = \prod_{i=1}^q v_i^2 \neq 0.$$

С другой стороны, в эрмитовом варианте:  $k(AA^*, t) = k(A^*A, t) > 0, t \leq r$ . В любом случае все проекторы - спектрально неотрицательные матрицы. Разумеется, *аффинные* проекторы и квазиобратная матрица не зависят от выбора варианта комплексификации. Заметим, что для комплексной *несингулярной* матрицы:  $\langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \text{im } B^* \rangle$ . Поэтому комплексная обратная матрица определяется однозначно.

К трём скалярным формам представления комплексного числа (алгебраическая, тригонометрическая и показательная) и к

векторной форме можно добавить ещё  $2 \times 2$ -матричную форму, которая вообще не содержит мнимой единицы:

$$\left. \begin{aligned}
 &W(a) \\
 &\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = S + K, \\
 &(a = p + iq) \\
 &W'(a) = W(\bar{a}) \\
 &\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = S - K, \\
 &(\bar{a} = p - iq)
 \end{aligned} \right\} \tag{148}$$

где  $S = S'$ ,  $K = -K'$ ,  $SK = KS$ . Форма (148) представляет число «а» геометрически в вещественном декартовом базисе евклидова пространства. Вещественные представления (148), как и комплексные, коммутативны и удовлетворяют всем формулам и тождествам для комплексных чисел. Они образуют транспонированные по отношению друг к другу пары - аналоги комплексных сопряжённых пар. С этой точки зрения вещественная нормальная  $n \times n$ -матрица представляет геометрически в некотором декартовом базисе  $k \leq [n/2]$  комплексных чисел и  $(n - 2k)$  вещественных чисел:  $M = R \cdot W \cdot R'$ . Простая вещественная матрица представляет те же числа в некотором аффинном базисе:  $P = V \cdot W \cdot V^{-1}$ . Матрица  $W$ , как известно, есть каноническая вещественная монобинарная форма, включающая в прямой сумме только  $1 \times 1$ - и  $2 \times 2$ -клетки. Она же с точностью до перестановок этих клеток является простейшим вещественным решением векового уравнения матрицы  $c(\mu) = 0$ . Применяя к простой матрице теорему Гамильтона — Кэли, получаем:  $V^{-1} \cdot \{c(P)\} \cdot V = c(W) = Z$ .

Далее на основе (148) осуществляем комплексификацию уже матричной формы числа — либо по адекватному варианту, либо по эрмитовому варианту. В первом случае имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 W(z_1) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline u & -v \\ \hline v & u \\ \hline \end{array} & = \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \psi & -\sin \psi \\ \hline \sin \psi & \cos \psi \\ \hline \end{array} = S + K, \\
 (z_1 = u + iv) \\
 \\
 W'(z_1) = W(z_2) \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline u & v \\ \hline -v & u \\ \hline \end{array} & = \rho \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \psi & \sin \psi \\ \hline -\sin \psi & \cos \psi \\ \hline \end{array} = S - K. \\
 (z_2 = u - iv)
 \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Адекватная W-форма (149) реализуется геометрически в адекватно декартовом базисе комплексного евклидова пространства. Комплексная адекватно нормальная матрица может представлять удвоенное количество комплексных чисел в тех же базисах. Элементы её W-формы - комплексные числа. Упрощение адекватно нормальной матрицы путём адекватно ортогонального модального преобразования возможно вплоть до канонической W-формы.

Во втором случае имеем:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline u & -v \\ \hline v & u \\ \hline \end{array} = H + Q, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bar{u} & \bar{v} \\ \hline -\bar{v} & \bar{u} \\ \hline \end{array} = H - Q, \\
 (z = u + iv) \quad \quad \quad (\bar{z} = \bar{u} - i\bar{v})
 \end{array} \quad (150)$$

где  $H = H^*$ ,  $Q = -Q^*$ ,  $HQ = QH$ . Эрмитова форма (150) реализуется в комплексном эрмитово декартовом (ортонормированном) базисе эрмитова пространства. Матрицы (150) и (148) при эрмитовой комплексификации упрощаются до диагональной формы в некотором эрмитово декартовом базисе. Ввиду этого эрмитово нормальная матрица представляет то же количество чисел - комплексных и вещественных, что и вещественная нормальная матрица. Её упрощение путём эрмитово ортогонального (унитарного) преобразования возможно вплоть до диагональной формы. Диагональные элементы:  $d_i = \rho_i \cdot \exp(i\beta_i)$ ;  $\rho_i = -\infty \div +\infty$ ,  $\beta_i = 0 - \pi$ . (Для адекватно ортогональных матриц  $d_i = \pm 1$ ; для эрмитово ортогональных матриц  $\rho_i = \pm 1$ .) Комплексные единицы  $\pm \exp(i\beta_i)$  являются в общем случае отражательными диагональными элементами. Комплексное отражение (*рефлексия*) реализуется только в эрмитовом варианте как



геометрическое преобразование. Если же диагональные элементы образуют комплексные сопряжённые пары, то в соответствующей бинарной тригонометрической клетке есть информация об эрмитовой ротации.

#### 4.4.2. Примеры адекватной комплексификации

Характерными примерами адекватной комплексификации являются формулы решений алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами; комплексные аналитические функции и тождества, дифференциалы и интегралы; тригонометрические формулы для комплексных углов. В комплексном пространстве, метризуемом по адекватному варианту, неизбежно получаются комплексные меры для протяжённости и угла, хотя в псевдоевклидовом пространстве реализуются вещественные и мнимые меры. Укажем соответствующие адекватные *псевдоаналоги*: псевдоевклидова геометрия, включая тригонометрию; псевдосферическая геометрия на сфере мнимого радиуса.

Рассмотрим, например, использование адекватной комплексификации в теории аналитических функций комплексного аргумента. Пусть  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ , где  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  -  $n \times 1$  - вектор-аргументы в комплексном и вещественных  $n$ -мерных евклидовых пространствах;  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + iF_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{z})$  - скалярная комплексная аналитическая функция от  $\mathbf{z}$ . Дифференцирование и интегрирование в евклидовом пространстве по  $n \times 1$ -вектор-аргументу осуществляется в декартовых координатах. Адекватные аналоги исходно имеют место для полных производных, дифференциалов и интегралов. Отсюда далее выводятся частные характеристики и устанавливается их взаимосвязь:

$$\begin{aligned} dF = \mathbf{h}(\mathbf{z})d\mathbf{z} &\leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 = (\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + i\mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}))(d\mathbf{x} + id\mathbf{y}) = \\ &= [\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x} - \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}] + i[\mathbf{h}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} + \mathbf{h}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{x}], \end{aligned}$$

где  $1 \times n$ -вектор-производные (частные градиенты) составляют пары:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}_1(x,y) &= \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\ \mathbf{h}_2(x,y) &= -\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

- уравнения Д'Аламбера-Эйлера в векторной форме (для скалярной функции F). Применим повторно ту же схему для  $1 \times n$ -вектор-функции

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{h}_1(x,y) + i\mathbf{h}_2(x,y):$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial y} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \partial x} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial x} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial y} \right)' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Первые два члена в цепочках этих равенств составляют уравнения Д'Аламбера - Эйлера в матричной форме (для дифференцируемой по комплексному аргументу вектор-функции). Наряду с симметричностью частных матриц Якоби (ввиду симметричности матриц Гессе), они же формулируют необходимые и достаточные условия полноты дифференциалов в квадратных скобках. Откуда для данных аналитических функций  $F_1$  и  $F_2$  (от двух вещественных аргументов) одновременно вытекают уравнения Лапласа в *матричной* форме.

В псевдоевклидовом пространстве (здесь в бинарной комплексной форме), в силу особенности его структуры, вышеуказанные характеристики и соотношения в некоторой степени видоизменяются:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ iy \end{bmatrix}; \quad dF = \mathbf{h}(z) dz \leftrightarrow dF = dF_1 + idF_2 = \left( \frac{dF_1}{dz} + i \cdot \frac{dF_2}{dz} \right) dz =$$

$$= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & i\mathbf{t}_1 \\ \mathbf{h}_2 & i\mathbf{t}_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} dx \\ idy \end{bmatrix} = [\mathbf{h}_1(x,y)dx - \mathbf{t}_2(x,y)dy] +$$

$$+ i[\mathbf{t}_1(x,y)dy + \mathbf{h}_2(x,y)dx],$$

где  $\mathbf{h}_1(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}$ ,  $\mathbf{h}_2(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ ,  $\mathbf{t}_1(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial y}$ ,  $\mathbf{t}_2(x,y) = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$ ; (a')

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', & \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y}^2} = \left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} = \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} \right)' = - \left( \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial \mathbf{x}} \right)', \\ \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{y} \partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial^2 F_2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{y}} \right)' = \left( \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \mathbf{y}} \right)' \end{aligned} \right\}$$

(6')

Отметим, что здесь уже нет требования по гармоничности функций  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  и  $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Ранее использованные понятия также имеют адекватные аналоги за исключением неравенств не для заведомо вещественных параметров. (Среди последних - ранг, 1-й и 2-й рок). Параллельность линейных объектов, как известно, - аффинное понятие. Именно поэтому она не зависит от выбора варианта комплексификации. Но оптимальная процедура проверки параллельности объектов для вещественного и комплексного пространств различается. Пусть две  $n \times m$ -матрицы  $A_1$  и  $A_2$  задают линейные подпространства (или линейные объекты) в аффинном пространстве  $\langle \mathbb{C}^n \rangle$ . Чтобы использовать в процедуре проверки параллельности характеристические симметричные проекторы, нужно перейти к тождественной по образу  $n \times n$ -матрице:  $\langle \text{im } AC \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle$ , где  $C$  -  $m \times n$ -матрица, удовлетворяющая условиям:

$$1) \langle \text{im } C \rangle \cap \langle \ker A \rangle = \emptyset \leftrightarrow \text{rang } AC = \text{rang } A; \quad 2) k(AC, r) \neq 0.$$

В частности, для вещественного пространства выбирают  $C = A'$ , а для комплексного пространства лучше выбрать  $C = A^*$ . Вообще же имеют место отношения:

$$1) \langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 C_1} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \overrightarrow{A_1 C_1} \cdot A_2 = Z$$

$$(\overrightarrow{A_1 A_1^*} \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2^*} \cdot A_1 A_1^*).$$

$$2) \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 C_1} \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2 C_2} \cdot A_1$$

$$(\overrightarrow{A_1 A_1^*} \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2 A_2^*} \cdot A_1 \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1^*} = \overleftarrow{A_2 A_2^*} \leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_1^*} = \overrightarrow{A_2 A_2^*}).$$

Но и для комплексных объектов можно также выбрать  $C = A'$ , так как для них имеем:

$$r = r' = \text{rang } A = \text{rang } AA' = \text{rang } A'A, \quad k(AA', r) \neq 0.$$

В свою очередь, ортогональность линейных объектов определяется для комплексного евклидова пространства в адекватном варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1' \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot A_1,$$

а для эрмитова пространства - в эрмитовом варианте:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow A_1^* \cdot A_2 = Z = A_2^* \cdot A_1.$$

### **4.4.3. Примеры эрмитовой комплексификации**

*Укажем примеры эрмитовой комплексификации.* Это принцип максимума модуля, справедливый в том числе для вектор-функций; результаты, изложенные ранее с использованием операции транспонирования, включая неравенства (123), (124) и (141); неравенство Адамара и отвечающее ему неравенство (125) для миноранта - все в самосопряжённой форме. В тензорной тригонометрии эрмитова пространства особое значение имеет самосопряжённый аналог тождества Коши (142), на основе которого определяются эрмитово сферические тригонометрические функции бинарных углов на эрмитовой плоскости. Аналогично производятся косинусное и синусное нормирующие неравенства для угла между двумя векторами в эрмитовом пространстве. Кроме того, в эрмитовом пространстве используют как аналоги вещественные положительно определённые меры: нормы для протяжённости и угла.

Формулировки теоремы Кронекера — Капелли через формулы (122) и (136) связаны с минорантным признаком параллельности. Минорант отличен от нуля в адекватном варианте и положителен в эрмитовом варианте комплексификации.

Более общий по сравнению с эрмитовым симбиозный подход, определённый в начале микромодуля, в применении к теории аналитических функций и к основным операциям анализа (ортогональное дифференцирование и интегрирование) в комплексном пространстве приводит к симбиозным аналогам. Это суть особые правила симбиозного, или сопряжённого

дифференцирования и интегрирования; особые условия дифференцируемости и аналитичности функций от сопряжённых аргументов  $\mathbf{x}$  и  $\bar{\mathbf{x}}$  и особые условия интегрируемости дифференциальных выражений (полноты дифференциала); симбиозные аналоги методов решения задач на безусловный и условный экстремум скалярной функции. Последняя необходимо симметрична по отношению к сопряжённым аргументам. По существу это есть дальнейшее развитие известной идеи формальных производных для анализа неголоморфных, в том числе особо важных *вещественных* функций комплексных переменных. Для иллюстрации таковых можно указать конкретные примеры: квадрат эрмитова модуля невязки (116) комплексного линейного уравнения - модульная функция  $\| \mathbf{Ax} - \mathbf{a} \|^2$ ; вещественные, в том числе положительные коэффициенты алгебраического уравнения, имеющего вещественные и комплексные сопряжённые корни-аргументы  $\mu_i$  - немодульные функции от корней, сводимые в  $n \times 1$ -вектор-функцию  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\boldsymbol{\mu})$ .

Используя эрмитов вариант модуля невязки комплексного линейного уравнения и предельного метода решения задачи на условный экстремум, приходим к функциональному способу вывода предельной формулы (143), (144) для комплексной квазиобратной матрицы Мура - Пенроуза.

## Раздел II.

# Фундаментальное содержание тензорной тригонометрии

В начале раздела II дана проективная версия евклидовой тензорной тригонометрии, развиваемая с применением собственных проекторов. Определяются проективные сферические функции и рефлекторы для тензорного угла между линеорами  $A_1$  и  $A_2$  или их образами - планарами ранга  $r_1$  и  $r_2$ . В иной, альтернативной интерпретации тензорный угол определяется между образами нуль-простых  $n \times n$ -матриц  $B$  и  $B'$  - планарами ранга  $r$ . Далее рассматривается каноническая структура тензорных тригонометрических функций и собственных рефлекторов. Определяется (с установлением его существенной роли в тензорной тригонометрии) понятие

срединного рефлектора. Самостоятельным образом последний вводится как фундаментальный рефлектор-тензор пространства, задающий бинарную структуру тензорных тригонометрий, базирующихся на квадратичных метриках. В частности, он задаёт бинарную структуру квазиевклидовой тригонометрии. На основе этого понятия осуществляется развитие ротационной (синусно-косинусной) и деформационной (тангенсно-секансной) формы квазиевклидовой тензорной тригонометрии, то есть её моторной версии. С применением сферическо-гиперболической аналогии абстрактного и конкретного типов осуществлено построение сходной по форме псевдоевклидовой тензорной тригонометрии с тем же рефлектор-тензором. Отдельно рассмотрена тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности простых матриц. Введены алгебраическим способом общие геометрические и тригонометрические квадратичные нормы матричных объектов, обоснованные через соответствующие тригонометрические спектры и генеральные неравенства. В заключении рассматривается тензорная тригонометрия в комплексных пространствах. Особое внимание уделено изучению движений в псевдоевклидовых пространствах, в том числе отдельно в пространстве Минковского.

## **4.5. Тензорная евклидова и квазиевклидова тригонометрия**

### **4.5.1. Объекты тензорной тригонометрии и их пространственные взаимоотношения**

Согласно аксиоме о континууме Кантора - Дедекинда, аффинные геометрическое и арифметическое пространства одной и той же размерности находятся в отношении изоморфизма, что распространяется и на их метрические формы. Это является основанием для геометрической трактовки результатов, получаемых алгебраическим путём. Исходные элементы  $n$ -мерного аффинного пространства, по известному определению Вейля, есть точки и свободные векторы. Их координаты задаются в каком-либо базисе в виде наборов  $n$  чисел. Точки и векторы образуют геометрические объекты. Последние подразделяются на централизованные и

нецентрализованные. Централизованные объекты имеют точку приложения в центре координат. Сопоставим в алгебраической и геометрической форме простейшие линейные объекты аффинного пространства:

- |                                                   |                                   |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------|
| вектор $\mathbf{a}$                               | — отрезок прямой,                 |
| образ $\langle \text{im } \mathbf{a} \rangle$     | — прямая,                         |
| ядро $\langle \ker \mathbf{a}' \rangle$           | — гиперплоскость,                 |
| $n \times r$ -линеор $A$ ( $\text{rang } A = r$ ) | — $r$ -симплекс,                  |
| образ $\langle \text{im } A \rangle$              | — <i>планар</i> ранга $r$ ,       |
| ядро $\langle \ker A' \rangle$                    | — <i>планар</i> ранга $(n - r)$ . |

Указанные объекты изучаемой тензорной тригонометрии имеют валентность 1. Валентность функций объектов может отличаться. Например, для внутренней и внешней мультипликации пары векторов соответствующие валентности равны 0 и 2:

$$\mathbf{a}'_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{c} = \mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}_1; \tag{151}$$

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}'_2 = \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}'_1\}' . \tag{152}$$

Аффинные отношения планаров, включая параллельность, выражаются в виде:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} = \overleftarrow{A_2 A_2'} \leftrightarrow \tag{153}$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_2 A_2'} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle ,$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot A_2 = A_2 \leftrightarrow \tag{154}$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot A_2 = Z = \overrightarrow{A_2' A_1 A_1'} \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle ,$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \ker A_1' \rangle \leftrightarrow A_1' \cdot A_2 = Z = A_2' \cdot A_1 \leftrightarrow$$

$$\rightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \ker A_2' \rangle \rightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0}, \tag{155}$$

$$(r_1 + r_2 \leq n), \text{ так как } \langle \text{im } A \rangle \oplus \langle \ker A' \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle ;$$

$$\langle \ker A_1' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = Z = \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2 A_2'} \leftrightarrow \langle \ker A_2' \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle \ker A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = \mathbf{0}, \quad (r_1 + r_2 \geq n). \tag{156}$$

С другой стороны, в евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  отношения (155) и (156) определяют взаимную ортогональность

соответствующих планаров (отдельно образов и ядер  $A_1, A_2$ ). Если линейные подпространства задаются нуль-простыми матрицами, то можно также использовать характеристические аффинные проекторы. Например,

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{im } Bp_1 \rangle \equiv \langle \text{im } Bp_2 \rangle \\ \langle \text{ker } Bp_1 \rangle \equiv \langle \text{ker } Bp_2 \rangle \end{array} \right\} \leftrightarrow \overleftarrow{Bp_1} = \overleftarrow{Bp_2}, \quad (157)$$

$$\begin{aligned} \langle \text{im } Bp_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } Bp_1 \rangle &\leftrightarrow \overleftarrow{Bp_1} \cdot Bp_2 = Bp_2 \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \overrightarrow{Bp_1} \cdot Bp_2 = Z = Bp_2' \cdot \overrightarrow{Bp_1}' \leftrightarrow \langle \text{ker } Bp_1' \rangle \subseteq \langle \text{ker } Bp_2' \rangle. \end{aligned} \quad (158)$$

(В формулах с обнулением вместо проекторов могут использоваться матричные характеристические коэффициенты.) Дальнейшее естественное развитие отношений типа (155), (156) состоит в нижеследующих формулировках (159) и (160). В первом случае имеем:

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = \mathbf{0} &\leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = r_1 + r_2 = \\ &= \text{rang} (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) \leq n, \end{aligned} \quad (159)$$

так как ядро матрицы  $(\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'})$  есть ортогональное дополнение к прямой сумме образов  $\langle \text{im } A_1 \oplus \text{im } A_2 \rangle$  размерности  $s_1 = n - (r_1 + r_2)$ . Во втором случае — в иной трактовке этой матрицы (а именно через дополнительные ортопроекторы) ядро  $(\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'})$  есть пересечение ядер  $A_1'$  и  $A_2'$  размерности  $s_1 = (n - r_1) + (n - r_2) - n$ :

$$\begin{aligned} \langle \text{ker } A_1' \rangle \cap \langle \text{ker } A_2' \rangle = \mathbf{0} &\leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = \\ &= 2n - (r_1 + r_2) = \text{rang} (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) \leq n, \end{aligned} \quad (160)$$

так как ядро той же матрицы имеет размерность  $s_2 = (r_1 + r_2) - n$ . Соотношения (159) и (160) совместны тогда и только тогда, когда

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^n \rangle \equiv \langle \text{ker } A_1' \rangle \oplus \langle \text{ker } A_2' \rangle.$$

При этом вышеуказанная матрица в круглых скобках - несингулярная. Аналогичным образом имеем:



$$\langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang} (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) < r_1 + r_2, \quad (161)$$

$$\langle \ker A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2 \rangle \neq \mathbf{0} \leftrightarrow \text{rang} (\overrightarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) < 2n - (r_1 + r_2). \quad (162)$$

### 4.5.2. Проективные тензорные синус, косинус и сферически ортогональные рефлекторы

Матричная характеристика

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overleftarrow{A_1 A_1'}) = (\overrightarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = \sin' \tilde{\Phi}_{12} = -\sin \tilde{\Phi}_{21} \quad (163)$$

определяется как *проективный* тензорный синус угла  $\Phi_{12}$  между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  или линеорами  $A_1$  и  $A_2$ . Проективный характер угла и соответственно функции отмечается специальным знаком *тильды* сверху:

$$\tilde{\Phi}_{12} = (\tilde{\Phi}_{12})' = -\tilde{\Phi}_{21}. \quad (164)$$

Согласно (163), угол между  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Вместе они образуют единую *бинарную* структуру угла  $\Phi_{12}$ . Например, тензорный синус для пары векторов или прямых выражается как

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{a_2 a_2'} - \overleftarrow{a_1 a_1'}) = \frac{a_2 a_2'}{a_2' a_2} - \frac{a_1 a_1'}{a_1' a_1}. \quad (165)$$

В частности, на *евклидовой* плоскости он имеет структуру:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \varphi_{12} \cdot \sqrt{I_{2,2}}, \quad \sqrt{I_{2,2}} = R \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot R',$$

где  $\varphi_{12}$  отсчитывается против часовой стрелки (для правой системы декартовых координат),  $|\varphi_{12}| \leq \pi/2$ ;  $R$  - ортогональная модальная матрица.

Условие  $\sin \tilde{\Phi}_{12} = \tilde{\Phi}_{12} = Z$  тождественно отношению параллельности (153), в том числе для нецентрализованных планаров:

$$\langle a_1 + \text{im } A_1 \rangle, \langle a_2 + \text{im } A_2 \rangle.$$

Отношения типа (154) также имеют тождественные тригонометрические аналоги:

$$\langle \text{im } A_1 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_2 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} = + \sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12}, \quad (166)$$

$$\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle \leftrightarrow \sin^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} = - \sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12}. \quad (167)$$

Действительно,

$$\sin^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} = \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} + \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} = \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} + \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'}. \quad (168)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \text{например, } [\langle \text{im } A_2 \rangle \subseteq \langle \text{im } A_1 \rangle] &\leftrightarrow [A_1 A_1' A_2 = A_2] \leftrightarrow [A_1 A_1' A_2 A_2' = \\ &= A_2 A_2' = A_2 A_2' A_1 A_1' = A_2 A_2' A_1 A_1' A_2 A_2'] \leftrightarrow [\sin^2 \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} = - \sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12}]. \end{aligned}$$

В частном случае (166) тензорный синус есть симметричный проектор (собственные значения 0 и +1); в случае (167) он же - антипроектор (собственные значения 0 и -1).

В свою очередь, эквиранговые планары могут также задаваться сингулярной *квадратной* матрицей. При этом тензорный угол между  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\text{dm } B'$  аддитивно противоположен углу между  $\langle \text{ker } B' \rangle$  и  $\langle \text{ker } B \rangle$ . Вместе они образуют единую бинарную структуру проективного тензорного угла  $\overset{\leftarrow}{\Phi}_B$ . Аналогично (163) и (164) имеем:

$$\sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_B = (\overset{\leftarrow}{B'B} - \overset{\leftarrow}{BB'}) = (\overset{\leftarrow}{BB'} - \overset{\leftarrow}{B'B}) = \sin' \overset{\leftarrow}{\Phi}_B = - \sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_{B'}. \quad (169)$$

$$\overset{\leftarrow}{\Phi}_B = (\overset{\leftarrow}{\Phi}_{B'})' = - \overset{\leftarrow}{\Phi}_{B'};$$

$$\sin \overset{\leftarrow}{\Phi}_B = Z \leftrightarrow \overset{\leftarrow}{\Phi}_B = \overset{\leftarrow}{\Phi}_{B'} = Z \leftrightarrow B \in \langle Bm \rangle.$$

(170)

Это условие *тригонометрически* определяет нуль-нормальные матрицы, которые были введены ранее.

Аналогично, тригонометрические отношения между образом и ядром матрицы характеризует проективный тензорный косинус того же угла:

$$\begin{aligned} \cos \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} &= (\overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} - \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'}) = (\overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} - \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'}) = (\overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} + \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'} - I) = \\ &= (I - \overset{\leftarrow}{A_1 A_1'} - \overset{\leftarrow}{A_2 A_2'}) = \cos' \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12} = \cos \overset{\leftarrow}{\Phi}_{21} = \cos (- \overset{\leftarrow}{\Phi}_{12}), \end{aligned}$$

(171)

$$\begin{aligned} \cos \check{\Phi}_B &= (\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = (\overleftarrow{B'B} - \overrightarrow{BB'}) = (\overleftarrow{BB'} + \overleftarrow{B'B} - I) = \\ &= (I - \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{B'B}) = \cos' \check{\Phi}_B = \cos \check{\Phi}_{B'} = \cos(-\check{\Phi}_B). \end{aligned} \tag{172}$$

В частности, для пары векторов и прямых на евклидовой плоскости

$$\cos \check{\Phi}_{12} = \cos \varphi_{12} \sqrt{I_{2 \times 2}}, \quad \sqrt{I_{2 \times 2}} = R \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R' \quad (\cos \varphi_{12} \geq 0).$$

Тригонометрические аналоги условий (155), (156) вытекают из формулы

$$\cos^2 \check{\Phi}_{12} = \overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} + \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overrightarrow{A_1 A_1'} = \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overrightarrow{A_2 A_2'} + \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'}. \tag{173}$$

Схема вывода аналогична (168).

$$\cos^2 \check{\Phi}_{12} = + \cos \check{\Phi}_{12} \leftrightarrow (156), \tag{174}$$

$$\cos^2 \check{\Phi}_{12} = - \cos \check{\Phi}_{12} \leftrightarrow (155). \tag{175}$$

Тензорные тригонометрические функции проективного угла в метрической форме характеризуют пространственные угловые отношения между линейорами или между планарами. В тензорном варианте косинус и синус основного и дополнительного (до согласованного с ним прямого угла) также равны между собой:

$$\cos \check{\Phi} = \sin(\check{\pi}/2 - \check{\Phi}), \quad \sin \check{\Phi} = \cos(\check{\pi}/2 - \check{\Phi}).$$

В аффинном пространстве угол не имеет количественного смысла за исключением, когда он нулевой или открытый. В евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  прямые тензорные углы образуются, например, парами планаров  $\langle \text{im } A \rangle$  и  $\langle \text{ker } A' \rangle$ ,  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{ker } B' \rangle$ :

$$(\overleftarrow{A_1 A_1'} - \overrightarrow{A_1 A_1'}) = \text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \cos \check{\Phi}_{12} - \sin \check{\Phi}_{12} = \cos \check{Z}_1, \tag{176}$$

$$(\overleftarrow{A_2 A_2'} - \overrightarrow{A_2 A_2'}) = \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \cos \check{\Phi}_{12} + \sin \check{\Phi}_{12} = \cos \check{Z}_2; \tag{177}$$

$$(\overleftarrow{BB'} - \overrightarrow{BB'}) = \text{Ref}\{BB'\} = \cos \check{\Phi}_B - \sin \check{\Phi}_B = \cos \check{Z}_B, \tag{178}$$

$$(\overleftarrow{B'B} - \overrightarrow{B'B}) = \text{Ref}\{B'B\} = \cos \check{\Phi}_B + \sin \check{\Phi}_B = \cos \check{Z}_{B'}. \tag{179}$$

С одной стороны, это - синусы вышеуказанных прямых углов; с другой стороны, это - косинусы нулевых тензорных углов, соответствующих планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  и  $\langle \text{im } B \rangle$ ,  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Характеристические симметричные квадратные корни (176)—(179) типа  $\sqrt{\Gamma} = (\sqrt{\Gamma})'$  определяются как *сферически ортогональные рефлекторы*. В общем случае они обозначаются как  $\text{Ref } B_m$ , где  $B_m$  есть нуль-нормальная матрица.

Тензорные рефлекторы осуществляют операцию линейного отражения (рефлексии). При этом планар  $\langle \text{im } B_m \rangle$  есть линейное зеркало, от которого происходит ортогональное отражение. Некоторые частные случаи:

$$\begin{aligned} \sin \tilde{\Phi} = Z &\leftrightarrow \cos \tilde{\Phi} = \sqrt{\Gamma}, \\ \cos \tilde{\Phi} = Z &\leftrightarrow \sin \tilde{\Phi} = \sqrt{\Gamma}, \\ \cos \tilde{\Phi} = +I &\leftrightarrow \text{rang } A = n, \quad \text{rang } B = n; \\ \cos \tilde{\Phi} = -I &\leftrightarrow \text{rang } A = 0, \quad \text{rang } B = 0; \\ &\text{при этом } \sin \tilde{\Phi} \neq \pm I. \end{aligned}$$

Очевидны тождества:  $1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$ , или

$$\overleftarrow{(A_1 A_1')} + \overrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{(A_2 A_2')} + \overrightarrow{A_2 A_2'} = I = \overleftarrow{(A_2 A_2')} + \overrightarrow{A_2 A_2'} \cdot \overleftarrow{(A_1 A_1')} + \overrightarrow{A_1 A_1'}, \quad (180)$$

$$\overleftarrow{(B B')} + \overrightarrow{B B'} \cdot \overleftarrow{(B' B)} + \overrightarrow{B' B} = I = \overleftarrow{(B' B)} + \overrightarrow{B' B} \cdot \overleftarrow{(B B')} + \overrightarrow{B B'}. \quad (181)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\cos^2 \tilde{\Phi} + \sin^2 \tilde{\Phi} = I, \quad (182)$$

$$\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi} = -\sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi}, \quad \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \sin^2 \tilde{\Phi} = \sin^2 \tilde{\Phi} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}, \quad (183),$$

$$(184)$$

$$\cos^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \sin^t \tilde{\Phi} = \sin^t \tilde{\Phi} \cdot \cos^{2k} \tilde{\Phi}, \quad \cos^t \tilde{\Phi} \cdot \sin^{2k} \tilde{\Phi} = \sin^{2k} \tilde{\Phi} \cdot \cos^t \tilde{\Phi}. \quad (185)$$

Далее при выводе тригонометрических формул можно также использовать *таблицу умножения разнородных характеристических проекторов*:

$$\begin{array}{ll}
 \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}', & \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}', \\
 \overleftarrow{B}' \cdot \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B}, & \overrightarrow{B}' \cdot \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' \cdot \overrightarrow{B}', \\
 \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B} = \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}, & \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}, \\
 \overleftarrow{B}' \cdot \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}', & \overrightarrow{B}' \cdot \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}'.
 \end{array}$$

Проективный характер определённых выше тригонометрических функций показывают формулы:

$$\overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = + \overleftarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}', \quad (186)$$

$$\overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = + \overleftarrow{B}' \cdot \cos \tilde{\Phi} = + \cos \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}, \quad (187)$$

$$\overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} = - \overrightarrow{B}' \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}', \quad (188)$$

$$\overrightarrow{B} \overrightarrow{B}' = - \overrightarrow{B} \cdot \cos \tilde{\Phi} = - \cos \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}, \quad (189)$$

$$\overleftarrow{B} - \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = (\sqrt{Z})_1 = + \overleftarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = - \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}, \quad (190)$$

$$\overrightarrow{B} - \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} = (\sqrt{Z})_2 = + \overrightarrow{B} \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B} = + \overrightarrow{B}' \overleftarrow{B}, \quad (191)$$

$$\overleftarrow{B}' - \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = - (\sqrt{Z})_2 = - \overleftarrow{B}' \cdot \sin \tilde{\Phi} = - \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B} = + \overleftarrow{B}' \overrightarrow{B}, \quad (192)$$

$$\overrightarrow{B}' - \overrightarrow{B}' \overleftarrow{B}' = - (\sqrt{Z})_1 = - \overrightarrow{B}' \cdot \sin \tilde{\Phi} = + \overrightarrow{B}' \overleftarrow{B}' = - \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}', \quad (193)$$

$$\overleftarrow{B} \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B} \cdot \overleftarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overleftarrow{B} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}' = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B} \overleftarrow{B}', \quad (194)$$

$$\overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' \cdot \overrightarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} = \overrightarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}' = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}', \quad (195)$$

$$\overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}' \overleftarrow{B}' = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overleftarrow{B}' = \overleftarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}, \quad (196)$$

$$\overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' \overrightarrow{B}' = \cos^2 \tilde{\Phi} \cdot \overrightarrow{B}' = \overrightarrow{B}' \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}. \quad (197)$$

Проективные тригонометрические формулы и тензорные углы наглядно иллюстрирует символический тензорный октаэдр, образуемый восемью характеристическими проекторами в 2-х валентном евклидовом пространстве (рис.1). Для нуль-нормальной матрицы этот октаэдр вырождается в символический тензорный прямоугольный треугольник.

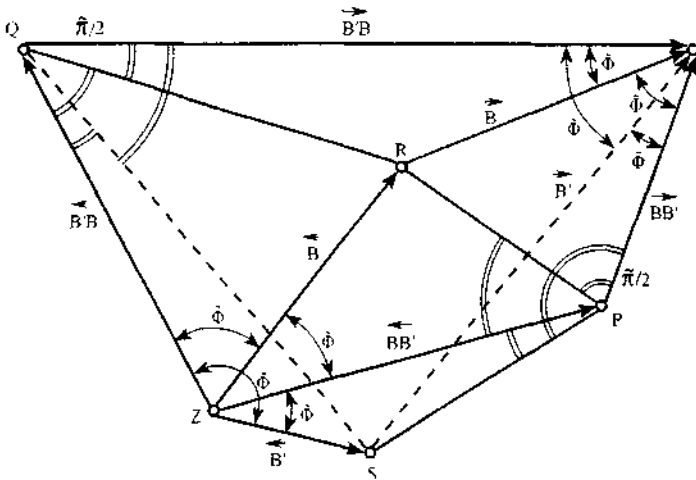


Рис. 1. Символический тензорный октаэдр из характеристических проекторов, иллюстрирующий тензорные углы.

### 4.5.3. Проективные тензорные секанс, тангенс и аффинные рефлекторы

В свою очередь, тензорные функции секанса и тангенса от того же проективного угла определяются через аффинные или косогональные характеристические проекторы. Складывая (187) и (188), получаем

$$(\vec{B}' - \vec{B}) \cdot \cos \check{\Phi} = I = \cos \check{\Phi} (\vec{B}' - \vec{B}).$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} \sec \check{\Phi}_B &= (\vec{B}' - \vec{B}) = (\vec{B} - \vec{B}') = (\vec{B} + \vec{B}' - I) = (I - \vec{B} - \vec{B}') = \\ &= \sec' \check{\Phi}_B = \sec \check{\Phi}_{B'} = \sec (-\check{\Phi}_B) = [(\vec{B}')' - \vec{B}] = [\vec{B} - (\vec{B}')'] \end{aligned} \tag{198}$$

определяется как проективный тензорный секанс угла  $\check{\Phi}_B$  между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$ . Согласно (172), тензорный косинус — несингулярная матрица тогда и только тогда,

когда  $\langle \text{im } \mathbf{B} \rangle \cap \langle \text{ker } \mathbf{B} \rangle = \mathbf{0}$ , то есть когда  $\mathbf{B}$  - нуль-простая матрица. Поэтому имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}p} = \cos^{-1} \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}p}, \quad \sec \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = I = \cos \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}; \quad (199)$$

$$\sec \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = \cos^{\tau} \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}, \quad \sec \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} = \overleftarrow{\cos \tilde{\Phi}} = \cos \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}. \quad (200)$$

В последнем случае подразумевается, что исходная матрица может быть нуль-дефектной, а характеристические аффинные проекторы при этом же могут не существовать. Тогда на подпространстве  $\langle \text{im } \mathbf{B} \rangle \cap \langle \text{ker } \mathbf{B} \rangle$  косинус и квазисеканс - оба вместе нулевые. Зато для нуль-дефектной матрицы косинус угла между подпространствами  $\langle \text{im } \mathbf{B}^{s''} \rangle$  и  $\langle \text{im } \mathbf{B}'^{s''} \rangle$  всегда несингулярный. В свою очередь, синус несингулярный тогда и только тогда, когда

$$\det \sin \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } \mathbf{B} \rangle \oplus \langle \text{im } \mathbf{B}' \rangle \equiv \langle \mathbb{R}^n \rangle \quad (r_{\mathbf{B}} = n/2). \quad (201)$$

В случае задания тензорного проективного угла линейорами  $A_1$  и  $A_2$  это же соответствует объединению условий (159) и (160). Ввиду этого квазикосеканс в общем случае определяется через квазиобратную матрицу

$$\text{cosec } \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = \sin^{-1} \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = \text{cosec}' \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = -\text{cosec } \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = -\text{cosec } (-\tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}). \quad (202)$$

Вычитая (186) из (187), получаем

$$\sin \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = -\cos \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} (\overleftarrow{\mathbf{B}'} - \overleftarrow{\mathbf{B}}) = +(\overleftarrow{\mathbf{B}'} - \overleftarrow{\mathbf{B}}) \cos \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}.$$

На основании этого соотношения матричная характеристика

$$\begin{aligned} i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} &= (\overleftarrow{\mathbf{B}'} - \overleftarrow{\mathbf{B}}) = (\overrightarrow{\mathbf{B}} - \overrightarrow{\mathbf{B}'}) = [(\overleftarrow{\mathbf{B}})' - \overleftarrow{\mathbf{B}}] = [\overrightarrow{\mathbf{B}} - (\overrightarrow{\mathbf{B}})'] = \\ &= -i \cdot \text{tg}' \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = -i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = -i \cdot \text{tg } (-\tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}) \end{aligned} \quad (203)$$

определяется как проективный тензорный тангенс угла  $\tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}$ . Принимаемая форма проективного тангенса обусловлена тем, что это кососим-метричная матрица; её ненулевые собственные значения  $\mu_j = \pm i \cdot \text{tg} \varphi_j$ . Кроме того, тот же тангенс выражается тригонометрической формулой

$$i \cdot \text{tg } \tilde{\Phi} = + \sin \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi} = - \sec \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}. \quad (204)$$

В частности, для пары векторов и прямых с учётом (151), (152) имеем:

$$i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \frac{B' - B}{\operatorname{tr} B} = \frac{a_2 a_1' - a_1 a_2'}{a_1' a_2} = i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{12}. \quad (205)$$

Квазикотангенс определяется для общего случая матрицей

$$i \cdot \operatorname{ctg} \tilde{\Phi}_B = i \cdot \operatorname{tg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{ctg}' \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{ctg} \tilde{\Phi}_B = -i \cdot \operatorname{ctg} (-\tilde{\Phi}_B). \quad (206)$$

Очевидно тождество

$$(\overleftarrow{B} + \overrightarrow{B}) \cdot (\overleftarrow{B}' + \overrightarrow{B}') = I = (\overleftarrow{B}' + \overrightarrow{B}') \cdot (\overleftarrow{B} + \overrightarrow{B}). \quad (207)$$

Отсюда следуют тригонометрические формулы:

$$\sec^2 \tilde{\Phi} - \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} = I = \sec^2 \tilde{\Phi} + (i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi})^2, \quad (208)$$

$$\sec \tilde{\Phi} \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi} = -\operatorname{tg} \tilde{\Phi} \cdot \sec \tilde{\Phi}, \quad (209)$$

$$\sec^2 \tilde{\Phi} \cdot \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} = \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi} \cdot \sec^2 \tilde{\Phi}. \quad (210)$$

**Правило №1.** *Квадраты и любые чётные степени тензорных тригонометрических функций коммутативны между собой и с характеристическими проекторами, когда они относятся к одной и той же паре линейоров или планаров.*

Аналогично (176)—(179), но для нуль-простой матрицы, определяются *аффинные рефлекторы*:

$$(\overleftarrow{B} - \overrightarrow{B}) = \operatorname{Ref}\{B\} = \sec \tilde{\Phi} - i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi}, \quad (211)$$

$$(\overleftarrow{B}' - \overrightarrow{B}') = \operatorname{Ref}\{B'\} = \sec \tilde{\Phi} + i \cdot \operatorname{tg} \tilde{\Phi} = \operatorname{Ref}'\{B\}. \quad (212)$$

В случае пространства с евклидовой метрикой они суть сферически косогональные рефлекторы и вместе с тем — характеристические квадратные корни типа  $\sqrt{I}$ . Если тензорный угол между  $\langle \operatorname{im} B \rangle$  и  $\langle \operatorname{im} B' \rangle$  ненулевой, то корни (211), (212) обязательно несимметричны. В самом общем случае тензорные рефлекторы могут обозначаться как  $\operatorname{Ref}\{B_p\}$ , где  $B_p$  - нуль-простая матрица. При этом планар  $\langle \operatorname{im} B_p \rangle$  есть линейное зеркало, от которого происходит отражение параллельно плану  $\langle \ker B_p \rangle$ .



### 4.5.4. Сопоставление двух способов задания тензорных углов - через прямоугольные и через квадратные сингулярные матрицы

Возникает вопрос, когда проективный тензорный угол и его тригонометрические функции, определяемые либо через  $A_1$  и  $A_2$ , либо через  $B$ , тождественны? Пусть в соответствии с (151) и (152) имеем:

$$B = A_1 \cdot A_2', \quad B' = A_2 \cdot A_1', \tag{213}, (214)$$

$$C = A_1' \cdot A_2, \quad C' = A_2' \cdot A_1'. \tag{215}, (216)$$

Прежде всего отметим, что матрицы  $A_1$  и  $A_2$  здесь необходимо имеют одинаковый размер. Из равенства тензорных углов следует равенство всех одноимённых ортопроекторов и обратно:

$$\Phi_{12} = \Phi_B \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin \tilde{\Phi}_{12} = \sin \tilde{\Phi}_B \\ \cos \tilde{\Phi}_{12} = \cos \tilde{\Phi}_B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_{12} = \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B \\ \operatorname{sec} \tilde{\Phi}_{12} = \operatorname{sec} \tilde{\Phi}_B \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overleftrightarrow{A_1 A_1'} = \overleftrightarrow{B B'} \\ \overleftrightarrow{A_2 A_2'} = \overleftrightarrow{B' B} \end{array} \right\}.$$

(Но  $A_1 A_2' = B$  справедливо по исходному определению  $A_1 A_2' = B$ ; это дополнительное соотношение определяется только фактом существования косопроекторов.) В свою очередь, равенство ортопроекторов тождественно взаимосвязанным условиям:

$$\langle \operatorname{im} A_1 \rangle \equiv \langle \operatorname{im} B \rangle \leftrightarrow \langle \ker A_2' \rangle \equiv \langle \ker B \rangle \tag{217}, (218)$$

$$\langle \operatorname{im} A_2 \rangle \equiv \langle \operatorname{im} B' \rangle \leftrightarrow \langle \ker A_1' \rangle \equiv \langle \ker B' \rangle. \tag{219}, (220)$$

Вначале рассмотрим условие (217), тождественное (220):

$$\langle \operatorname{im} B \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \operatorname{im} A_2' \rangle \leftarrow A_1 \cdot A_2' = B,$$

$$\langle \operatorname{im} A_1 \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \operatorname{im} A_2' \rangle \equiv A_1 \cdot \langle \operatorname{im} A_2' \oplus \ker A_2 \rangle.$$

Отсюда следует, что выполнение (217) тождественно двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } A_2' \rangle \cap \langle \ker A_1 \rangle &= \mathbf{0}, \\ \langle \ker A_2 \rangle &\subset \langle \ker A_1 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

Аналогичный подход применим к условию (219), тождественному (218):

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } A_1' \rangle \cap \langle \ker A_2 \rangle &= \mathbf{0}, \\ \langle \ker A_1 \rangle &\subset \langle \ker A_2 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

То есть выполнение двух независимых условий (217) и (219) равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1' A_1} = \overrightarrow{A_2' A_2} &\leftrightarrow \overleftarrow{A_1' A_1} = \overleftarrow{A_2' A_2} \leftrightarrow \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle, \end{aligned} \quad (223)$$

где необходимо  $r_1 = r_2 \leq m$ .

Ответ на поставленный выше вопрос заключается в выполнении необходимого и достаточного условия (223). В частности, оно соблюдается, когда  $r_1 = r_2 = r = m$ . Тогда

$$\langle \ker A_1 \rangle \equiv \langle \ker A_2 \rangle = \mathbf{0}, \quad \langle \text{im } A_1' \rangle \equiv \langle \text{im } A_2' \rangle \equiv \langle \mathcal{A}^r \rangle.$$

Этот упрощённый вариант, как правило, подразумевается при использовании внешних и внутренних произведений типа (213) - (216), то есть при условии:

$$r_1 = r_2 = r = m < n. \quad (224)$$

Например, такой вариант имеет место для пары векторов. Согласно (120) и (213)-(216), имеем:

$$k(B,r) = k(B',r) = \det C = \det C'. \quad (225)$$

При условии (224) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_1'} &= \overrightarrow{B B'}, \\ \overrightarrow{A_2 A_2'} &= \overrightarrow{B' B}. \end{aligned} \right\} \quad (226)$$

Для нуль-простой матрицы  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle = 0$ ;  $k(B, r) = \det C \neq 0$ . В частности, для нуль-нормальной матрицы имеем  $\langle \text{im } B \rangle = \langle \text{im } B' \rangle$  и в соответствии с (97) получаем:

$$k(BB', r) = k(B'B, r) = k^2(B, r) = \det^2 C > 0.$$

Для нуль-дефектной матрицы имеем:  $\langle \text{im } B \rangle \cap \langle \ker B \rangle \neq 0$ ;

$$k(B, r) = \det C = 0. \quad \text{Скалярная характеристика}$$

$\det C = \det (A_1' A_2)$  в евклидовом пространстве, при условии (224), играет также роль критерия хотя бы частичной ортогональности линейоров или планаров. С другой стороны, определитель  $\det G = \det [(A_1|A_2)'(A_1|A_2)]$  в аффинном пространстве играет роль критерия хотя бы частичной их параллельности.

$$\det G = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle \neq 0, \quad (227)$$

$$\det G \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \text{im } A_2 \rangle = 0, \quad (228)$$

$$\det C = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle \neq 0, \quad (229)$$

$$\det C \neq 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_1 \rangle \cap \langle \ker A_2' \rangle = 0 \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \cap \langle \ker A_1' \rangle = 0, \quad (230)$$

где для евклидова пространства  $\langle \ker A' \rangle \equiv \langle \text{im } A \rangle^\perp$ .

Полная параллельность линейоров или планаров отвечает нуль-нормальной матрице. Согласно (97) и (132), это тождественно соотношению:

$$\begin{aligned} |\det C| &= |k(Bm, r)| = \sqrt{k(Bm Bm', r)} = \mathcal{M}tr(r)(A_1' A_2') = \mathcal{M}tr(r)A_1' \cdot \mathcal{M}tr(r)A_2' = \\ &= \sqrt{\det A_1' A_1'} \cdot \sqrt{\det A_2' A_2'}. \end{aligned} \quad (231)$$

С учётом (224) это же соответствует отношению параллельности (153). Впоследствии формула (231) получит *тригонометрическую* трактовку.

В свою очередь, полная ортогональность линейоров или планаров отвечает нильпотентной матрице 2-го порядка:  $B^2 = Z$  ( $C = Z$ ). С учётом (224) это же в евклидовом пространстве соответствует отношению ортогональности (155):

$$\begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \equiv \langle \text{im } B \rangle \equiv \langle \ker B \rangle \equiv \langle \ker A_2' \rangle \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \langle \text{im } A_2 \rangle \equiv \langle \text{im } B' \rangle \equiv \langle \ker B' \rangle \equiv \langle \ker A_1' \rangle. \end{aligned}$$

Тензорный угол  $\Phi_{12}$  и его тригонометрические функции имеют, конечно, более общий характер, нежели  $\Phi_B$  и его функции, так как они допускают исходно использование матриц  $A^1$  и  $A_2$  размера  $n \times r_1$  и  $n \times r_2$ , где  $r_1$ , и  $r_2$  не обязательно равны. Например, если  $r_2 \leq r_1$ , то общая параллельность линейоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (154). С другой стороны, при любом соотношении  $r_1$  и  $r_2$  общая ортогональность линейоров  $A_1$  и  $A_2$  сводится к отношению (155). Тождественность  $\check{\Phi}_{12}$  и  $\check{\Phi}_B$  определяется условием (223).

В тензорной тригонометрии в зависимости от конкретных задач применяется та или иная форма представления тензорных углов и их функций.

### **4.5.5. Канонические монобинарные клеточные формы сферических тензорных тригонометрических функций и рефлекторов**

Параллельность и ортогональность линейных объектов являются только крайними случаями для тензорных углов между ними. Далее, чтобы выполнить полный анализ такого рода отношений, нужно вышеуказанные проективные тригонометрические функции представить в канонической форме, найти их собственные значения и установить информативные скалярные характеристики тензорного угла. Обратимся к разностям ортопроекторов типа (163), которые выражают проективный синус в двух вариантах. Согласно (182) - (184), собственные значения синуса и косинуса суть вещественные числа, находящиеся в интервале  $-1 \div +1$ :

$$\mu_{\sin}^2 + \mu_{\cos}^2 = 1.$$

(232)

В евклидовом пространстве указанные собственные значения связаны с некоторыми характеристическими скалярными углами. Обратим внимание на то, что используемые в обоих вариантах разностей (163) характеристические проекторы попарно ортогональны. Ввиду симметричности этих проекторов им же соответствуют четыре собственных

подпространства:  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ ,  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ ,  $\langle \ker A_1' \rangle$ ,  $\langle \ker A_2' \rangle$ . Причём имеем:

$$\left. \begin{aligned} \langle \text{im } A_1 \rangle \perp \langle \ker A_1' \rangle, \quad \langle \text{im } A_1 \rangle \oplus \langle \ker A_1' \rangle &\equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle, \\ \langle \text{im } A_2 \rangle \perp \langle \ker A_2' \rangle, \quad \langle \text{im } A_2 \rangle \oplus \langle \ker A_2' \rangle &\equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

В первом варианте (163) синус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_1 \cup \text{im } A_2 \rangle$ , а во втором варианте - на  $\langle \ker A_1' \cup \ker A_2' \rangle$ . Напротив, в первом варианте (171) косинус рассматривается на подпространстве  $\langle \text{im } A_2 \cup \ker A_1' \rangle$ , а во втором варианте - на  $\langle \text{im } A_1 \cup \ker A_2' \rangle$ . Пусть для определённости:  $r_2 \geq r_1$ ,  $r_1 + r_2 \leq n$ . Исходное евклидово пространство по отношению к вышеуказанным вариантам разностей проекторов распадается в общем случае на четыре базисных подпространства как в синусном, так и в косинусном вариантах (рис. 2). Эти подпространства попарно ортогональны при условиях:

$$\sin \varphi \neq \pm 1, \quad \cos \varphi \neq \pm 1. \quad (234)$$

В свою очередь, при данных условиях подпространства пересечений и их размерности выражаются в виде:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_3 \rangle &\equiv \langle \ker A_1' \cap \ker A_2' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = n - (r_1 + r_2); \\ \langle \mathcal{P}_4 \rangle &\equiv \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle, \quad \dim \langle \mathcal{P}_4 \rangle = r_2 - r_1. \end{aligned}$$

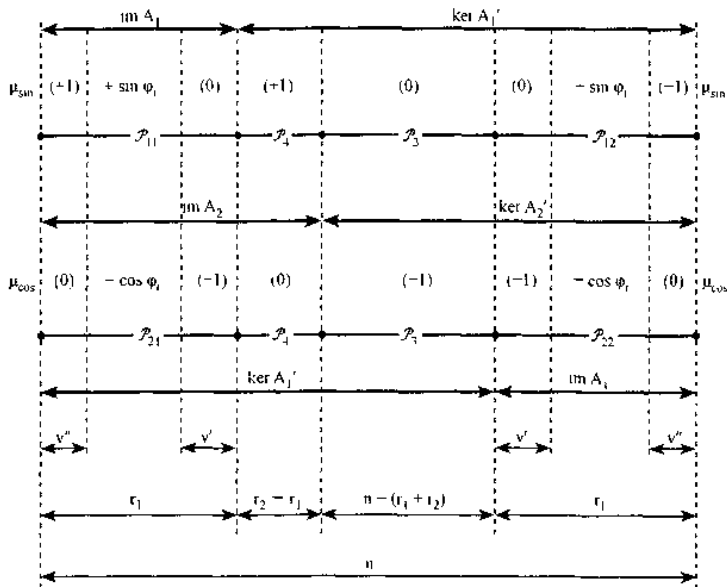


Рис. 2. Распределение собственных значений проективных синуса и косинуса по характеристическим подпространствам:

$\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  — в синусном варианте;

$\mathcal{P}_{21}, \mathcal{P}_{22}, \mathcal{P}_3$  и  $\mathcal{P}_4$  — в косинусном варианте

(условно принято, что  $r_2 \geq r_1, r_1 + r_2 \leq n$ ).

Выделим *собственное бинарное тригонометрическое подпространство* в двух вариантах его бинарного разложения на прямые ортогональные суммы - синусом и косинусом:

$$\langle \mathcal{P}_{11} \oplus \mathcal{P}_{12} \rangle \equiv \langle \mathcal{P}_{21} \oplus \mathcal{P}_{22} \rangle.$$

(235)

(Оно имеет всегда чётную размерность  $2\tau$  — *тригонометрический ранг угла*.) Здесь

$\tau = \min \{r_1, r_2, (n - r_1), (n - r_2)\}$  - количество бинарных собственных углов  $\varphi_i$ . Но в данном случае  $\tau=r_1$ . Собственные значения тригонометрических функций во *взаимных* подпространствах (235) попарно равны по абсолютной величине, так как стороны собственных углов в силу (233) попарно ортогональны. Но эти собственные значения противоположны по

знаку, так как порядки следования проекторов в обоих вариантах (163) и (171) взаимно обратны. Ввиду симметричности проективного косинуса и синуса последние приводятся к диагональной форме посредством ортогонального модального преобразования. Для того чтобы собственные значения углов и функций имели тригонометрический смысл, здесь используется евклидово пространство с заданием в нём исходного декартова базиса. Каждой  $i$ -й бинарной тригонометрической клетке в (235) соответствует  $i$ -я собственная евклидова плоскость. На этой плоскости имеется пара ортогональных собственных вектор-осей тензорного косинуса  $u_i$  и  $v_i$ . Им отвечают собственные значения косинуса « $+\cos \varphi_i$ » и « $-\cos \varphi_i$ » ( $-\pi/2 \leq \varphi_i \leq +\pi/2$ ), где  $\varphi_i$  - собственные значения тензорных углов между планарами (а не линейными!). Эти, пока неориентированные собственные векторы задают 1-ю и 2-ю декартовы оси на собственной плоскости. С целью придания канонической формы проективным тригонометрическим функциям расположим тригонометрические клетки вдоль главной диагонали в направлении увеличения значений  $|\cos \varphi_i|$ ; затем по диагонали расположим моноклетки, соответствующие  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ . Далее установим парное соответствие между исходными и новыми декартовыми осями:  $\langle X_1 \leftrightarrow u_1, X_2 \leftrightarrow v_1 \rangle, \dots, \langle X_{2i-1} \leftrightarrow u_i, X_{2i} \leftrightarrow v_i \rangle, \dots, \langle X_{2i-1} \leftrightarrow u_i, X_{2i} \leftrightarrow v_i \rangle, \dots$ . Выбираем ориентацию новых осей так, чтобы углы между ними в этих парах были острыми. Согласно (232), квадраты проективных функций в пределах тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки имеют парные собственные значения. В силу условия коммутативности квадратов (184) диагональные формы квадратов синуса и косинуса реализуются в одном и том же декартовом базисе:

$$\sin^2 \check{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sin^2 \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & \sin^2 \varphi_i \\ \hline \end{array}, \quad \cos^2 \check{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos^2 \varphi_i & 0 \\ \hline 0 & \cos^2 \varphi_i \\ \hline \end{array}.$$

Из условия антикоммутативности проективных функций (183) и их симметричности следует, что в базисе диагонального косинуса они имеют канонические формы:

$$\sin \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline \emptyset & +\sin \varphi_1 \\ \hline +\sin \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \end{array}, \quad \cos \tilde{\Phi}_{12} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array}. \quad (236), (237)$$

$\langle \mathcal{P}_3 \rangle$                        $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$   
 $(r_2 > r_1)$                        $(r_1 + r_2 < n)$

В (236) из двух возможных контрдиагональных форм синуса — положительной и отрицательной выбрана первая, что соответствует определениям (163), (171). См. также об этих простейших формах далее. Заметим, что для угла  $\tilde{\Phi}_B$  подпространство  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ , нулевое, а  $\dim \langle \mathcal{P}_3 \rangle = |n - 2r|$ . Согласно (199) и (204), имеем:

$$\sec \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & -\sec \varphi_1 \\ \hline \end{array}, \quad i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B = \begin{array}{|c|c|} \hline \emptyset & -\operatorname{tg} \varphi_1 \\ \hline +\operatorname{tg} \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \end{array}. \quad (238), (239)$$

$(2r < n)$                        $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$                        $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$

Формулы (236)-(239) представляют проективные тригонометрические функции в канонической W-форме в ориентированном базисе диагонального косинуса. Их базис определяется как *тригонометрический*. При тех же условиях (234) имеем:

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 &= \overrightarrow{\{\cos^2 \tilde{\Phi} - \cos^2 \varphi_1 \cdot \mathbf{I}\}} = \overrightarrow{\{\sin^2 \tilde{\Phi} - \sin^2 \varphi_1 \cdot \mathbf{I}\}} = \vec{S}_{11} + \vec{S}_{12}; \\ \vec{S}_{11} &= \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} - \cos \varphi_1 \cdot \mathbf{I}\}}, \quad \vec{S}_{12} = \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi} + \cos \varphi_1 \cdot \mathbf{I}\}}; \\ \vec{S}_{(3)} &= \overrightarrow{\sin \tilde{\Phi}}; \quad \vec{S}_{(4)} = \overrightarrow{\cos \tilde{\Phi}}. \end{aligned} \quad (240)$$

Это суть ортопроекторы, осуществляющие проецирование на характеристические подпространства: i-я тригонометрическая клетка, оси  $\zeta$  и  $\nu_i$ ,  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ . Они же своими базисными столбцами (строками) задают эти подпространства. Если некоторые  $\varphi_i$  совпадают, то i-я тригонометрическая клетка расширяется; требуется ортогонализация однородных осей для восстановления бинарной структуры.

Возвратимся к условиям (234). Они были приняты ранее для упрощения процесса разбиения на характеристические базисные



подпространства. Но пусть, например,  $\cos \varphi_1 = +1$  ( $\sin \varphi_1 = 0$ ) с кратностью  $v'$  на  $\langle \mathcal{P}_{21} \rangle$  (рис.2);  $v' = \dim \langle \text{im } A_1 \cap \text{im } A_2 \rangle$ . Тогда этому значению косинуса, в свою очередь, на  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$  соответствует  $\cos \varphi_1 = -1$  с той же кратностью  $v'$  (в силу обратного порядка расположения проекторов). Собственное значение косинуса «-1» теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ , как ранее, и к  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  нужно ортогонализировать собственные векторы косинуса с  $\mu = -1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_{22} \rangle$ . Аналогично поступают, если на  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$  окажутся значения  $\sin \varphi_i = +1$  ( $\cos \varphi_i = 0$ ) с кратностью  $v'' = \dim \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$  (рис.2). Тогда на  $\langle \mathcal{P}_{12} \rangle$  им соответствуют  $\sin \varphi_i = -1$  с той же кратностью  $v''$ . Собственное значение синуса «+1» теперь относится и к  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ , как ранее, и к  $\langle \mathcal{P}_{11} \rangle$ . Для отделения собственного тригонометрического подпространства от  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$  нужно ортогонализировать собственные векторы синуса с  $\mu = +1$ . При этом устанавливается парная ортогональность  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Кроме того, если вопреки принятому ранее,  $r_1 > r_2$ , то  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$ . Если же  $r_1 + r_2 > n$ , то  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle \equiv \langle \text{im } A_1 \cap \text{im } A_2 \rangle$ . Сообразно этому изменяют знаки единичных собственных значений на  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  и  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle$ .

Используемые базисы суть правые, в том числе исходный ортогональный базис в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  ( $\det \{ \mathbf{R} \} = +1$ ), а также ортогональные базисы на собственных плоскостях  $\langle u_i, v_i \rangle$  составляющие вместе тригонометрический базис (его бинарную часть). В тригонометрическом базисе находят с точностью до знака контрдиагональные значения синуса, согласно форме (236). При этом знаки при косинусе определяются строго в соответствии с формой (237). Тогда величина и знак угла  $\varphi_i$  строго определяют его положение в интервале  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$ . Направление отсчёта скалярного угла  $\varphi_i$  на собственной плоскости с правым декартовым базисом, как общепринято, выбрано против часовой стрелки. Заметим, что вышеуказанный интервал изменения собственных значений углов  $\varphi_i$  относится к угловым отношениям планаров (а не линеоров!). В том же тригонометрическом базисе (то есть базисе диагонального косинуса) определяются канонические формы

характеристических ортогональных (176), (177) и аффинных (211), (212) рефлекторов:

$$\text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \hline -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array}, \quad \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_1 & +\sin \varphi_1 \\ \hline +\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array}, \quad (241)$$

$(r_2 > r_1; r_1 + r_2 < n)$

$$\text{Ref}\{B\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_1 & +\text{tg} \varphi_1 \\ \hline -\text{tg} \varphi_1 & -\sec \varphi_1 \\ \hline \end{array}, \quad \text{Ref}\{B'\} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\sec \varphi_1 & -\text{tg} \varphi_1 \\ \hline +\text{tg} \varphi_1 & -\sec \varphi_1 \\ \hline \end{array}, \quad (242)$$

$(2r < n)$

### 4.5.6. Ротационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

В дальнейшем при выводе ряда формул и неравенств, относящихся к тензорной тригонометрии, будет довольно широко использоваться *принцип бинарности*. Поясним его. Если простые вещественные матрицы  $P_1$  и  $P_2$  антикоммутируют, то тогда и только тогда они представляются в одном и том же *специальном* базисе в вещественных монобинарных клеточных формах  $W_1$  и  $W_2$ , антикоммутирующих по общим собственным подпространствам размерности 1 и 2 (см. также далее). При этом в каких-либо базисах *любая аналитическая функция*  $F(P_1, P_2)$  *выражается в той же форме, что и функция*  $F(W_1, W_2)$ . В вышеуказанном специальном базисе функция  $F(P_1, P_2)$  представляется прямой суммой аналогичных собственных функций от монарных и бинарных клеток матриц  $W_1$  и  $W_2$ . В свою очередь, скалярные инварианты  $F(P_1, P_2)$  равны произведению собственных инвариантов по клеткам. Заметим, что для аналитических функций от нескольких простых, попарно коммутирующих матриц-аргументов  $P_i$  в теории матриц, в том числе и в изучаемой тензорной тригонометрии, используется

аналогичный *принцип монарности*. Принцип бинарности исходит из коммутативности именно квадратов простых матриц. Оба данных принципа позволяют непосредственным образом переносить аналитические операции и их результаты с простейшей клеточной формы на исходные матрицы или на их аналитические функции. Пусть

$P_1 = \cos \Phi$ ,  $P_2 = \sin \Phi$  ( $r_1 = r_2 \rightarrow \langle \mathcal{P}_4 \rangle = \mathbf{0}$ ). Составим некоторую аналитическую функцию от них с учётом (176), (177):

$$F(P_1, P_2) = (P_1 + P_2) \cdot (P_1 - P_2) = \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\},$$

где  $\text{rang } A_1 = \text{rang } A_2$ , то есть  $A_1$  и  $A_2$  - *эквиранговые линеоры*.

Её W-форма в ортонормированном базисе  $\{R_w\}$  исходя из бинарных произведений по  $2 \times 2$ -клеткам есть ортогональная ротационная матрица-функция:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{A_2 A_2'\} & \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \\ \hline \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \hline \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Ref}\{A_1 A_1'\} & \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \\ \hline \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \hline -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Rot } 2\Phi_{12} & \text{Rot } 2\Phi_{12} \\ \hline \cos 2\varphi_1 & -\sin 2\varphi_1 \\ \hline \sin 2\varphi_1 & \cos 2\varphi_1 \\ \hline \end{array}.$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  в указанном произведении всегда соответствует диагонально-единичный блок. Полученная  $2 \times 2$ -матрица осуществляет ротацию на собственной плоскости на угол  $2\varphi_1$  против часовой стрелки. В целом матрица-функция осуществляет сферическую ротацию на тензорный угол  $2\Phi_{12}$ :

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} &= (\cos \tilde{\Phi}_{12} + \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{12} - \sin \tilde{\Phi}_{12}) = \\ &= (\cos^2 \tilde{\Phi}_{12} - \sin^2 \tilde{\Phi}_{12}) + (2\sin \tilde{\Phi}_{12} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}) = \\ &= \cos 2\Phi_{12} + i \cdot \sin 2\Phi_{12} = \text{Rot } 2\Phi_{12}. \end{aligned} \tag{243}$$

$$\text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \text{Rot}' 2\Phi_{12} = \text{Rot} (-2\Phi_{12}), \tag{244}$$

где приставка «Rot» обозначает ротационную матрицу-функцию от *моторного* тензорного сферического угла  $\Phi$ . В отличие от угла проективного типа  $\tilde{\Phi}$  в его обозначении знак *тильды* сверху отсутствует. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \cos^2 \tilde{\Phi} &= \cos^2 \Phi, \quad \sin^2 \tilde{\Phi} = \sin^2 \Phi \quad (\text{см. Правило №1}); \\ \sin \tilde{\Phi} \cdot \cos \tilde{\Phi} &= \sin \Phi \cdot \cos \Phi = \cos \Phi \cdot \sin \Phi = -\cos \tilde{\Phi} \cdot \sin \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

Тригонометрические функции от  $\Phi$  относятся также к моторному типу. Тензорная ротация осуществляется в

тригонометрическом подпространстве размерности  $2\tau_R$ , где  $\tau_R = r_1 - v'$  (рис.2) относительно его ортогонального дополнения размерности  $(n - 2\tau_R)$ , то есть обобщённой оси ротации. Ортогональная матрица  $R$  является *ротационной*, если  $\det R = +1$ , и является *рефлективной*, если  $R = R'$ . Оба эти качества могут совмещаться, а могут и нет. В свою очередь, ротационная матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$  теоретически вычисляется как *тригонометрический квадратный корень* из (243):

$$\text{Rot } \Phi_{12} = [\text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\}]^{1/2}. \quad (245)$$

Формула (243) наглядно интерпретируется так. *Ортогональная рефлексия от  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и затем от  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  тождественна ротации на удвоенный угол между  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$* . Это очевидно для пары векторов или пары прямых. В частности, для пары неориентированных векторов или планаров ранга 1 имеем ротационную матрицу ( $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} &= [(I - 2 \cdot \overleftarrow{a_2 a_2'}) \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{a_1 a_1'})]^{1/2} = \\ &= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{a_1 a_1'}{a_1' a_1} + \frac{a_2 a_2'}{a_2' a_2} \right) + 4 \cos^2 \varphi_{12} \cdot \frac{a_2 a_1'}{a_1' a_2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (246)$$

где  $\overleftarrow{aa'} = \frac{aa'}{a'a}$ ,  $\overleftarrow{a_2 a_1'} = \frac{a_2 a_1'}{a_1' a_2}$ , в том числе при  $a = e$ :  $\overleftarrow{ee'} = ee'$ .

Для *ориентированных* векторов или линейоров принятый ранее для собственного угла  $\varphi_i$  допустимый интервал  $[-\pi/2 \div +\pi/2]$  занижен вдвое. Поэтому для  $\varphi_i$  в монобинарной клеточной форме матрицы  $\text{Rot } \Phi$  применяют интервал  $[-\pi \div +\pi]$ .

В формулах (243), (244) фигурируют ортогональные рефлекторы, для которых зеркала есть  $g$ -подпространства  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ , согласно (176), (177). Помимо них в *евклидовой тензорной тригонометрии* при  $r_1 = r_2 = r$  особое значение имеет симметричный рефлектор, для которого зеркало есть срединное подпространство тензорного угла. В тригонометрическом базисе это подпространство задаётся вектор-осями  $u_i$  ( $i = \overline{1, \tau}$ ), то есть собственными векторами проективного косинуса с положительными собственными значениями « $+\cos \varphi_i$ » при условии  $2r < n$  (рис.2). В случае же  $2r > n$  срединное подпространство расширяется ещё на  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$ . Новая тензорная характеристика именуется как *срединный рефлектор*. Согласно

(242), проективный косинус представляется в виде алгебраической суммы двух ортогональных слагаемых - с положительными и с отрицательными собственными значениями:

$$\cos \tilde{\Phi}_{12} = \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} + \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\ominus}.$$

Эти слагаемые суть сингулярные симметричные матрицы. Зеркало срединного рефлектора есть подпространство  $\langle \text{im } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \rangle$ .

Согласно (176), срединный рефлектор теоретически выражается как

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \overleftarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}} - \overrightarrow{\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}}. \tag{247}$$

Покажем, что зеркало данного рефлектора расположено действительно посередине между зеркалами планаров, образующих тензорный угол. Для этого получим срединный рефлектор либо ротацией рефлектора первого планара на угол  $\{+\Phi_{12}/2\}$ , либо ротацией рефлектора второго планара на угол  $\{-\Phi_{12}/2\}$  как двухвалентных тензоров В соответствии с принципом бинарности имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & -\sin \varphi_1/2 \\ \hline \sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Ref } \{A_1 A_1'\} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \hline -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & \sin \varphi_1/2 \\ \hline -\sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} = \\ = & \begin{array}{c} \text{Rot}' \Phi_{12}/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & \sin \varphi_1/2 \\ \hline -\sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Ref } \{A_2 A_2'\} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ \hline \sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Rot } \Phi_{12}/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & -\sin \varphi_1/2 \\ \hline \sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} = \\ = & \begin{array}{c} \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \end{array}. \tag{248} \end{aligned}$$

Здесь подпространству  $\langle \mathcal{P}_1 \rangle$  соответствует либо отрицательный единичный блок ( $2r < n$ ), либо положительный единичный блок ( $2r > n$ ), либо этот блок отсутствует ( $2r = n$ ). Простые матрицы определяются как *тригонометрически согласованные*, если они приводятся к W-форме одной и той же структуры в общем базисе. Причём, как известно, нормальные

матрицы приводятся к ней ортогональным преобразованием, обозначаемым далее как  $R_W$ .

**Правило №2.** *Тригонометрически согласованные ротационные матрицы одного и того же вида, например сферические, коммутативны. При этом в их произведениях тензорные углы-аргументы моторного типа образуют алгебраическую сумму.*

**Правило № 3.** *Ротационная сферическая матрица переносится через сферически ортогональный рефлектор (при их тригонометрической согласованности) с изменением знака её угла-аргумента.*

Эти правила получают также непосредственным путём с использованием принципа бинарности. Кроме того, имеем:

$$\begin{aligned} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) &= \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) = \\ &= (\cos \tilde{\Phi} \pm \sin \tilde{\Phi}) \cdot \text{Rot } (-2\tilde{\Phi}_{12}) = \{ \cos (\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12}) \pm \sin (\tilde{\Phi} \pm 2\tilde{\Phi}_{12}) \}, \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) = \text{Rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\}. \end{aligned}$$

**Следствие.** *Согласованная ротация рефлектора как двухвалентного тензора на угол  $\Phi$  тождественна его ротации как одновалентного тензора на угол  $2\Phi$ .*

Кроме того, для согласованных рефлекторов справедливо наиболее полное обобщение утверждений (243) и (244):

$$(\cos \tilde{\Phi}_{12} \pm \sin \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\cos \tilde{\Phi}_{34} \mp \sin \tilde{\Phi}_{34}) = \text{Rot} \{ \pm \Phi_{12} \pm \Phi_{34} \}.$$

Множество тригонометрически согласованных матриц включает в себя, например, все матрицы, производимые аналитической функцией от пары антикоммутирующих простых матриц. Если в (243) и (245) в качестве второго линейора взять  $A_2 = R_{12} \cdot A_1$ , где

$$\det R_{12} = +1,$$

то с учётом (98) и (99) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \overleftrightarrow{A_2 A_2'} &= R_{12} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot R_{12}' \\ \text{Ref}\{A_2 A_2'\} &= R_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot R_{12}' \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

На множестве матриц  $\langle R_{12} \rangle$ , выполняющих указанную операцию, матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , получаемая однозначно из (245), имеет тригонометрическое подпространство минимальной размерности. Именно она тригонометрически согласована со следующими рефлекторами:

$\text{Ref}\{A_1 A_1'\}$ ,  $\text{Ref}\{A_2 A_2'\}$  и  $\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}$ .

С учётом Правила №3 справедлива общая формула:  
 $\text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{AA'\} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{AA'\}$  ( $A = A_1$  или  $A_2$ ).

(250)

В указанном случае множество  $\langle R_{12} \rangle$  не произвольно. А именно:  $\langle R_{12} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} \rangle$ , где  $\Theta_{12}$  - сферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Phi_{12}$ , или *ортосферический угол*. Для тензорных углов этих двух типов и только для них выполняются соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Phi_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot}(-\Phi_{12}), \\ \text{Rot}' \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Theta_{12} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot} \Theta_{12} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Rot}' \Theta_{12}. \end{array} \right. \quad (251)$$

Соотношения (251) лежат в основе как ротационной *квазиевклидовой* тригонометрии с вышеуказанным срединным рефлексором в качестве вводимого независимо *рефлектор-тензора*, так и *внешней сферической геометрии*. Последняя по существу есть *общая геометрия постоянной положительной кривизны* (со *сферической тригонометрией* в ней). Эта геометрия реализуется на специальном гиперсфероиде, вложенном в квазиевклидово пространство, задаваемое рефлектор-тензором и евклидовой метрикой.

В тригонометрической форме срединный рефлексор представляется в виде:

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} &= \cos \Phi_{12} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12} - i \cdot \sin \Phi_{12} \cdot \sin \tilde{\Phi}_{12} = \\ &= \cos \tilde{\Phi}_{12} \cdot \cos \Phi_{12} + i \cdot \sin \tilde{\Phi}_{12} \cdot \sin \Phi_{12}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что *срединный рефлексор определяется однозначно при заданной канонической форме проективного косинуса* (237). Ориентация тензорного угла не имеет значения. В тригонометрическом базисе видно, что срединный рефлексор осуществляет операцию ортогонального отражения (рефлексии) относительно подпространства, задаваемого координатными осями  $u_i$  (то есть зеркала):

$$\text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \text{Rot}(-\Phi_{12}) \cdot \text{Ref}\{A_2 A_2'\};$$

В *проективной версии* тензорной тригонометрии все рефлексоры согласуются по формулам типа:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ref}\{A_2 A_2'\} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Ref}\{A_1 A_1'\} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}, \\ \text{Ref}\{A_1 A_1'\} = \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \text{Ref}\{A_2 A_2'\} \cdot \text{Ref}\{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}. \end{array} \right\} \quad (252)$$

В квазиевклидовой тригонометрии срединный рефlector с максимальным тригонометрическим рангом задаёт не только тригонометрический базис, но и рефlector-тензор пространства  $\langle Q^{n+q} \rangle$ :

$$\text{Ref}\{\cos \check{\Phi}_{12}\}^{\oplus} = \{\check{\sqrt{I}}\}_S \quad (\tau = \tau_{\max} = q).$$

### 4.5.7. Тригонометрическая теория простых корней $\check{\sqrt{I}}$ .

Далее выясним связь тензорной тригонометрии с теорией корней  $\check{\sqrt{I}}$ . Простой квадратный корень и он же рефlector  $\check{\sqrt{I}} = \text{Ref}\{\text{Bp}\}$  приводится модальным преобразованием к блочно-единичной форме:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline +I & Z \\ \hline Z & -I \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} q^- \\ q^- \end{array} \quad (q^+ + q^- = n);$$

где  $q^- = \text{rang Bp} = \text{rang A} = r$ ,

$$q^- = \text{sing Bp} = \text{sing A} = n - r.$$

Определим *тригонометрический ранг* матрицы как  $2\tau = 2\min \langle q^+, q^- \rangle = 2\min \langle r, n - r \rangle$ . Это фактически размерность тригонометрического подпространства любой тригонометрической матрицы. Выделим *симметричные корни*  $(\check{\sqrt{I}}) = (\check{\sqrt{I}})'$ . Пусть  $(\check{\sqrt{I}})_1$  и  $(\check{\sqrt{I}})_2$  — пара независимых симметричных корней. Полагаем

$$\left. \begin{array}{l} \overleftarrow{A_1 A_1'} = \frac{I + (\check{\sqrt{I}})_1}{2}, \quad \overrightarrow{A_1 A_1'} = \frac{I - (\check{\sqrt{I}})_1}{2}, \\ \overleftarrow{A_2 A_2'} = \frac{I + (\check{\sqrt{I}})_2}{2}, \quad \overrightarrow{A_2 A_2'} = \frac{I - (\check{\sqrt{I}})_2}{2}. \end{array} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} (\check{\sqrt{I}})_1 = \overleftarrow{A_1 A_1'} - I = I - \overrightarrow{A_1 A_1'}, \\ (\check{\sqrt{I}})_2 = \overleftarrow{A_2 A_2'} - I = I - \overrightarrow{A_2 A_2'}. \end{cases} \quad (253)$$

Откуда с учётом (163), (171), (176) и (177) получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \check{\Phi}_{12} - \sin \check{\Phi}_{12} = (\check{\sqrt{I}})_1 = \text{Ref}\{A_1 A_1'\}, \\ \cos \check{\Phi}_{12} + \sin \check{\Phi}_{12} = (\check{\sqrt{I}})_2 = \text{Ref}\{A_2 A_2'\}. \end{array} \right\}$$

(254)



$$\left. \begin{aligned} \cos \bar{\Phi}_{12} &= \frac{(\sqrt{I})_2 + (\sqrt{I})_1}{2}, \\ \sin \bar{\Phi}_{12} &= \frac{(\sqrt{I})_2 - (\sqrt{I})_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (255)$$

Если исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то однородные проекторы эквиранговые и обратно.

**Следствия**

1. Симметричный корень  $\sqrt{I}$  задает  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимно-однозначно сферически ортогональные проектор и рефлектор, а также прямой тензорный угол одного и того же тригонометрического ранга.

2. Пара симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  задает взаимно  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  однозначно тензорный угт  $\Phi_{12}$  и его тригонометрические функции. Если же исходные корни имеют один и тот же тригонометрический ранг, то  $(\sqrt{I})_2 \cdot (\sqrt{I})_1 = \text{Rot } 2\Phi_{12}$ .

3. Пара симметричных корней  $(\sqrt{I})_1$  и  $(\sqrt{I})_2$  всегда представима в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в W-форме одной и той же структуры, согласно (254), в одном и том же ортонормированном базисе  $\{R_W\}$  при исходном декартовом базисе  $\bar{E} = \{R\}$ .

Далее выделим простые несимметричные корни  $\sqrt{I} \neq (\sqrt{I})'$ . Пусть координаты корней даны также в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  в некотором исходном ортонормированном базисе  $\{R\}$ . Полагаем

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I + \sqrt{I}}{2}, & \vec{B}' &= \frac{I - \sqrt{I}}{2}, \\ \vec{B}' &= \frac{I + (\sqrt{I})'}{2}, & \vec{B} &= \frac{I - (\sqrt{I})'}{2}, \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{I} = 2\vec{B} - I = I - 2\vec{B}', \\ (\sqrt{I})' = 2\vec{B}' - I = I - 2\vec{B}. \end{cases} \quad (256)$$

Откуда с учётом (198), (203), (211), (212) имеем:

$$\begin{aligned} \sec \bar{\Phi}_B - i \cdot \text{tg } \bar{\Phi}_B &= \sqrt{I} = \text{Ref}\{\vec{B}\}, \\ \sec \bar{\Phi}_B + i \cdot \text{tg } \bar{\Phi}_B &= (\sqrt{I})' = \text{Ref}\{\vec{B}'\}. \end{aligned} \quad (257)$$

$$\sec \bar{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{I})' + \sqrt{I}}{2}, \quad i \cdot \text{tg } \bar{\Phi}_B = \frac{(\sqrt{I})' - \sqrt{I}}{2}. \quad (258)$$

Исходные корни  $\sqrt{\Gamma}$  и  $(\sqrt{\Gamma})'$  всегда имеют один и тот же тригонометрический ранг. Между простым корнем  $\sqrt{\Gamma} \neq (\sqrt{\Gamma})'$  и  $\vec{B}(\vec{B}')$ , согласно (256), имеется взаимно-однозначное соответствие. Они же однозначно задают эквиранговые ортопроекторы в (253), при этом  $\det \cos \check{\Phi}_{12} \neq 0$ , или ортопроекторы  $\vec{B}\vec{B}$  и  $\vec{B}\vec{B}'$ . при этом  $\det \cos \check{\Phi}_B \neq 0$ , и пару симметричных корней  $(\sqrt{\Gamma})_1$  и  $(\sqrt{\Gamma})_2$ , при этом  $\det [(\sqrt{\Gamma})_1 + (\sqrt{\Gamma})_2] \neq 0$ .

### Следствия

1. Простой несимметричный корень  $\sqrt{\Gamma}$  задаёт в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  взаимнооднозначно сферически косогональные проектор, рефлектор и тригонометрические функции  $\operatorname{tg} \check{\Phi}_B$  и  $\operatorname{sec} \check{\Phi}_B$  и однозначно пару эквиранговых ортопроекторов и орторефлектооов. а также тензорный угол  $\check{\Phi}_B$  и тригонометрические функции  $\sin \check{\Phi}_B$  и  $\cos \check{\Phi}_B$

2. Все характеристические проекторы  $\vec{B}, \vec{B}', \vec{B}\vec{B}, \vec{B}\vec{B}'$ , а также тригонометрические функции угла  $\check{\Phi}_B$  и соответствующие им рефлекторы (тригонометрические корни) в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  приводятся к согласованным W-формам в одном и том же ортонормированном базисе  $\{R_w\}$  при исходном декартовом базисе  $\check{E} = \{R\}$ .

(Наиболее общо аналогичные "тригонометрические" утверждения имеют место для симметричных и простых несимметричных корней типа  $\sqrt{S}$ .)

## 4.5.8. Моторные тензорные синус, косинус, секанс и тангенс

Тензорный косинус и синус моторного угла формально определяются через ротационную ортогональную матрицу ( $\det R = +1 \leftrightarrow R = \operatorname{Rot} \Phi$ ) как

$$\cos \Phi = \cos' \Phi = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi + \text{Rot}(-\Phi)}{2}, \quad (259)$$

$$i \sin \Phi = -(i \sin \Phi)' = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot}' \Phi}{2} = \frac{\text{Rot } \Phi - \text{Rot}(-\Phi)}{2}. \quad (260)$$

Тензорный секанс и тангенс моторного угла пока определим формулами:

$$\sec \Phi = \sec' \Phi = \cos^{-1} \Phi, \quad (261)$$

$$\text{tg } \Phi = \text{tg}' \Phi = + i \sin \Phi \cdot \sec \Phi = - \sec \Phi \cdot i \sin \Phi. \quad (262)$$

Очевидны тригонометрические соотношения, аналогичные ранее полученным для проективных функций:

$$\cos^2 \Phi + \sin^2 \Phi = I = \cos^2 \Phi - (i \sin \Phi)^2. \quad (263)$$

$$\sec^2 \Phi - \text{tg}^2 \Phi = I. \quad (264)$$

Вышеуказанные пары моторных функций коммутативны:

$$\cos \Phi \cdot \sin \Phi = \sin \Phi \cdot \cos \Phi, \quad \sec \Phi \cdot \text{tg } \Phi = \text{tg } \Phi \cdot \sec \Phi. \quad (265, 266)$$

Для углов и функций моторного типа необходимо выполняется условие  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = 0$ . Канонические W-формы вещественной ортогональной матрицы, а также моторного косинуса и синуса в тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\text{Rot } \Phi = \cos \Phi + i \sin \Phi = \exp(i\Phi) = \quad (267)$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \Phi & \\ \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} + i \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sin \Phi & \\ \hline 0 & +i \sin \varphi_j \\ \hline -i \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad \langle \mathcal{P}_3 \rangle$$

Далее установим канонические формы моторных функций и угла. Для этого сначала перейдем в комплексный базис диагональной формы синуса, а затем вернемся в исходный вещественный тригонометрический базис (то есть в базис диагонального косинуса). Это в итоге тождественное модальное преобразование позволяет установить каноническую форму моторного угла в тригонометрическом базисе:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \tilde{E}_D \\ \rightarrow \end{array} \cos \begin{array}{|c|c|} \hline D\{\Phi\} & \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} + i \cdot \sin \begin{array}{|c|c|} \hline D\{\Phi\} & \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \tilde{E}_D^{-1} \\ \rightarrow \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \tilde{E}_D^{-1} \\ \rightarrow \end{array} \cos \begin{array}{|c|c|} \hline \Phi & \\ \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} + i \cdot \sin \begin{array}{|c|c|} \hline \Phi & \\ \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \\
 & = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline i\Phi & \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} .
 \end{aligned}$$

(Заметим, что для матриц, комплексифицированных за счёт перехода из декартова в эрмитово ортонормированный базис, при сопряжении используется операция эрмитова транспонирования.) В дополнение к формулам (164) и (170) для углов проективного типа отсюда вытекают родственные соотношения для углов моторного типа:

$$\Phi_{12} = -(\Phi_{12})' = -\Phi_{21}, \quad \Phi_B = -(\Phi_B)' = -\Phi_{B'}. \tag{268}$$

$$\cos \begin{array}{|c|c|} \hline \Phi & \\ \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \cos \begin{array}{|c|c|} \hline D\{\Phi\} & \\ \hline +\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & -\varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \Phi & \\ \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} i \\ \rightarrow \end{array}$$

(эта формула более очевидна, если использовать ряд Маклорена),

$$i \cdot \sin \begin{array}{|c|c|} \hline \Phi & \\ \hline 0 & +i \cdot \varphi_j \\ \hline -i \cdot \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline i \cdot \sin \Phi & \\ \hline 0 & -\sin \varphi_j \\ \hline +\sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} .$$

### 4.5.9. Взаимосвязь между проективными и моторными тригонометрическими функциями и углами

С учётом (236)-(239), (261), (262) и (267) получаем соотношение:

$$\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\oplus} \cdot (i\tilde{\Phi}) = \Phi = (-i\tilde{\Phi}) \cdot \text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\oplus}. \quad (269)$$

$$(\tilde{\Phi}^2 = \Phi^2);$$

$$\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\oplus} \cdot \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ -\sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ -i \operatorname{tg} \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \Phi \\ i \sin \Phi \\ \sec \Phi \\ \operatorname{tg} \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \tilde{\Phi} \\ \sin \tilde{\Phi} \\ \sec \tilde{\Phi} \\ i \operatorname{tg} \tilde{\Phi} \end{Bmatrix} \cdot \text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\oplus}. \quad (270)$$

**Правило №4.** Квадраты и любые чётные степени тензорного угла проективного и моторного типа, а также их тригонометрических функций одноимённого вида равны.

Углы  $\tilde{\Phi}$  и  $\Phi$  суть симметричный и эрмитов тензоры, приводимые к тождественным диагональным формам, но в различных ортогональных базисах — декартовом и эрмитово ортонормированном. Здесь, конечно, подразумевается, что  $\langle \mathcal{P}_4 \rangle = \mathbf{0}$ , например при  $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_B$ .

Далее для преобразования вещественных тригонометрических функций в их комплексные псевдоаналоги (с целью последующего естественного ввода тензорных гиперболических функций) определим *комплексный тригонометрический базис*. Ему отвечает модальная матрица соответствующего перехода - псевдоарифметический квадратный корень из срединного рефлектора тензорного угла (248):

$$\tilde{E}_0 = \sqrt{\text{Ref} \{ \cos \tilde{\Phi} \}^{\oplus}} \cdot R_W = R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & +i \\ \hline \end{array} = R_W \cdot \sqrt{I^{\oplus}}. \quad (271)$$

При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  соответствует либо мнимоеединичный блок ( $2g < n$ ), либо положительный единичный блок ( $2g > n$ ), либо этот блок вовсе отсутствует ( $2g = n$ ).

Комплексный тригонометрический базис отличается от вещественного тем, что в нём координаты, соответствующие отрицательным собственным значениям проективного косинуса (то есть ординаты), мнимонизированы:  $v_j \rightarrow i \cdot v_j$ . При переходе в комплексный тригонометрический базис косинус и секанс не изменяются, а угол, синус и тангенс трансформируются в псевдогиперболические аналоги. (Далее нижние индексы «г» и «с» отвечают вышеуказанным вещественному и комплексному тригонометрическому базису.)

$$\hat{E}_0^{-1} \cdot \{\check{\Phi}\}_r \cdot \hat{E}_0 \equiv \{\Phi\}_i \equiv i \cdot \{-i\check{\Phi}\}_c \leftrightarrow \hat{E}_0^{-1} \cdot \{i\Phi\}_i \cdot \hat{E}_0 \equiv i \cdot \{-\check{\Phi}\}_i \equiv \{-i\Phi\}_c, \quad (272)$$

$$\hat{E}_0^{-1} \cdot \{\sin \check{\Phi}\}_r \cdot \hat{E}_0 \equiv \{\sin \Phi\}_i \equiv \{i \operatorname{sh}(-i\check{\Phi})\}_c \leftrightarrow \quad (273)$$

$$\leftrightarrow \hat{E}_0^{-1} \cdot \{i \sin \Phi\}_i \cdot \hat{E}_0 \equiv i \cdot \{-\sin \check{\Phi}\}_i \equiv \{\operatorname{sh}(-i\Phi)\}_c, \quad (274)$$

$$\hat{E}_0^{-1} \cdot \{i \operatorname{tg} \check{\Phi}\}_i \cdot \hat{E}_0 \equiv i \cdot \{-\operatorname{tg} \Phi\}_i \equiv \{\operatorname{th}(-i\check{\Phi})\}_c \leftrightarrow \quad (275)$$

$$\leftrightarrow \hat{E}_0^{-1} \cdot \{\operatorname{tg} \Phi\}_i \cdot \hat{E}_0 \equiv \{\operatorname{tg} \check{\Phi}\}_i \equiv \{i \cdot \operatorname{th}(-i\Phi)\}_c. \quad (276)$$

Ниже сопоставлены канонические формы угла и функций в тригонометрических базисах - вещественном (слева) и комплексном (справа):

$$\{\check{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \emptyset & \varphi_1 \\ \hline \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \end{array} = \{\check{\Phi}\}'_r, \quad \{\check{\Phi}\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +i \cdot \varphi_1 \\ \hline -i \cdot \varphi_1 & 0 \\ \hline \end{array} = \{\check{\Phi}\}_c^*, \quad (277)$$

$$\{i\Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \emptyset & -\varphi_1 \\ \hline -\varphi_1 & \emptyset \\ \hline \end{array} = -\{i\check{\Phi}\}'_r, \quad \{i\Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & i \cdot \varphi_1 \\ \hline i \cdot \varphi_1 & 0 \\ \hline \end{array} = -\{i\check{\Phi}\}_c^*; \quad (278)$$

$$\{\cos \check{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varphi_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & -\cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline +\operatorname{ch} i\varphi_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & -\operatorname{ch} i\varphi_1 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch}(\pm i\check{\Phi})\}_c, \quad (279)$$

$$\{\cos \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{ch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{ch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{ch} (\pm i\Phi)\}_c, \quad (280)$$

$$\{\sec \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline + \sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & - \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline + \operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & - \operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch} (\pm i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (281)$$

$$\{\sec \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \operatorname{sch} i\varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{sch} i\varphi_j \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sch} (\pm i\Phi)\}_c; \quad (282)$$

$$\{\sin \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \sin \varphi_j \\ \hline \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & + \operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline - \operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \operatorname{sh} (-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (283)$$

$$\{i \sin \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & - \sin \varphi_j \\ \hline + \sin \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & - \operatorname{sh} i\varphi_j \\ \hline - \operatorname{sh} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{sh} (-i\Phi)\}_c; \quad (284)$$

$$\{i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & - \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline + \operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & - \operatorname{th} i\varphi_j \\ \hline - \operatorname{th} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{\operatorname{th} (-i\tilde{\Phi})\}_c, \quad (285)$$

$$\{\operatorname{tg} \Phi\}_r = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & + \operatorname{th} i\varphi_j \\ \hline - \operatorname{th} i\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} = \{i \operatorname{th} (-i\Phi)\}_c. \quad (286)$$

Для ротационной ортогональной матрицы справедливы формулы Муавра и Эйлера:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rot}^m \Phi &= \cos \{m \cdot \Phi\} + i \sin \{m \cdot \Phi\} = \\ &= \operatorname{ch} \{m \cdot i\Phi\} + \operatorname{sh} \{m \cdot i\Phi\} = \exp \{m \cdot i\Phi\} = \operatorname{Rot} \{m \cdot \Phi\}. \end{aligned} \quad (287)$$

В вещественном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\text{Rot}^m \Phi = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos m\varphi_j & -\sin m\varphi_j \\ \hline +\sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \\ \hline \end{array} = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -m\varphi_j \\ \hline +m\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} .$$

В комплексном тригонометрическом базисе это интерпретируется как

$$\{\text{Rot}^m \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos m\varphi_j & -i \sin m\varphi_j \\ \hline -i \sin m\varphi_j & \cos m\varphi_j \\ \hline \end{array} = \exp \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -i m\varphi_j \\ \hline -i m\varphi_j & 0 \\ \hline \end{array} .$$

(Если в эти формулы подставить  $m = 1/2$ , то таким образом можно вычислить тригонометрический квадратный корень (245) из ротационной матрицы-функции.)

### 4.5.10. Деформационные тензорные тригонометрические функции от сферических углов моторного типа

К сферической ротационной матрице-функции ранее формально привело последовательное применение ортогональных рефлекторов, связанных с двумя эквиранговыми линеорами (планарами), согласно (243). Аналогичным образом, с использованием принципа бинарности последовательное применение косогональных рефлекторов, связанных с той же парой эквиранговых линеоров (планаров), формально приводит к определению другого нового понятия - сферической деформационной матрицы-функции. Как и ротационная матрица-функция, она имеет бинарную элементарную тригонометрическую структуру в виде:

$$\text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} = \text{Def } \alpha_B \quad (\alpha_B \neq 2\Phi_B).$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & -\text{tg } \varphi_j \\ \hline \text{tg } \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & \text{tg } \varphi_j \\ \hline -\text{tg } \varphi_j & -\sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \alpha_j & \text{tg } \alpha_j \\ \hline \text{tg } \alpha_j & \sec \alpha_j \\ \hline \end{array}$$



При этом подпространству  $\langle \mathcal{P}_3 \rangle$  в указанном произведении всегда соответствует диагонально-единичный блок. В целом же указанная матрица-функция осуществляет сферическую деформацию на тензорный угол  $\alpha_B$ . В аналитической форме это матричное преобразование реализуется аналогично (243) и (244):

$$\begin{aligned} \text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} &= (\sec \tilde{\Phi}_B + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B) \cdot (\sec \tilde{\Phi}_B - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B) = \\ &= (\sec^2 \tilde{\Phi}_B + \operatorname{tg}^2 \tilde{\Phi}_B) + (2i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}_B \sec \tilde{\Phi}_B) = \text{Def } \alpha_B, \end{aligned} \quad (288)$$

$$\text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{B'\} = \text{Def}^{-1} \alpha_B = \text{Def}(-\alpha_B). \quad (289)$$

Приставка «Def» обозначает деформационную матрицу-функцию от тензорного сферического угла моторного типа. Но если ротационные тензорные функции имеют синусно-косинусную природу, то как бы аналогичные им по формальному определению деформационные тензорные функции имеют тангенсно-секансную природу. (Полной аналогии в *сферическом* варианте угла здесь, очевидно, нет.) Бинарная тензорная деформация осуществляется также, как и ротация, в тригонометрическом подпространстве (рис. 2) относительно его сферически ортогонального дополнения. Тензорные секанс и тангенс теперь уже вполне естественным путём определяются через сферическую деформационную матрицу соотношениями, аналогичными (259) и (260):

$$\sec \Phi = (\text{Def } \Phi + \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi + \text{Def}(-\Phi)] / 2, \quad (290)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = (\text{Def } \Phi - \text{Def}^{-1} \Phi) / 2 = [\text{Def } \Phi - \text{Def}(-\Phi)] / 2. \quad (291)$$

Тензорные косеканс и котангенс моторного угла определяются соответственно как обратные или квазиобратные синус и тангенс. Каноническая W-форма для вещественной деформационной матрицы реализуется в том же вещественном тригонометрическом базисе:

$$\text{Def } \Phi = \text{Def}' \Phi = \sec \Phi + \operatorname{tg} \Phi = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & \operatorname{tg} \varphi_j \\ \hline \operatorname{tg} \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array}, \quad (292)$$

1

$$\text{Def}^{-1} \Phi = \text{Def}(-\Phi) = \sec \Phi - \operatorname{tg} \Phi \quad (293)$$

Канонические формы ротационной и деформационной матриц-функций сферического тензорного угла в комплексном тригонометрическом базисе имеют вид:

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c = \cos \Phi + \{i \cdot \sin \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_j & -i \sin \varphi_j \\ \hline -i \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (294)$$

$$\{\text{Rot } \Phi\}_c^* = \{\text{Rot } (-\Phi)\}_c = \cos \Phi - \{i \cdot \sin \Phi\}_c; \quad (295)$$

$$\{\text{Def } \Phi\}_c = \sec \Phi + \{\text{tg } \Phi\}_c = \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & -i \text{tg } \varphi_j \\ \hline +i \text{tg } \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \text{sch}(-i\Phi) + i \cdot \text{th}(-i\Phi), \quad (296)$$

$$\{\text{Def } \Phi\}_c^{-1} = \{\text{Def } (-\Phi)\}_c = \sec \Phi - \{\text{tg } \Phi\}_c. \quad (297)$$

Как для ротационной, так и для бинарной деформационной матрицы детерминант каждой клетки W-формы и в целом равен -1. Деформационная матрица-функция от сферического угла симметрична и положительно определена. Ротация базисов 2×2-клеток W-формы, то есть в пределах собственных тригонометрических плоскостей, на углы  $\varphi_j = \pm \pi/4$  приводит к диагонализации этих клеток. Собственные значения матрицы:  $\mu_{2j} = \sec \varphi_j + \text{tg } \varphi_j > 0$ ,  $\mu_{2j+1} = \sec \varphi_j - \text{tg } \varphi_j = \mu_{2j}^{-1} > 0$  и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Чтобы выяснить суть бинарного деформационного преобразования, представим его в виде:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j & \text{tg } \varphi_j \\ \hline \text{tg } \varphi_j & \sec \varphi_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \hline \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sec \varphi_j + \text{tg } \varphi_j & 0 \\ \hline 0 & \sec \varphi_j - \text{tg } \varphi_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ \hline -\sin \pi/4 & \cos \pi/4 \\ \hline \end{array}$$

Отсюда видно, что модальное сферическое деформационное преобразование в канонической форме (292) сводится на собственной тригонометрической плоскости к тому, что осуществляется растяжение координатной сетки по главной диагонали (1-й и 3-й квадрант) коэффициентом  $\mu = \sec \varphi + \text{tg } \varphi > 0$  и сжатие сетки по побочной диагонали с обратным коэффициентом  $\mu^{-1} = \sec \varphi - \text{tg } \varphi > 0$ . По аналогии

с представлением комплексного числа в форме (149), любое *положительное* число  $\mu$  и обратное ему взаимно-однозначно представляются через сферический угол:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi > 0, \\ \mu^{-1} &= \sec \varphi - \operatorname{tg} \varphi > 0. \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow -\pi/2 < \varphi < +\pi/2 \left\{ \begin{aligned} \sec \varphi &= (\mu + \mu^{-1})/2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= (\mu - \mu^{-1})/2. \end{aligned} \right. \quad (298)$$

Дадим ещё одну интерпретацию бинарного деформационного преобразования, связанную с использованием *перекрёстных базисов*. В частности, она применима при релятивистских преобразованиях в пространстве-времени Минковского. А именно пусть декартовы базисы  $\tilde{E}_i$  и  $\tilde{E}_j$  связаны ротационным преобразованием:

$$\tilde{E}_i = \operatorname{Rot}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_j.$$

Декартовы координаты вектора в обоих базисах связаны пассивным преобразованием:

$$a^{(i)} = \operatorname{Rot} \Phi_{ij} \cdot a^{(j)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cdot x_1^{(j)} - \sin \varphi_i \cdot x_2^{(j)} \\ \sin \varphi_i \cdot x_1^{(j)} + \cos \varphi_i \cdot x_2^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{bmatrix}.$$

В пределах  $t$ -й  $2 \times 2$ -клетки базис  $\tilde{E}_j$  повернут относительно базиса  $\tilde{E}_i$  на угол  $\varphi_i$  по часовой стрелке. Определим *перекрёстные* базисы  $\tilde{E}_{i,j}$  со смешанными осями  $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$  и  $\tilde{E}_{j,i}$  со смешанными осями  $(x_1^{(j)}, x_2^{(i)})$ .

Они связаны *активным* модальным преобразованием вида

$$\tilde{E}_{i,j} = \operatorname{Def}(-\Phi_{ij}) \cdot \tilde{E}_{j,i}. \quad (299)$$

В пределах той же  $2 \times 2$ -клетки *перекрёстные координаты* вектора в обоих базисах связаны пассивным модальным преобразованием того же вида:

$$\begin{aligned} a^{(i,j)} = \operatorname{Def} \Phi_{ij} \cdot a^{(j,i)} &= \begin{bmatrix} \sec \varphi_i & \operatorname{tg} \varphi_i \\ \operatorname{tg} \varphi_i & \sec \varphi_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(j,i)} \\ x_2^{(j,i)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sec \varphi_i \cdot x_1^{(j,i)} - \operatorname{tg} \varphi_i \cdot x_2^{(j,i)} \\ \operatorname{tg} \varphi_i \cdot x_1^{(j,i)} + \sec \varphi_i \cdot x_2^{(j,i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(i,j)} \\ x_2^{(i,j)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (300)$$

Здесь координаты вектора находятся *перекрёстным проецированием*. Заметим, что в евклидовом пространстве при декартовом проецировании значениям координат тензорного объекта соответствует тригонометрический инвариант (182), а при перекрёстном проецировании значениям координат тензорного объекта соответствует тригонометрический инвариант (208).

Естественным обобщением *бинарной* сферической деформационной матрицы является положительно определенная симметричная матрица с единичным детерминантом, например  $\{G/\sqrt{\det G}\}$ . Любое линейное модальное преобразование *без рефлексии* (для двухвалентных тензоров) сводится к модальной матрице с единичным детерминантом. Поэтому, согласно её полярному разложению, такое модальное преобразование представляется произведением ротационной и обобщённой деформационной матриц при сохранении одной и той же ориентации базиса, то есть при  $\det V > 0$ .

### **4.5.11. Специальные модальные преобразования собственных ортогональных и косогональных проекторов и рефлекторов**

В тензорной тригонометрии между центральным планаром и симметричным проектором одного и того же ранга имеется взаимнооднозначное соответствие. То же в евклидовом пространстве относится к их ортогональным дополнениям. Эквиранговые планары, как и ортопроекторы, преобразуются друг в друга посредством как тензорной ротации, так и тензорной рефлексии. Формулы модального преобразования следуют, например, из (252), (176), (177) или непосредственно с применением принципа бинарности:

$$\overleftrightarrow{A_2 A_2'} = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \text{Rot } (-\Phi_{12}) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus} \cdot \overleftrightarrow{A_1 A_1'} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_{12}\}^{\oplus}, \quad (301)$$

$$\overleftrightarrow{B' B} = \text{Rot } \Phi_B \cdot \overleftrightarrow{B B'} \cdot \text{Rot } (-\Phi_B) = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus} \cdot \overleftrightarrow{B B'} \cdot \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus}. \quad (302)$$

Они преобразуются как ортогональные тензоры валентности 2. "Внутри" символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ PQ, можно указать два характеристических "равнобедренных" тензорных треугольника PZQ и PIQ, где  $\angle PZQ \equiv \angle PIQ \equiv \Phi_B$ . Кроме того, в тензорной тригонометрии, согласно условиям (217) - (220), имеется взаимно-однозначное соответствие между парой центральных эквианговых планаров  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$  ( $\det A_1' A_2' \neq 0$ ) и косопроекторами  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$ . Характеристические косопроекторы  $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$  ( $\overleftrightarrow{B}$  и  $\overleftrightarrow{B}'$ ) преобразуются друг в друга посредством как бинарной тензорной деформации, так и тензорной рефлексии. Формулы преобразований, аналогичные (252), (301), (302), устанавливаются также исходя из принципа бинарности и структуры косопроекторов (211), (212):

$$\begin{aligned} \text{Ref } \{B'\} &= \text{Def } \Phi_B \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Def } (-\Phi_B) = \\ &= \text{Ref } \{ \cos \check{\Phi}_B \}^{\oplus} \cdot \text{Ref } \{B\} \cdot \text{Ref } \{ \cos \check{\Phi}_B \}^{\oplus}, \end{aligned} \quad (303)$$

$$\overleftrightarrow{B}' = \text{Def } \Phi_B \cdot \overleftrightarrow{B} \cdot \text{Def } (-\Phi_B) = \text{Ref } \{ \cos \check{\Phi}_B \}^{\oplus} \cdot \overleftrightarrow{B} \cdot \text{Ref } \{ \cos \check{\Phi}_B \}^{\oplus}. \quad (304)$$

Аналогично (251), имеем:

$$\text{Ref } \{ \cos \check{\Phi}_B \}^{\oplus} = \text{Def } \Phi_B \cdot \text{Ref } \{B\} = \text{Def } (-\Phi_B) \cdot \text{Ref } \{B'\}. \quad (305)$$

"Внутри" символического октаэдра (рис. 1), проведя диагональ RS, можно указать ещё два особых характеристических треугольника: RZS и RIS. Они будут рассмотрены далее.

Формулы рефлексивного модального преобразования характеристических проекторов в (301) и в (304) приводятся к тригонометрической форме путём поклеточного умножения слева и справа на собственные косинусы и секансы (что возможно лишь для нуль-простой исходной матрицы):

$$\left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{B} \\ \overleftrightarrow{B}' \end{array} \right\} = \cos \check{\Phi}_B \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{B} \\ \overleftrightarrow{B}' \end{array} \right\} \cdot \sec \check{\Phi}_B = \sec \check{\Phi}_B \cdot \left\{ \begin{array}{c} \overleftrightarrow{B} \\ \overleftrightarrow{B}' \end{array} \right\} \cdot \cos \check{\Phi}_B. \quad (306)$$

Эти модальные формулы нетрудно проверить через таблицу умножения характеристических проекторов. Формулы (302), (304), (306) — примеры модального преобразования, осуществляемого либо ротационной, либо рефлексивной, либо

симметричной тригонометрическими матрицами, но с одинаковым результатом.

В обратном порядке изложения все характеристические проекторы представляются через соответствующие им пары антикоммутирующих проективных тригонометрических функций, заданных как бы самостоятельным образом:

$$\left. \begin{aligned}
 \overleftarrow{A_1 A_1'} &= 1/2 \cdot (1 + \cos \tilde{\Phi} - \sin \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{B B'}, \\
 \overrightarrow{A_1 A_1'} &= 1/2 \cdot (1 - \cos \tilde{\Phi} + \sin \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{B B'}, \\
 \overleftarrow{A_2 A_2'} &= 1/2 \cdot (1 + \cos \tilde{\Phi} + \sin \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{B' B}, \\
 \overrightarrow{A_2 A_2'} &= 1/2 \cdot (1 - \cos \tilde{\Phi} - \sin \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{B' B}, \\
 \overleftarrow{B} &= 1/2 \cdot (1 + \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_1 A_2'}, \\
 \overrightarrow{B} &= 1/2 \cdot (1 - \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_1 A_2'}, \\
 \overleftarrow{B'} &= 1/2 \cdot (1 + \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_2 A_1'}, \\
 \overrightarrow{B'} &= 1/2 \cdot (1 - \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_2 A_1'}.
 \end{aligned} \right\} \quad (307)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \overleftarrow{B} &= 1/2 \cdot (1 + \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_1 A_2'}, \\
 \overrightarrow{B} &= 1/2 \cdot (1 - \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_1 A_2'}, \\
 \overleftarrow{B'} &= 1/2 \cdot (1 + \sec \tilde{\Phi} + i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overleftarrow{A_2 A_1'}, \\
 \overrightarrow{B'} &= 1/2 \cdot (1 - \sec \tilde{\Phi} - i \operatorname{tg} \tilde{\Phi}) = \overrightarrow{A_2 A_1'}.
 \end{aligned} \right\} \quad (308)$$

Отсюда непосредственно следует применимость и для проекторов принципа бинарности. Множество всех характеристических орто-проекторов и множество всех симметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. Множество всех характеристических косопроекторов и множество всех несимметричных идемпотентных матриц одного и того же ранга тождественны. При условии

$\{\det \cos \tilde{\Phi} \neq 0 \leftrightarrow \det \sec \tilde{\Phi} \neq \infty\}$  пары  $\langle \overleftrightarrow{B B'}, \overleftrightarrow{B' B} \rangle$  и  $\langle \overleftrightarrow{B}, \overleftrightarrow{B'} \rangle$  взаимнооднозначно соответствуют друг другу.

Представим ортопроекторы в тригонометрической W-форме, согласно (307). Используя бинарные соотношения, вычислим модальные матрицы, приводящие ортопроекторы к диагональной форме. Например, для ортопроектора  $\overleftarrow{B B'}$  имеем:

$$\begin{array}{c} \text{Rot } \Phi_B/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & -\sin \varphi_1/2 \\ \hline \sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \cdot 1/2 \cdot \begin{array}{c} \overleftarrow{BB'} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 + \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \hline -\sin \varphi_1 & 1 - \cos \varphi_1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Rot}' \Phi_B/2 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varphi_1/2 & \sin \varphi_1/2 \\ \hline -\sin \varphi_1/2 & \cos \varphi_1/2 \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \overleftarrow{D\{BB'\}} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Или в матричной форме:  $V_{col_I}^{-1} \cdot \overleftarrow{BB'} \cdot V_{col_I} = D\{\overleftarrow{BB'}\}$ . В исходном ортогональном базисе  $\{R_W\}$  эта же модальная матрица выражается как

$$V_{col_I} = \text{Rot}(-\Phi_B/2) \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot}(-\Phi_B/2) \cdot R_W\}, \tag{309}$$

где в фигурных скобках дана ротационная матрица в вышеуказанной W-форме. В свою очередь, собственным подпространствам  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{ker } B \rangle$  соответствуют системы ортогональных собственных вектор-столбцов этой же модальной матрицы:

$$\mathbf{b}_{I1} = R_W \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \cos \varphi_1/2 \\ \hline -\sin \varphi_1/2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{d}_{I1} = R_W \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \sin \varphi_1/2 \\ \hline \cos \varphi_1/2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Аналогичным образом устанавливается модальная матрица из вектор-столбцов для приведения  $\overleftarrow{B'B}$  к D-форме ( $V_{col_{II}}^{-1} \cdot \overleftarrow{B'B} \cdot V_{col_{II}} = D\{\overleftarrow{B'B}\}$ ), а именно

$$V_{col_{II}} = \text{Rot } \Phi_B/2 \cdot R_W = R_W \cdot \{R'_W \cdot \text{Rot } \Phi_B/2 \cdot R_W\}. \tag{310}$$

Собственным подпространствам  $\langle \text{im } B' \rangle$  и  $\langle \text{ker } B' \rangle$  соответствуют здесь системы ортогональных собственных вектор-столбцов указанной модальной матрицы:

$$\mathbf{b}_{II1} = R_W \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \cos \varphi_1/2 \\ \hline \sin \varphi_1/2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{d}_{II1} = R_W \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline -\sin \varphi_1/2 \\ \hline \cos \varphi_1/2 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Что же касается тригонометрических модальных матриц для диагонализации косопроекторов, то они будут вычислены далее с применением сферическо-гиперболической аналогии. Сейчас же пока мы ограничимся формулами с использованием арифметических корней, но модальные матрицы в них теряют сферическую тригонометрическую природу:

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } \Phi_B}\} \cdot \overset{\times}{B} \cdot \{\sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)} \cdot R_W\} = D\{\overset{\times}{B}\}, \quad (311)$$

$$\{R'_W \cdot \sqrt{\text{Def } (-\Phi_B)}\} \cdot \overset{\times}{B}' \cdot \{\sqrt{\text{Def } \Phi_B} \cdot R_W\} = D\{\overset{\times}{B}'\}. \quad (312)$$

## 4.5.12. Элементарные тензорные сферические тригонометрические функции

В евклидовом или в квазиевклидовом пространстве выделим группу централизованных непрерывных движений. Такого рода движения известны как *однородные*. В данном случае они задаются сферическими ротационными матрицами. Как было показано ранее - см. формулы (245), (246), такие движения для точечных элементов, векторов, прямых и гиперплоскостей в декартовом базисе задаются однозначно сферической ротационной матрицей с единственной тригонометрической  $2 \times 2$ -клеткой. Подобного вида тригонометрические матрицы-функции в дальнейшем именуется как *элементарные*. Они обозначаются с малой буквы, например ротационные функции как  $\text{rot } \Phi$ ,  $\text{rot } \Theta$ . В частности, элементарные матрицы могут применяться для описания специальных ротаций в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  - с реперной осью  $\langle x_{n+1} \rangle$  (с реперной гиперплоскостью) для отсчёта скалярного значения угла ротации  $\varphi$ . Эти матрицы имеют специальную каноническую структуру в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$ :

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$



$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$-(1 - \cos \varphi) \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \cos \varphi) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\mp \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \sin \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\cos \varphi$

} (313)

$$\{\text{rot}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} - (1 - \cos \varphi) \cdot \{e_\alpha \cdot e_\alpha'\}$ $(e_\alpha \cdot e_\alpha' = e_\alpha' \cdot e_\alpha)$	$\mp \sin \varphi \cdot e_\alpha$
$\pm \sin \varphi \cdot e_\alpha'$	$\cos \varphi$

} (314)

Координаты матриц даны, как всегда, в правом декартовом базисе  $\vec{E}_1$ . Прямая *ориентированная* линия  $\langle x_{n+1} \rangle$  есть реперная (полярная) ось координат, от которой отсчитывается положительный для  $\text{rot } \Phi$  скалярный угол ротации  $\varphi$  с направляющими косинусами  $\cos \alpha_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ), выраженными в ортогонально дополнительном к реперной оси декартовом суббазисе с координатами  $x_k$ .

Сначала докажем формулу (313). Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат  $\langle x_1' \rangle$  и вектор направляющих косинусов тензорного угла  $\Phi$ , лежащий в плоскости двумерного суббазиса, а именно  $e_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix}$  (где  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 = 1$ ), стали коллинеарны, а в итоге  $\langle x_3 \rangle, e_\alpha, \langle x_1' \rangle$  стали компланарны. Для этой сферической ротации используем другой тензорный угол  $\beta_{12}$ . Отметим, что при  $n = 2$  его скалярный собственный угол  $\beta_{12}$  совпадает с углом  $\alpha_1$ . Поэтому искомое ротационное преобразование в данном случае имеет вид:

$$\text{rot } \beta_{12}$$

$\cos \alpha_1$	$-\sin \alpha_1$	0
$\sin \alpha_1$	$\cos \alpha_1$	0
0	0	1

Далее в новом трёхмерном декартовом базисе  $\vec{E}$  применяем обычную двумерную каноническую форму для данной *элементарной* ротации, действующей именно в плоскости

$\langle x_1', x_3 \rangle$ , но с учётом того, что отсчёт угла выполняется от оси  $\langle x_3 \rangle$  по часовой стрелке, а по отношению к оси  $\langle x_1' \rangle$  — против часовой стрелки:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$$

$\cos \varphi$	$0$	$-\sin \varphi$
$0$	$1$	$0$
$\sin \varphi$	$0$	$\cos \varphi$

Затем возвращаемся в исходный трёхмерный базис  $\mathbf{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_3 = \text{rot } \beta_{12} \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot } \beta_{12}' \tag{315}$$

Нетрудно убедиться, что в итоге после этих операций получаем вышеуказанную формулу (313).

Для вывода общей формулы (314) используем аналогичную схему. Применим такое ротационное преобразование дополнительного декартова суббазиса, чтобы новая 1-я ось координат, вектор направляющих косинусов

$\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  (где  $\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1$ ) и реперная ось  $\langle x_{n+1} \rangle$  стали

компланарны. Для этого используем *последовательно* другие тензорные углы сферических координат радиус-вектора угла ротации:  $\beta_{12}$  в плоскости  $\langle x_1, x_2 \rangle$ ;  $\beta_{1'3}$  в плоскости  $\langle x_1', x_3 \rangle$ ;  $\beta_{1''\dots}$   $\beta_n$ , в плоскости  $\langle x_1''\dots', x_n \rangle$ . Причём из тригонометрических соображений имеем:

$$\begin{aligned} \cos \beta_{12} &= \cos \alpha_1 / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2}, \\ \cos \beta_{1'3} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2} / \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3}, \\ &\dots\dots\dots \\ \cos \beta_{1''\dots n} &= \sqrt{\cos^2 \alpha_1 + \dots + \cos^2 \alpha_{n-1}} = \sin \alpha_n. \end{aligned} \tag{316}$$

Последовательные ротации осуществляют матрицы  $\text{rot } \beta_{12}, \text{rot } \beta_{1'3}, \dots$ :

$$\text{rot } \beta_{12}$$

$\cos \beta_{12}$	$-\sin \beta_{12}$	$Z$
$\sin \beta_{12}$	$\cos \beta_{12}$	
$Z'$		$I_{n-1}$

$$\text{rot } \beta_{13}$$

$\cos \beta_{13}$	0	$-\sin \beta_{13}$	$Z$
0	1	0	
$\sin \beta_{13}$	0	$\cos \beta_{13}$	$Z'$
$Z'$			

В итоге приходим к базису простейшей  $2 \times 2$  клеточной формы элементарной ротации:

$$\tilde{E} = \text{rot } \beta \cdot \tilde{E}_1, \tag{317}$$

где  $\text{rot } \beta = \text{rot } \beta_{12} \cdot \text{rot } \beta_{13} \cdot \dots \cdot \text{rot } \beta_1$ . Теперь уже в этом декартовом базисе  $\tilde{E}$  придаём двумерную каноническую форму данной элементарной ротации в плоскости  $(x_1', \dots, x_{n+1}')$ :

$$\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$$

$\cos \varphi$	$\theta'$	$-\sin \varphi$
$\theta$	$I_{n-1}$	$\theta$
$\sin \varphi$	$\theta'$	$\cos \varphi$

Затем возвращаемся в исходный базис  $\tilde{E}_1$ , осуществляя обратную ротацию:

$$\{\text{rot } \Phi\}_{(n-1) \dots (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \tag{318}$$

После этих операций с учётом соотношений (316) получаем формулу (314). Это нетрудно проверить прямым вычислением. Аналогично, для отрицательного угла элементарной ротации (как угла в той же тригонометрической плоскости) имеем:

$$\{\text{rot } (-\Phi)\}_{(n-1) \dots (n+1)} = \text{rot } \beta \cdot \{\text{rot } (-\Phi)\}_{\text{can}} \cdot \text{rot}' \beta. \tag{319}$$

Если изучается движение точечного элемента, вектора, прямой или гиперплоскости вне связи с другими элементами, то активные и пассивные модальные преобразования информативно полно задаются с использованием только элементарных ротационных матриц. Переход к другим, элементарно связанным (с исходным) декартовым базисам осуществляется в обоих базисах (317) соответственно как

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_2 &= \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1, \\ \tilde{\mathbf{E}}_{II} &= \{ \text{rot } \Phi_{12} \}_{\text{can}} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \right\} \quad (320)$$

При этом координаты указанных геометрических объектов преобразуются пассивно, как для тензоров валентности 1:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(2)} &= \text{rot } (-\Phi_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \\ \mathbf{u}^{(II)} &= \{ \text{rot } (-\Phi_{12}) \}_{\text{can}} \cdot \mathbf{u}^{(1)} \end{aligned} \right\} \\ (\mathbf{u}^{(I)} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(II)} = \text{rot } (-\beta) \cdot \mathbf{u}^{(2)}) \quad (321)$$

Таким образом, сформулированы основные положения тензорной тригонометрии в евклидовой и квазиевклидовой версии. Евклидова тензорная тригонометрия может рассматриваться как общий случай, когда формально допустимо применение любого срединного рефлектора угла из их полного множества, отвечающего пространству данной размерности. На ряде примеров был продемонстрирован ряд возможностей, которые открывает тензорная тригонометрия для применения в линейной алгебре и аналитической геометрии.

## 4.6. Тензорная псевдоевклидова тригонометрия

### 4.6.1. Гиперболические тензорные тригонометрические функции и рефлекторы

Модальное преобразование (271) порождает псевдогиперболические углы и функции из исходных сферических. Угол  $\{\Phi\}$  имеет гиперболический характер. Псевдогиперболическая геометрия именно во внешнем - тензорном варианте реализуется в комплексном бинарном (вещественно-мнимом) *особом* псевдоевклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle$  со структурой, задаваемой срединным рефлектором угла или общее — тригонометрическим рефлектор-тензором. Например, из (271) имеем:  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S = \tilde{\mathbf{E}}_0'^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_0^{-1}$ . Скалярное произведение в данном

пространстве тождественно такому в исходном евклидовом пространстве:

$$\mathbf{z}' \cdot \{\sqrt{\Gamma}\}_S \cdot \mathbf{z} = (\tilde{E}_0^{-1} \mathbf{z})' \cdot (\tilde{E}_0^{-1} \cdot \mathbf{z}) \equiv \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}.$$

Само по себе особое комплексное псевдоевклидово пространство не представляет интереса. Однако в нём весьма просто осуществляется переход от сферических понятий к гиперболическим. Обратный переход осуществляется в комплексном бинарном квазиевклидовом пространстве. При этом используются псевдоаналоги углов:

$$\Phi \rightarrow -i\Phi \rightarrow \Gamma \quad (\varphi_j \rightarrow -i\varphi_j \rightarrow \gamma_j), \tag{322}$$

$$\Gamma \rightarrow i\Gamma \rightarrow \Phi \quad (\gamma_j \rightarrow i\gamma_j \rightarrow \varphi_j) \tag{323}$$

Указанное соответствие определяется здесь как *сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного типа*. Углы-аналоги при этой замене имеют абстрактный смысл (но при сохранении бинарной тензорной структуры). Далее углы могут использоваться конкретно. В частности, применив к (295), (297) или более широко к (277)—(286) абстрактную аналогию по схеме (322), получаем гиперболические аналоги в *вещественном* псевдоевклидовом пространстве с тем же рефлектор-тензором  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S$ , в том числе в канонической форме в тригонометрическом базисе диагонального косинуса.

$$\mathbf{R}_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma_j & \text{sh } \gamma_j \\ \hline \text{sh } \gamma_j & \text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot \mathbf{R}'_w = \text{ch } \Gamma + \text{sh } \Gamma = \text{Roth } \Gamma = \text{Roth}' \Gamma = \exp \Gamma, \tag{324}$$

$$\text{ch } \Gamma - \text{sh } \Gamma = \text{Roth}^{-1} \Gamma = \text{Roth} (-\Gamma) = \exp (-\Gamma). \tag{325}$$

Это гиперболическая ротационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$\mathbf{R}_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{sch } \gamma_j & -\text{th } \gamma_j \\ \hline \text{th } \gamma_j & \text{sch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot \mathbf{R}'_w = \text{sch } \Gamma - i \cdot \text{th } \Gamma = \text{Defh } \Gamma, \tag{326}$$

$$\text{sch } \Gamma - i \cdot \text{th } \Gamma = \text{Defh}^{-1} \Gamma = \text{Defh} (-\Gamma) = \text{Defh}' \Gamma. \tag{327}$$

Это гиперболическая деформационная матрица-функция моторного угла  $\Gamma$  или  $(-\Gamma)$ .

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline + \operatorname{ch} \gamma_j & \pm \operatorname{sh} \gamma_j \\ \hline \mp \operatorname{sh} \gamma_j & - \operatorname{ch} \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \operatorname{ch} \check{\Gamma} \mp i \cdot \operatorname{sh} \check{\Gamma}. \tag{328}$$

Это гиперболически ортогональный рефлектор по отношению к тензору  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S$ .

$$R_w \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \mp \operatorname{sch} \gamma_j & \mp \operatorname{th} \gamma_j \\ \hline \mp \operatorname{th} \gamma_j & - \operatorname{sch} \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot R'_w = \operatorname{sch} \check{\Gamma} \mp \operatorname{th} \check{\Gamma}. \tag{329}$$

Это гиперболически косогональный рефлектор по отношению к тензору  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S$ . (В этих определяющих формулах  $\check{\Gamma}$  -

гиперболический проективный угол,  $\Gamma$  - гиперболический моторный угол.)

В *псевдоевклидовой* тригонометрии срединный рефлектор с максимальным тригонометрическим рангом угла задаёт не только тригонометрический базис, но и рефлектор-тензор *ориентированного псевдоевклидова пространства*  $\langle P^{n \times q} \rangle$ :

$$\operatorname{Ref} \{ \operatorname{ch} \check{\Gamma} \}^{\oplus} = \{ \sqrt{\Gamma} \}_S = R_w \cdot I^{\oplus} \cdot R'_w \quad (\tau = \tau_{\max} = q).$$

Ему же отвечает некоторое собственное подмножество нуль-простых матриц  $\langle \operatorname{Bp} \rangle$ . Применяя принцип бинарности с учётом (271) и (324), получаем аннигилирующее соотношение - аналог такого для сферической ортогональной матрицы:

$$\operatorname{Roth} \Gamma \cdot \{ \sqrt{\Gamma} \}_S \cdot \operatorname{Roth} \Gamma = \{ \sqrt{\Gamma} \}_S. \tag{330}$$

В свою очередь, модальное преобразование, обратное (271), производит псевдосферические углы и функции из гиперболических. Тензорный угол  $\{i\Gamma\}$  имеет сферический характер. Псевдосферическая тригонометрия в тензорном варианте реализуется в комплексном квазиевклидовом пространстве с бинарной структурой, согласно (271). Скалярное

произведение в данном пространстве тождественно таковому в исходном псевдоевклидовом пространстве:

$$\mathbf{z}' \cdot \mathbf{z} = (\tilde{\mathbf{E}}_0^{-1} \mathbf{x})' \cdot (\tilde{\mathbf{E}}_0^{-1} \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}' \cdot \{\sqrt{\Gamma}\}_S \cdot \mathbf{x}.$$

Такого вида пространство обычно применяют как комплексный квазиевклидов аналог вещественному псевдоевклидову пространству. (Впервые оно было введено Пуанкаре в 1905г. как метрическое пространство с группой преобразований Лоренца.) Далее, применив к псевдосферическим понятиям абстрактную аналогию по схеме (323), получаем первичные сферические аналоги в вещественном евклидовом пространстве. Это приводится, конечно, только для завершения в целом картины абстрактной аналогии, так как в итоге круг преобразований замкнулся.

С применением абстрактной сферическо-гиперболической аналогии получаем формулы связи проективных и моторных углов и их функций через срединный рефлектор (268)-(270). Например, имеем:

$$-i\tilde{\Gamma}_{12} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\}^{\oplus} = \Gamma_{12} \equiv + \text{Ref}\{\text{ch } \tilde{\Gamma}_{12}\}^{\ominus} \cdot i\tilde{\Gamma}_{12}.$$

Для описания сферических и гиперболических преобразований на какой-либо собственной плоскости/псевдоплоскости (по клеточно) далее используется общая тригонометрическая диаграмма. Тут изначально нет какой-либо связи между вещественными сферическими и гиперболическими углами, что характерно для абстрактной аналогии. Для того чтобы в исходном декартовом базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  установить отношение изоморфизма между сферическими и гиперболическими тригонометрическими функциями, нужно задать какую-либо однозначную взаимосвязь углов-аргументов.

### **4.6.2. Сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа**

Обратим внимание на то, что множества значений сферических и гиперболических синусов и тангенсов скалярных углов тождественны:

$$\sin \varphi \equiv \text{th } \gamma, \quad \text{tg } \varphi \equiv \text{sh } \gamma.$$

(331)

Отсюда между углами-аргументами устанавливается взаимосвязь.

$$\gamma = \gamma(\varphi) = \operatorname{Arth}(\sin \varphi) = \operatorname{Arsh}(\operatorname{tg} \varphi) = \ln(\sec \varphi + \operatorname{tg} \varphi),$$

$$\varphi = \varphi(\gamma) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} \gamma) = \operatorname{arcsin}(\operatorname{th} \gamma) = \ln(\operatorname{sch} \gamma + i \cdot \operatorname{th} \gamma) \cdot (-i).$$

Согласно тригонометрической диаграмме (рис. 3), главные значения сферических углов, как и ранее, берутся в интервале  $\varphi = -\pi/2 \div +\pi/2$ . При этом значения сферического косинуса и секанса для них неотрицательны. Поэтому тождества (331) можно дополнить ещё двумя аналогами:

$$\cos \varphi \equiv \operatorname{sch} \gamma \geq 0, \quad \sec \varphi \equiv \operatorname{ch} \gamma \geq 0. \tag{332}$$

При тригонометрических преобразованиях планаров и двухвалентных тензоров вполне достаточно использовать вышеуказанный интервал для собственных сферических углов. На тождествах (331) базируется *сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа*. Она же есть *синус-тангенсная аналогия*. В её тензорном варианте, или с тождествами по бинарным клеткам, эта аналогия представляется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi &\equiv \operatorname{th} \Gamma, & \operatorname{tg} \Phi &\equiv \operatorname{sh} \Gamma. \\ \cos \Phi &\equiv \operatorname{sch} \Gamma, & \sec \Phi &\equiv \operatorname{ch} \Gamma \end{aligned} \right\} \\ (\varphi_i = -\pi/2 \div +\pi/2, \quad \gamma_i = -\infty \div +\infty). \tag{333}$$

Далее в исходном единичном базисе  $\tilde{E}_1$  она распространяется на все типы тригонометрических матриц-функций:

$$\operatorname{Def} \Phi \equiv \operatorname{Roth} \Gamma, \tag{334}$$

$$\operatorname{Rot} \Phi \equiv \operatorname{Defh} \Gamma. \tag{335}$$

Отсюда следует функциональная связь обоих углов моторного типа:

$$\Gamma = \Gamma(\Phi) = \ln \operatorname{Def} \Phi, \quad i\Phi = i\Phi(\Gamma) = \ln \operatorname{Defh} \Gamma. \tag{336}$$

Характеристические рефлекторы (178), (179), (211), (212) в том же варианте принимают вид:

$$\operatorname{Ref} \{BB'\} = \operatorname{sch} \tilde{\Gamma}_B - \operatorname{th} \tilde{\Gamma}_B, \tag{337}$$



$$\text{Ref } \{B'B\} = \text{sch } \tilde{\Gamma}_B + \text{th } \tilde{\Gamma}_B, \tag{338}$$

$$\text{Ref } \{B\} = \text{ch } \tilde{\Gamma}_B - i \text{sh } \tilde{\Gamma}_B, \tag{339}$$

$$\text{Ref } \{B'\} = \text{ch } \tilde{\Gamma}_B - i \text{sh } \tilde{\Gamma}_B. \tag{340}$$

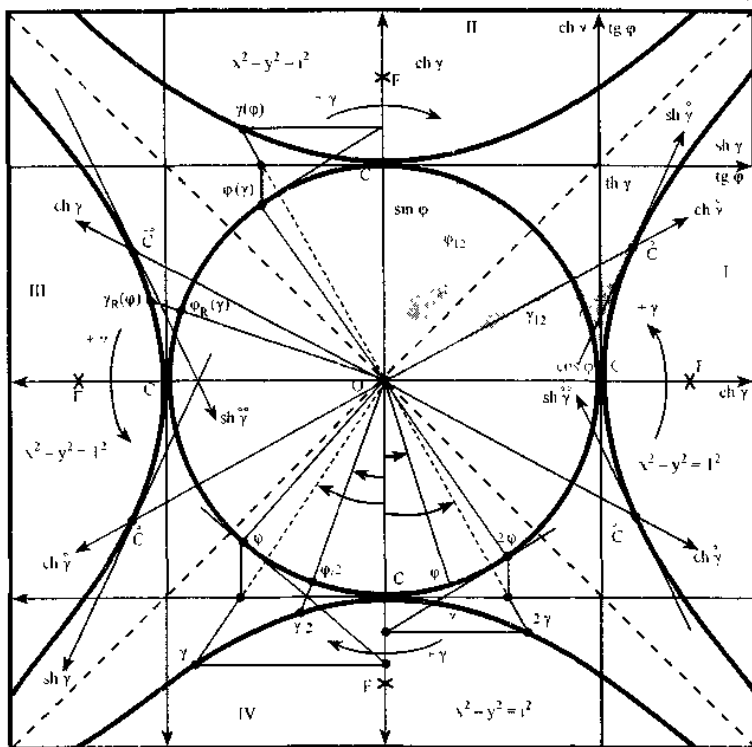


Рис. 3. Тригонометрическая диаграмма на плоскости/псевдоплоскости в правом универсальном базисе и сферическо-гиперболическая аналогия:  $\varphi$  — сферический угол,  $\gamma$  - гиперболический угол; I, II, III и IV суть 1-й, 2-й, 3-й и 4-й гиперболические квадранты для отображения скалярных гиперболических углов на псевдоплоскости;

$\tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma}'$  - положительный и отрицательный углы гиперболической ротации в универсальном базисе, определяемые парой вещественных гипербол, как примеры в 1-м и 3-м квадрантах;  
 $\varphi(\gamma)$  и  $\gamma(\varphi)$  - примеры сферическо-гиперболической аналогии синус-тангенсного типа (во 2-м квадранте);  
 $\varphi_R(\gamma)$  и  $\gamma_R(\varphi)$  - примеры сферическо-гиперболической аналогии тангенс-тангенсного типа (в 3-м квадранте);  
 в 4-м квадранте даны примеры бисекции (слева) и удвоения (справа) гиперболического угла в универсальном базисе с использованием вышеуказанных аналогий.

С использованием сферическо-гиперболической аналогии обоих типов моторные матрицы-функции преобразуются друг в друга по нижеуказанному *квартовому кругу*:

$$\begin{array}{ccc} \text{Rot}(i\Gamma) \equiv \text{Defh}(-i\Phi) & \leftrightarrow & \text{Roth } \Gamma \equiv \text{Def } \Phi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rot } \Phi \equiv \text{Defh } \Gamma & \leftrightarrow & \text{Roth}(-i\Phi) \equiv \text{Def}(i\Gamma). \end{array} \quad (341)$$

Для тригонометрически согласованных гиперболических ротационных матриц и ортогональных рефлекторов действуют Правила №2 и №3. Для скалярных тригонометрических функций правила выполняются автоматически, так как у них  $n = 2$ . В частности, имеем:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^m (\sec \varphi_i \pm \text{tg } \varphi_i)^{h_i} &\equiv \prod_{i=1}^m (\text{ch } \gamma_i \pm \text{sh } \gamma_i)^{h_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^m \pm h_i \gamma_i\right) = \exp \gamma = \\ &= \text{ch } \gamma + \text{sh } \gamma \equiv \sec \varphi + \text{tg } \varphi \\ &(-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2). \end{aligned}$$

Синус-тангенсная аналогия позволяет придать гиперболически ортогональную форму ранее рассмотренным собственным *аффинным* проекторам, квазиобратной матрице и рефлекторам, получая те же соотношения, что и для сферических прототипов, но в гиперболическом варианте, а именно:

$$\text{Ref}\{B'\} \cdot \text{Ref}\{B\} = (\text{ch } \tilde{\Gamma}_B - \text{sh } \tilde{\Gamma}_B) \cdot (\text{ch } \tilde{\Gamma}_B - \text{sh } \tilde{\Gamma}_B) = \text{Roth } 2\Gamma_B. \quad (342)$$

То есть двукратная рефлексия типа  $\{(\sqrt{\Gamma})_h', (\sqrt{\Gamma})_h\}$ , где  $(\sqrt{\Gamma})_h \neq (\sqrt{\Gamma})_h'$  - простой несимметричный корень, есть гиперболическая ротация по аналогии с (245):

$$\text{Roth} (\pm \Gamma_B) = \{(\text{ch } \hat{\Gamma}_B \pm i \cdot \text{sh } \hat{\Gamma}_B) \cdot (\text{ch } \hat{\Gamma}_B \mp i \cdot \text{sh } \hat{\Gamma}_B)\}^{1/2}. \quad (343)$$

Здесь из матрицы в квадратных скобках извлекается арифметический корень и он же в данном случае гиперболический *тригонометрический* корень, аналогичный сферическому. Для пары неориентированных векторов или планаров ранга 1 при условии  $\mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$  однозначно вычисляется собственная *элементарная* ротационная матрица ( $\tau = 1$ ):

$$\begin{aligned} \text{Roth } \Gamma_{12} &= \{(I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}') \cdot (I - 2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}')\}^{1/2} = \\ &= \left[ I - 2 \cdot \left( \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_1} - \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2} \right) + 4 \text{ch}^2 \gamma_{12} \cdot \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (344)$$

где  $\overleftarrow{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}' = \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1'}{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_2}$ ,  $\overleftarrow{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}' = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'}{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_1}$ , в том числе  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_2$ .

С использованием формулы взаимосвязи углов (336) вычисляется тензорный *сферический* угол  $\alpha_n$  в соотношении (288):

$$\left. \begin{aligned} \text{Def } \Phi_B &\equiv \text{Roth } \Gamma_B, \\ \text{Def } \alpha_B &\equiv \text{Roth } 2\Gamma_B, \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha_B = -i \cdot \ln \{ \text{Defh } [2 \ln (\text{Def } \Phi_B)] \}.$$

Согласно синус-тангенсной аналогии, срединный рефлектор тензорного угла выражается в 4-х тождественных вариантах:

$$\text{Ref } \{\cos \Phi\}^{\oplus} = \text{Ref } \{\sec \Phi\}^{\ominus} \equiv \text{Ref } \{\text{ch } \hat{\Gamma}\}^{\oplus} = \text{Ref } \{\text{sch } \hat{\Gamma}\}^{\oplus}. \quad (345)$$

Умножая матрицы в квартовом круге (341) справа на срединный рефлектор, переходим к квартовому кругу для рефлекторов. Повторив эту операцию, возвращаемся к исходному моторному варианту. Также нетрудно получить формулы-аналоги (336) для взаимосвязи между проективными углами. Изначально проективные гиперболические углы и функции можно определить по формулам проективной евклидовой тригонометрии, но с использованием синус-тангенсной аналогии. Применяя её же к модальным преобразованиям (303), (304), получаем соотношения, родственные (252), (302):

$$\text{Ref}\{B'\} = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B) = \text{Ref}\{\text{ch } \hat{\Gamma}_B\}^{\oplus} \cdot \text{Ref}\{B\} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \hat{\Gamma}_B\}^{\oplus}, \quad (346)$$

$$\overset{\oplus}{B}' = \text{Roth } \Gamma_B \cdot \overset{\oplus}{B} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B) = \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} \cdot \overset{\oplus}{B} \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\}. \quad (347)$$

На множестве ротационных модальных матриц  $\langle \Gamma_B \rangle$ , выполняющих операции типа (346), (347), матрица  $\text{Roth } \Gamma_B$ , получаемая однозначно из (343), имеет тригонометрическое подпространство *минимальной* размерности. Теперь стало возможным также вычислить ротационный вариант модальной матрицы для приведения собственных аффинных проекторов к диагональной форме, то есть развивая дальше (311), (312):

$$\begin{aligned} R_w' \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot \overset{\oplus}{B} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B / 2) \cdot R_w &= D\{\overset{\oplus}{B}\}, \\ R_w' \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B / 2) \cdot \overset{\oplus}{B}' \cdot \text{Roth } \Gamma_B / 2 \cdot R_w &= D\{\overset{\oplus}{B}'\}. \end{aligned} \quad (348)$$

Точно также, как в тензорной евклидовой тригонометрии - см. формулы (249), (251), - здесь соотношения (346), (347) имеют место для общих ротационных матриц из множества  $\langle \Gamma_B \rangle \equiv \langle \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Rot } \Theta_B \rangle$

с учётом транспонирования. Причём  $\Theta_B$  - сферический угол ортогональной ротации по отношению к  $\Gamma_B$ , или *ортосферический угол*. Для этих тензорных углов и только для них выполняются соотношения:

$$\left| \begin{aligned} \text{Roth } \Gamma_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} \cdot \text{Roth } \Gamma_B &= \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} = \text{Roth}(-\Gamma_B) \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} \cdot \text{Roth}(-\Gamma_B), \\ \text{Rot}' \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} \cdot \text{Rot } \Theta_B &= \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} = \text{Rot } \Theta_B \cdot \text{Ref}\{\text{ch } \overset{\oplus}{\Gamma}_B\} \cdot \text{Rot}' \Theta_B. \end{aligned} \right. \quad (349)$$

Соотношения (349) лежат в основе как ротационной *псевдоевклидовой тригонометрии* с вышеуказанным срединным рефлектором в качестве вводимого независимо рефлектор-тензора, так и *внешней гиперболической геометрии*. Последняя по существу есть *общая геометрия постоянной отрицательной кривизны (с гиперболической тригонометрией в ней)*. Эта геометрия реализуется на специальных гиперблоидах, вложенных в псевдоевклидово пространство, задаваемое рефлектор-тензором и псевдоевклидовой метрикой.

### 4.6.3. Фундаментальный рефлектор-тензор в квазиевклидовой и псевдоевклидовой интерпретации

Применению гиперболических и сферических матриц в тензорной тригонометрии и в теории собственных проекторов нужно дать надлежащее обоснование, имея ввиду используемые метрические пространства и допустимые в них преобразования базисов. Выберем в исходном арифметическом (аффинном) пространстве координатный базис с единичной матрицей вектор-столбцов  $\check{E}_1 = \{I\}$ . Далее вводим в этом пространстве *совершенно независимым образом* рефлектор-тензор

$\text{Ref} \equiv \{\sqrt{I}\}_S$ , который придаёт ему, в частности, определённую ориентацию. Во-первых, в этом пространстве как исходно аффинном допускается операция параллельного переноса, в том числе базиса. Во-вторых, определим в  $\check{E}_1$  ротационные преобразования 3-х типов:

$$\langle \text{Rot } \Phi \rangle: \text{Rot } \Phi \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Phi = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot}(-\Phi) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot}(-\Phi)$$

- основные сферические ротации,

$$\langle \text{Roth } \Gamma \rangle: \text{Roth } \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth } \Gamma = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Roth}(-\Gamma) \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth}(-\Gamma)$$

- гиперболические ротации,

$$\langle \text{Rot } \Theta \rangle: \text{Rot } \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Theta = \{\sqrt{I}\}_S = \text{Rot } \Theta \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Rot } \Theta$$

— ортогональные сферические ротации (по отношению к предыдущим двум).

*Квазиевклидово пространство*  $\langle Q^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется евклидовой квадратичной метрикой и рефлектор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S$ , задающим допустимые преобразования, в том числе базиса, вида:

$$\check{E} = \text{Rot } \Phi \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \check{E}_1. \tag{350}$$

Это суть *ротационно связанные квазидекартовы базисы*. Именно в таком пространстве воплощается квазиевклидова тригонометрия в правых квазидекартовых базисах.

Псевдоевклидово пространство  $\langle \mathbb{R}^{n+q} \rangle$  (ориентированное) определяется псевдоевклидовой квадратичной метрикой и рефлектор-тензором  $\{\sqrt{\Gamma}\}_S$  задающим допустимые преобразования, в том числе базиса, вида

$$\tilde{E} = \text{Roth } \Gamma \text{ Rot } \Theta \tilde{E}_1 \tag{351}$$

Это суть *ротационно связанные псевдодекартовы базисы*. Именно в таком пространстве воплощается псевдоевклидова тригонометрия в правых псевдодекартовых базисах

Кроме того, определим *универсальные базисы* (правые)

$$\langle \tilde{E}_{1u} \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \tilde{E}_1 \rangle \equiv \langle \text{Rot } \Theta \rangle \leftrightarrow \begin{cases} \tilde{E}'_{1u} \tilde{E}_{1u} = I, \\ \tilde{E}'_{1u} \{\sqrt{\Gamma}\}_S \tilde{E}_{1u} = \{\sqrt{\Gamma}\}_S \end{cases} \quad (\det \tilde{E}_{1u} = +1) \tag{352}$$

В частности, сюда входит исходный единичный базис  $\tilde{E}_1 = \{I\}$ , то есть простейший по форме. Универсальные базисы принадлежат пересечению множеств ротационно связанных базисов обоих вышеуказанных типов. Благодаря этому в них реализуется совместно квазиевклидова и псевдоевклидова тригонометрия, а, следовательно, и сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа. (Например, в теории относительности в универсальных базисах описывается движение с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя)

Пусть  $B$  - нуль-простая матрица какого-то линейного преобразования в  $\langle \mathbb{R}^n \rangle$ . Введем рефлектор-тензор равный срединному рефлектору ее характеристического тензорного угла, с переходом при этом в ориентированное псевдоевклидово пространство

$$\{\sqrt{\Gamma}\}_S = \text{Ref } \{\cos \tilde{\Phi}_B\}^{\oplus} \equiv \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\oplus} \tag{353}$$

В любом универсальном базисе в том числе в  $\{I\}$ , проекторы  $\overleftarrow{B}B'$  и  $\overrightarrow{B}B'$  сферически ортогональны друг к другу, то есть  $\overleftarrow{B}B' \mid \overrightarrow{B}B' = Z$ , а проекторы  $\overleftarrow{B}$  и  $\overrightarrow{B}$  гиперболически ортогональны друг к другу с учетом (347), то есть

$$(\overleftarrow{B})' \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\oplus} \overrightarrow{B} = \text{Ref } \{\text{ch } \tilde{\Gamma}_B\}^{\oplus} \overleftarrow{B} \overrightarrow{B} = Z$$

Соответственно  $V$  - есть гиперболически ортогональная квази-обратная матрица. Подпространства  $\langle \text{im } V \rangle$  и  $\langle \text{ker } V \rangle$  образуют гиперболически ортогональную прямую сумму тогда и только тогда, когда  $V$  нуль-простая. Для проекторов  $\overleftarrow{V}$  и  $\overrightarrow{V}$  собственные векторы или подпространства, относящиеся к различным собственным значениям («+1» и «0»), гиперболически ортогональны. Эквианговые проекторы  $\overleftarrow{V}$  и  $\overrightarrow{V}$  ( $\overleftarrow{V}$  и  $\overrightarrow{V}$ ) и связанные с ними планары преобразуются друг в друга гиперболической ротацией (347) как гиперболически ортогональные тензоры и тензорные объекты валентности 2. Проектор  $\overleftarrow{V}$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \text{im } V \rangle$ , а проектор  $\overrightarrow{V}$  проецирует гиперболически ортогонально на  $\langle \text{ker } V \rangle$ . Сферически и гиперболически ортогональные собственные проекторы принадлежат своим подмножествам множества идемпотентных матриц. Здесь  $\overleftrightarrow{VV'}$  - симметричные, а  $\overleftarrow{V}$  - несимметричные идемпотентные матрицы. Соответствующую гиперболическую трансформацию претерпевают проективные формулы (186) - (197). В символическом октаэдре (рис. 1), проведя диагональ  $RS$ , с учётом (347) имеем два псевдоравнобедренных тензорных треугольника  $RZS$  и  $RIS$  с равными гиперболическими углами  $\angle RZS \equiv \angle RIS \equiv \Gamma_B$ .

Для гиперболически ортогональной ротационной матрицы имеют место аналоги формул Муавра и Эйлера:

$$\text{Roth}^m \Gamma = \text{ch } \{m\Gamma\} + \text{sh } \{m\Gamma\} = \exp \{m\Gamma\} = \text{Roth} \{m\Gamma\}.$$

Её свойства, безотносительно к углу ротации, те же, что у деформационной сферической матрицы. Она симметрична и положительно определена:

$$\mu_{2i} = \text{ch } \gamma_i + \text{sh } \gamma_i > 0, \quad \mu_{2i-1} = \mu_{2i}^{-1} = \text{ch } \gamma_i - \text{sh } \gamma_i > 0$$

и, возможно,  $\mu_k = +1$ . Любое положительное число и мультипликативно обратное ему взаимно-однозначно представляются через скалярный гиперболический угол, в том числе в форме  $2 \times 2$ -матрицы.

Естественное обобщение бинарной гиперболической ротационной матрицы есть положительно определённая симметричная матрица с единичным детерминантом. В

тригонометрическом базисе она разбивается на единичный блок и специальные симметричные клетки с единичными детерминантами В базисе диагональной формы она представляется как  $S^{\oplus} = \exp \{\gamma_{ii}\}$ , где по клеткам  $\sum \gamma_{ii} = 0$ . Согласно полярному разложению, приведённое модальное преобразование V без рефлексий *двухвалентных тензоров* представляется произведением сферической и обобщённой гиперболической ротационных матриц при одной и той же ориентации базиса, то есть  $\det V > 0$ . В псевдоевклидовой геометрии, как и в евклидовой, применяются матрицы только *бинарной* тригонометрической структуры.

В случае *ориентированного* псевдоевклидова пространства для приведения Roth  $\Gamma$  к W-форме используется матрица  $R_W$ , выходящая из множества матриц, согласованных с рефлктор-тензором  $\{\sqrt{I}\}_S \in \langle W \rangle$ . Но заметим, что некотсояя модальная матрица  $R_W$  приводит совместно Roth  $\Gamma$  к W-форме и  $\{\sqrt{I}\}_S$  к D-форме:

$$R_W' \cdot (R_W' \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot R_W) \cdot (R_W' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot R_W) \cdot R_W' =$$

$$= R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma_j & \text{sh } \gamma_j \\ \hline \text{sh } \gamma_j & \text{ch } \gamma_j \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \{I^{\oplus}\} \\ \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array} \cdot R_W'$$

так как, согласно (330),  
 $\text{Roth } \Gamma \cdot \{\sqrt{I}\}_S = \{\sqrt{I}\}_S \cdot \text{Roth } (-\Gamma)$   
 и действует Правило № 3.

### 4.6.4. Скалярная тригонометрия на псевдоплоскости

*Диагональный* рефлктор-тензор  $\{I^{\oplus}\}$  (см выше) отвечает *неориентированному* пространству, бинарная структура которого согласована с координатными осями. В тригонометрическом базисе гиперболическая ротационная матрица Roth  $\Gamma$  имеет каноническую W-форму (324). С другой



стороны, для  $i$ -й  $2 \times 2$ -клетки две асимптоты квадрогоиперболы, или главная и побочная диагонали тригонометрического базиса на  $i$ -й псевдоплоскости (рис. 3) задают две координатные оси её же диагональной формы. Ввиду согласованности рефлектор-тензора с ротационными матрицами эти две асимптоты с квадрогоиперболой остаются на месте при гиперболическом ротационном преобразовании соответствующей им псевдоплоскости. В исходном псевдоевклидовом пространстве размерности более двух этим геометрическим объектам, как известно, отвечают изотропный конус (асимптотическое плоское подпространство) и вложенные в него полостные гиперboloиды. На какой-либо  $i$ -й псевдоплоскости данного пространства, пересекающей гиперboloиды по квадрогоиперболе (рис. 3), осуществляется чисто гиперболическая ротация, соответствующая  $i$ -й  $2 \times 2$ -клетке Roth Г.

Отсчёт значений скалярных собственных углов  $\gamma_i$  выполняется во всех гиперболических квадрантах в направлении к главной диагонали. Гиперболический угол  $\gamma$ , как известно, измеряется либо псевдоевклидовой длиной дуги гиперболы, либо удвоенной площадью гиперболического сектора на псевдоплоскости (при  $\hat{R} = 1$ ):

$$\hat{L} = \hat{R} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \sqrt{(d \operatorname{sh} \gamma)^2 - (d \operatorname{ch} \gamma)^2} = \hat{R} (\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$\hat{S} = \hat{R} \cdot \left[ \operatorname{sh} \gamma \operatorname{d} \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \gamma \cdot \operatorname{ch} \gamma / 2 \right]_{\gamma_1}^{\gamma_2} = 1/2 \hat{R} (\gamma_2 - \gamma_1).$$

Здесь единичный радиус-вектор всегда гиперболически ортогонален своей гиперболе в точке касания. В частности, он и касательная задают новые гиперболически связанные оси координат. Фокусу гиперболы соответствует особый скалярный гиперболический угол  $\omega \approx 0,881$  рад;  $\operatorname{sh} \omega = 1$ ,  $\operatorname{ch} \omega = \sqrt{2}$ ,  $\operatorname{th} \omega = \sqrt{2}/2$ . Согласно синус-тангенсной аналогии конкретного типа,  $\varphi(\omega) = \pi/4$ . Например,

$$\sin(\pi/4 \pm i \cdot \omega) = 1 \pm \sqrt{2}/2 \cdot i, \quad \cos(\pi/4 \pm i \cdot \omega) = 1 \mp \sqrt{2}/2 \cdot i.$$

Другой вид сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа в  $\hat{E}_1$  устанавливается через отношение изоморфизма между кажущимся сферическим углом  $\varphi_R$  и гиперболическим углом  $\gamma_R$ , если принять, что они задаются на

плоскости/псевдоплоскости одним и тем же радиус-вектором (рис. 3). Указанная тригонометрическая аналогия определяется исходно через тождество тангенсов

$$\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma \rightarrow \varphi_R \equiv \varphi_R(\gamma) = \arctg \operatorname{th} \gamma \quad (-\pi/4 \leq \varphi_R \leq +\pi/4) \quad (354)$$

Другие функции связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_R &\equiv \operatorname{sh} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, & \cos \varphi_R &\equiv \operatorname{ch} \gamma / \sqrt{\operatorname{ch} 2\gamma}, \\ \operatorname{sh} \gamma_R &\equiv \sin \varphi / \sqrt{\cos 2\varphi}, & \operatorname{ch} \gamma_R &\equiv \cos \varphi / \sqrt{\cos 2\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (355)$$

Данное соответствие определяется как сферическо-гиперболическая *тангенс-тангенсная аналогия*. Например,  $\varphi_R(\omega) \approx 35^\circ$ . В принципе, возможно бесконечное количество вариантов аналогий конкретного типа, но все они сводятся к тождествам вида

$$\operatorname{tg}(k_1 \cdot \varphi/2) \equiv \operatorname{th}(k_2 \cdot \gamma/2) \leftrightarrow \begin{cases} \sin(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{th}(k_2 \gamma), & \operatorname{tg}(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sh}(k_2 \gamma), \\ \cos(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{sch}(k_2 \gamma), & \operatorname{sec}(k_1 \varphi) \equiv \operatorname{ch}(k_2 \gamma). \end{cases} \quad (356)$$

Здесь  $-\pi/4 \leq k_1 \cdot \varphi/2 \leq +\pi/4$ .

Практический интерес представляют 4 варианта:

- 1)  $k_1 = k_2 = 1$  соответствует (331).
- 2)  $k_1 = k_2 = 2$  соответствует (354).
- 3)  $k_1 = 1, k_2 = 2$ .
- 4)  $k_1 = 2, k_2 = 1$ .

Если конкретную аналогию применить в первом и втором вариантах совместно, то чисто геометрически решаются (с помощью циркуля и линейки) задачи удвоения и бисекции гиперболического угла в универсальном базисе (рис. 3)

а)  $\operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma, \varphi_R = \varphi_R(\gamma), \varphi = 2\varphi_R \rightarrow \operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} 2\gamma;$

б)  $\operatorname{tg} \varphi \equiv \operatorname{sh} \gamma, \varphi = \varphi(\gamma), \varphi_R = \varphi/2 \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma/2.$

В этом случае имеет место неравенство

$$|\varphi_R(\gamma)| < |\varphi(\gamma)| < 2 \cdot |\varphi_R(\gamma)|. \quad (357)$$

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &\equiv \operatorname{sch} \gamma, \\ \cos 2\varphi_R &\equiv \operatorname{sch} 2\gamma, \end{aligned} \right\} \rightarrow \cos \varphi > \cos (2\varphi_R);$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &\equiv \operatorname{sh} \gamma, \\ \operatorname{tg} \varphi_R &\equiv \operatorname{th} \gamma, \end{aligned} \right\} \rightarrow |\operatorname{tg} \varphi| > |\operatorname{tg} \varphi_R|.$$

В тензорной тригонометрии представляет особый интерес именно синус-тангенсная аналогия. Она устанавливает непосредственную взаимосвязь в любом универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  между преобразованиями и углами в квартовом круге (341).

С применением синус-тангенсной аналогии устанавливаются тригонометрические формулы для плоского гиперболически прямоугольного треугольника. Последний определяется как треугольник на псевдоплоскости, у которого две стороны-катеты «а» и «b» принадлежат различным собственным подпространствам рефлектор-тензора, то есть с собственными значениями «+1» и «-1». Катеты образуют прямой угол  $\delta = \pm \infty$  (в гиперболической метрике). Против него лежит гипотенуза «g». Если  $|b| > |a|$ , то гипотенуза треугольника находится внутри изотропного конуса и  $g^2 = b^2 - a^2$  (внутренний треугольник). Если  $|a| > |b|$ , то гипотенуза треугольника находится вне изотропного конуса и  $g^2 = a^2 - b^2$  (внешний треугольник). Если  $|a| = |b|$ , то гипотенуза лежит на поверхности изотропного конуса и  $g = 0$ . Против катета с меньшим модулем  $\min \operatorname{mod} \langle a, b \rangle$  лежит угол  $\gamma$ . Против катета с большим модулем  $\max \operatorname{mod} \langle a, b \rangle$  лежит угол  $\lambda$ . (Гипотенуза g в зависимости от её положения относительно изотропного конуса времениподобна или пространствуподобна ) Имеем:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq |\operatorname{cosch} \lambda| &= |\operatorname{sh} \gamma| = 1/g \cdot |\min \operatorname{mod} \langle a, b \rangle| = |\operatorname{tg} \varphi| = |\operatorname{ctg} \xi| \leq +\infty, \\ +1 \leq |\operatorname{cth} \lambda| &= \operatorname{ch} \gamma = 1/g \cdot |\max \operatorname{mod} \langle a, b \rangle| = \sec \varphi = |\operatorname{cosec} \xi| \leq +\infty, \\ -1 \leq \pm \operatorname{sch} \lambda &= \operatorname{th} \gamma = \min \operatorname{mod} \langle a, b \rangle / \max \operatorname{mod} \langle a, b \rangle = \sin \varphi = \pm \cos \xi \leq +1. \end{aligned} \right\} (358)$$

Здесь и далее  $\gamma$  и  $\lambda$  - *основной* и *дополнительный* гиперболические углы. Они не равноценны в отличие от  $\varphi$  и  $\xi$  - основного и дополнительного сферических углов. В прямоугольном треугольнике на плоскости/псевдоплоскости синус-тангенсная аналогия устанавливает взаимнооднозначное соответствие между его тремя углами (в базисе  $\tilde{E}_1$ ):

$$\operatorname{th} \gamma \equiv \sin \varphi \leftrightarrow \{ \gamma \rightarrow \varphi(\gamma), \lambda \rightarrow d = \pi/2, \delta \rightarrow \varphi(\lambda) = \xi \} \quad (359)$$

$$(\gamma \text{ или } \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda \text{ или } \gamma = \pm \infty) \leftrightarrow (\varphi \text{ или } \xi = 0 \leftrightarrow \xi \text{ или } \varphi = \pm \pi/2); \\
 -1 < \text{th}(\gamma + \lambda) = \sin \chi < +1 \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\infty = -\delta < \gamma + \lambda < +\delta = +\infty \\ -\pi/2 = -d < \chi < +d = +\pi/2 \end{array} \right\} \quad (360)$$

### 4.6.5. Элементарные тензорные гиперболические тригонометрические функции

Сферическо-гиперболическую аналогию обоих типов (абстрактную и конкретную) можно использовать для упрощённого вычисления матриц элементарных структур в квартовом круге (341) - как моторных, так и рефлективных, если уже известна структура для какой-либо матрицы из круга. Например, аналогично ранее найденным структурам (313), (314) устанавливаются структуры деформационных матриц:

$$\{\text{def}(\pm \Phi)\}_{3 \times 3}$$

$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_1$	$(\sec \varphi - 1) \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2$	$\pm \text{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_1$
$(\sec \varphi - 1) \cdot \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$	$1 + (\sec \varphi - 1) \cdot \cos^2 \alpha_2$	$\pm \text{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_2$
$\pm \text{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_1$	$\pm \text{tg} \varphi \cdot \cos \alpha_2$	$\sec \varphi$

(361)

$$\{\text{def}(\pm \Phi)\}_{(n+1) \times (n-1)}$$

$I_{n,n} + (\sec \varphi - 1) \cdot \{e'_\alpha \cdot e_\alpha\}$ $(e'_\alpha \cdot e'_\alpha = e_\alpha \cdot e_\alpha)$	$\pm \text{tg} \varphi \cdot e_\alpha$
$\pm \text{tg} \varphi \cdot e'_\alpha$	$\sec \varphi$

(362)

Эти структуры как элементарные, подобно структурам (313), (314), выводятся из исходной 2×2-клетки (292) по тем же схемам модальных преобразований (315), (317), (318). И далее из полученных структур деформационных и ротационных сферических матриц-функций по синус-тангенсной аналогии выводятся родственные структуры ротационных и деформационных гиперболических матриц-функций:

$$\{\text{roth}(\pm \Gamma)\}_{4 \times 4}$$

$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cos^2 \alpha_1$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_1$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cos^2 \alpha_2$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_2$
$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_1 \cos \alpha_3$	$(\text{ch } \gamma - 1) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3$	$1 + (\text{ch } \gamma - 1) \cos^2 \alpha_3$	$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_3$
$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_1$	$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_2$	$\pm \text{sh } \gamma \cos \alpha_3$	$\text{ch } \gamma$

$$\{\text{roth}(\pm \Gamma)\}_{(n+1) \times (n+1)}$$

$I_{n \times n} + (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \{e_\alpha \cdot e'_\alpha\}$ $(e_\alpha \cdot e'_\alpha = e'_\alpha \cdot e_\alpha)$	$\pm \text{sh } \gamma e_\alpha$
$\pm \text{sh } \gamma e'_\alpha$	$\text{ch } \gamma$

$$\{\text{defh}(\pm \Gamma)\}_{4 \times 4}$$

$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cos^2 \alpha_1$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_1 \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cos \alpha_1$
$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2$	$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cos^2 \alpha_2$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cos \alpha_2$
$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_1 \cos \alpha_3$	$-(1 - \text{sch } \gamma) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3$	$1 - (1 - \text{sch } \gamma) \cos^2 \alpha_3$	$\mp \text{th } \gamma \cos \alpha_3$
$\pm \text{th } \gamma \cos \alpha_1$	$\pm \text{th } \gamma \cos \alpha_2$	$\pm \text{th } \gamma \cos \alpha_3$	$\text{sch } \gamma$

Кроме того, та же гиперболическая ротационная матрица-функция выводится из сферической по аналогии абстрактного типа А именно по схеме (322) вещественный синус в ротационной матрице  $\{\text{rot } \Phi\}_{\text{can}}$  в (315) преобразуется в мнимый (284) и далее в гиперболический. Отсюда же видно, что обращение ротационных и деформационных матриц-функций сводится к весьма простой операции:  $e_\alpha \rightarrow (-e_\alpha)$ , или

$\text{rot } \pi \cdot e_\alpha = -e_\alpha$ . В более общем случае при ротации в другой универсальный базис  $\tilde{E}_{1u} = \text{rot } \Theta \tilde{E}_1$  в указанных тригонометрических матрицах изменяются только координаты вектора направляющих косинусов (пассивно):  $\text{rot}' \Theta_{n \times n} e_\alpha = \text{rot}(-\Theta)_{n \times n} \cdot e_\alpha = e_\alpha$  в пределах того же евклидова подпространства. Матрицы (313), (314) представляют интерес для изучения движений в 2- и n-мерной сферической геометрии. Матрицы (363), (364) представляют интерес для изучения движений в 3- и n-мерной гиперболической геометрии. Матрицы (363), (365) представляют интерес для изучения

преобразований в псевдоевклидовом пространстве Минковского, связанных с физическим движением.

## 4.7. Тригонометрическая природа коммутативности и антикоммутативности

### 4.7.1. Коммутативность простых матриц

Биортонанальные матрицы коммутативны и антикоммутативны:

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1 = \mathbf{Z}$$

Они обязательно сингулярны:  $r_1 + r_2 \leq n$ .

Простые биортогональные матрицы приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе, причём  $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \mathbf{Z}$ . С тригонометрической точки зрения достаточно рассмотреть отношения мультипликативности только для несингулярных простых матриц, то есть без биортогональных блоков. Коммутативные простые матрицы, как известно, приводятся к диагональной форме в некотором общем базисе:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{D}\{\mathbf{P}_1\} & \\ \hline a_j & \\ \hline & a_k \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{D}\{\mathbf{P}_2\} & \\ \hline b_j & \\ \hline & b_k \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{D}\{\mathbf{P}\} = \mathbf{V}_{col}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}_{col}.$$

Диагональность этих форм, а следовательно, и коммутативность матриц сохраняются при воздействии на любую из диагональных  $2 \times 2$ -клеток, например  $(j, k)$ , согласованных с ней модальных преобразований нижеуказанных простейших типов:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \pm c & 0 \\ \hline 0 & \mp c \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mp d \\ \hline \pm d & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Первое преобразование меняет направления осей координат и не затрагивает диагональной формы. Второе преобразование вызывает перестановку осей координат и диагональных элементов. Произведения таких простейших преобразований в любых сочетаниях, обусловленных размером матриц, составляют некоторое множество модальных матриц по отношению к

данной диагональной форме как инвариантной структуре. При этом предполагается, что все собственные значения каждой из матриц различны. В противном случае указанное множество расширяется за счёт тех преобразований, которые изменяют базис в пределах пересечения собственных подпространств  $P_1$  и  $P_2$ . Ввиду того, что рассматриваемые коммутативные матрицы с изменением базиса преобразуются как двухвалентные тензоры, вышеуказанные типы модальных матриц в чистых формах сводятся к тригонометрическим преобразованиям - ротационным и рефлексивным:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Rot}(\pm \pi/2) & \text{Roth}(\pm i\pi/2) & \text{Ref} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \mp 1 \\ \hline \hline \hline \pm 1 & 0 \\ \hline \hline \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \pm i \\ \hline \hline \hline \pm i & 0 \\ \hline \hline \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline \pm c & 0 \\ \hline \hline \hline 0 & \mp c \\ \hline \hline \hline \end{array} \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \end{array} \tag{366}$$

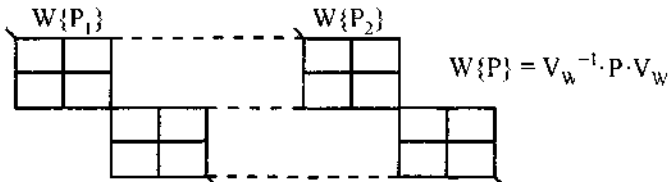
Следовательно, базис диагональной формы как простейшей структуры в данном случае можно определить с точностью до согласованных рефлексий или ротаций на тензорные углы  $\pm k \cdot \pi/2$  или  $\pm k \cdot i\pi/2$ , где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . (В гиперболической трактовке тензорному сферическому углу  $\pi/2$  отвечает бесконечный гиперболический аналог  $A$ , при этом как угловой аргумент возможен только он и нулевой угол.)

### 4.7.2. Антиккоммутативность пары простых матриц

Из антикоммутативности пары простых матриц следуют соотношения:

$$P_1^2 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1^2, \quad P_1 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1, \quad P_1^2 \cdot P_2^2 = P_2^2 \cdot P_1^2.$$

В соответствии с принципом бинарности антикоммутативные простые матрицы (без биортогональных блоков) приводятся к согласованным *бинарным* клеточным формам в некотором общем базисе:



Размерность таких несингулярных матриц обязательно чётная. Далее выполним общее модальное преобразование для обеих матриц  $P_1$  и  $P_2$  - причём такое, чтобы  $P_1$  стала диагональной. Тогда в новом общем базисе антикоммутированность этих простых матриц алгебраически возможна тогда и только тогда, когда согласованные  $2 \times 2$ -клетки имеют вид:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline P_1 & \\ \hline +a_1 & 0 \\ \hline 0 & -a_2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline P_2 & \\ \hline 0 & b_{1j} \\ \hline b_{2i} & 0 \\ \hline \end{array}$$

(367)

Если же наоборот диагонализировать  $P_2$ , то

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & a_{1j} \\ \hline a_{2i} & 0 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline +b_j & 0 \\ \hline 0 & -b_i \\ \hline \end{array}$$

(368)

где  $a = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ ,  $b = \sqrt{b_1 \cdot b_2}$ .

Ковариантная модальная матрица столбцов, приводящая контра-диагональную форму в (367) и (368) к диагональной, вычисляется, например, с использованием ранее приведенных результатов. Модальное преобразование для самого общего случая представляется в *аффинной* тригонометрической форме следующим образом'

$$\begin{array}{|c|c|} \hline V_{col}^{-1} & \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ \hline -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline P_2 & \\ \hline 0 & b_1 \\ \hline b_2 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline V_{col} & \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{b_2}{b_1}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline D\{P_2\} & \\ \hline -\sqrt{b_1 \cdot b_2} & 0 \\ \hline 0 & -\sqrt{b_1 \cdot b_2} \\ \hline \end{array}$$

(369)

$$V_{col} = \{Rot \pi/4\}_{af} \cdot V_W$$

(370)

$$\{Rot \pi/4\}_{af} = V^{-1} \cdot Rot \pi/4 \cdot V$$

(371)

где  $\det \{Rot \pi/4\}_{af} = +1$ ,  $\mu_{1,2} = \cos \pi/4 \pm i \cdot \sin \pi/4$ .

То есть это та же ротационная сферическая матрица, но выраженная в некотором *аффинном* базисе. В частности, в вещественном декартовом базисе это  $Rot \pi/4$ , в комплексном бинарном декартовом базисе (271) это  $Roth(-i\pi/4)$ . Кроме того, с учётом (366)–(368) диагональные и



контрадиагональные формы как структуры повторяются в базисах через согласованные прямые тензорные углы или кратные им. Они же как структуры устойчивы к согласованным с ними рефлексиям. Ввиду изложенного сформулируем основной результат.

*Пара несингулярных простых матриц  $P_1$  и  $P_2$  антикоммумутативна тогда и только тогда, когда базисы их диагональных форм связаны в общем случае аффинной сферической ротацией на согласованный тензорный угол  $\pm \pi/4$ . Антикоммумутативные несингулярные простые матрицы имеют обязательно четный размер. Антикоммумутативные сингулярные простые матрицы имеют необходимо согласованные биортогональные блоки, приводимые к диагональной форме в общем базисе (В гиперболической трактовке - вышеуказанному сферическому углу отвечает его гиперболический аналог « $\pm \omega$ ».)* Обратим внимание на следующее: если ротационная и внешняя модальная матрицы согласованы по  $2 \times 2$ -клеткам, то  $\{\text{Rot } \Phi\}_{af} = V^{-1} \cdot \text{Rot } \Phi \cdot V = \cos \Phi + V^{-1} \cdot i \sin \Phi \cdot V$ . Например, именно так согласованы модальные матрицы, применяемые после преобразования  $V_W$ .

Ниже рассмотрены характерные частные случаи, имеющие отношение к тензорной тригонометрии. Имеем:

$$b_{1j} = \pm b_{2j} \leftrightarrow a_{1j} = \pm a_{2j}, \quad V_W = R_W;$$

$P_1 = S_1, P_2 = S_2$  - антикоммумутативные вещественные *нормальные* матрицы или комплексные *адекватно нормальные* матрицы. Причём они либо симметричны, либо кососимметричны, что отвечает трём вариантам пар  $S_1$  и  $S_2, S$  и  $K, K_1$  и  $K_2$ , как указано ниже:

$$a) \quad b_{2j} = + b_{1j} = b_j, \quad a_{2j} = + a_{1j} = -a_j; \quad a_j^2 + b_{1j}^2 = 1, \quad V_W = R_W;$$

$P_1 = S_1, P_2 = S_2, S_1^2 + S_2^2 = I$ . Этот случай соответствует (183).

$$V_{col} = R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \hline \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array} = \text{Rot } \pi/4 \cdot R_W.$$

$$b) \quad b_{2j} = - b_{1j} = b_j/i, \quad a_{2j} = - a_{1j} = ia_j; \quad a_1^2 - b_{1j}^2 = 1, \quad V_W = R_W;$$

$P_1 = S, P_2 = K, S^2 - K^2 = I$ . Этот случай соответствует (209).

$$V_{col} = R_W \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2i \\ \hline -\sqrt{2}/2i & \sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array} = \text{Roth } i\pi/4 \cdot R_W.$$

$$в) \quad b_{2j} = - b_{1j} = b_j/i, \quad a_{2j} = - a_{1j} = ia_j; \quad P_1 = K_1, P_2 = K_2, -K_1^2 - K_2^2 = I.$$

Дополнительно рассмотрим отвечающие им примеры комплексных *эрмитово нормальных* пар антикоммутирующих матриц  $N_1$  и  $N_2$ . Имеем:

$$b_1 = \rho_1 \cdot (\cos \beta_1 + i \sin \beta_1), \quad \rho > 0,$$

$$b_2 = \rho_2 \cdot (\cos \beta_2 + i \sin \beta_2), \quad \beta = 0 - 2\pi,$$

$$b = \sqrt{b_1 \cdot b_2} = \sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2} \cdot \exp [i(\beta_1 + \beta_2)/2],$$

$$\sqrt{b_2/b_1} = \sqrt{\rho_2/\rho_1} \cdot \exp (i\beta_{12}), \quad \sqrt{b_1/b_2} = \sqrt{\rho_1/\rho_2} \cdot \exp (-i\beta_{12}), \quad \beta_{12} = \beta_2 - \beta_1.$$

По прежнему,

$$b_{1j} = \pm b_{2j} \leftrightarrow a_{1j} = \pm a_{2j}, \quad V_W = R_W$$

В более сложных случаях имеем:

$$|b_{1j}| = |b_{2j}| = \rho_b, \quad |a_{1j}| = |a_{2j}| = \rho_a; \quad V_W = U_W;$$

$P_1 = N_1$   $P_2 = N_2$  - антикоммутирующие комплексные *эрмитово нормальные* матрицы В частности, они могут быть эрмитовыми и косоэрмитовыми, что соответствует парам  $H_1$  и  $H_2$ ,  $H$  и  $Q$ ,  $Q_1$  и

$$Q_2 \cdot \begin{matrix} V_{col} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline \sqrt{2}/2 \exp(i\beta_{12}) & \sqrt{2}/2 \\ \hline \end{array} \end{matrix} = \text{Exp}\{(-i\beta_{12}/2) \text{Rot } \pi/4 \text{Exp}(i\beta_{12}/2)\}, \quad (372)$$

где  $\beta_{12} = \beta_2 - \beta_1$ ,  $\text{Exp } i\beta_{12}/2 = U_W \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(i\beta_{12}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(-i\beta_{12}) \\ \hline \end{array} U_W^*$

Ротационная матрица (372) есть частный случай (371) В том числе, при  $\beta = \pi/4$  имеем модальную матрицу **Roth**  $(-i\pi/4)$ , соответствующую комплексному бинарному декартову базису. Более общо:

$\text{Exp}(-i\pi/4) \text{Rot } \Phi \text{Exp } i\pi/4 = \text{Roth}(i\Phi)$ , что тождественно по результату рефлективному преобразованию (271). В самом же общем случае формула (372) выражает **Roth**  $\pi/4$  в эрмитово ортогональном базисе с углом комплексного сдвига  $\beta_{12}$ . В вариантах (367), (368) имеем

$N_1$		$N_2$	
$+p_a \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right]$	0	0	$\rho_b \exp(i\beta_1)$
0	$-p_a \exp\left[i \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right]$	$\rho_b \exp(i\beta_2)$	0

$N_1$		$N_2$	
0	$\rho_a \exp(i\alpha_1)$	$+p_b \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right]$	0
$\rho_a \exp(i\alpha_2)$	0	0	$-p_b \exp\left[i \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right]$

а)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} - \alpha_{2j} = 0$ ,

$P_1 = N_1, P_2 = N_2$  - антикоммутирующая пара эрмитовых матриц. В случае  $\alpha_j^2 + \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные косинус и синус

$(N_{12}^2 + N_{22} = I)$

б)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \pi, \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = 0$ ,

$P_1 = H, P_2 = Q$  - антикоммутирующая пара из эрмитовой и косоэрмитовой матриц. В случае  $\alpha_j^2 - \beta_{1j}^2 = 1$  это суть эрмитизированные проективные секанс и тангенс ( $H^2 - Q^2 = I$ )

в)  $\beta_{1j} + \beta_{2j} = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} = \pi, P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, -Q_1^2 - Q_2^2 = I$

Таким образом, мы выявили все основные типы антикоммутирующих пар простых матриц, представляющие интерес в изучаемой тензорной тригонометрии

## 4.8. Тригонометрические спектры и неравенства

### 4.8.1. Тригонометрический спектр нуль-простой матрицы

Матричные характеристические коэффициенты высшего порядка, как и проекторы, суть простые сингулярные матрицы с единственным ненулевым собственным значением. Представим

высший матричный коэффициент второго рода для *нуль-простой* матрицы сначала в форме *алгебраической ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим подпространствам, а затем в форме соответствующей ей *прямой ортогональной суммы* по собственным тригонометрическим клеткам, используя *принцип бинарности*.

$$K_2(B,r) = \sum_{i=1}^{r \cdot v'} \vec{S}_i \cdot K_2(B,r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(B,r) \cdot \vec{S}_m, \tag{373}$$

где  $\vec{S}_i = \overrightarrow{\{\cos^2 \Phi_B - \cos^2 \Phi_i, I\}}$  проецирует ортогонально на  $i$ -ю собственную тригонометрическую плоскость  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$ ;

$\vec{S}_m = \overrightarrow{\{\cos \Phi_B - I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство  $\langle \mathcal{P}_m \rangle \equiv \langle \text{im } B \cap \text{im } B' \rangle$  размерности  $v'$ . Причём здесь  $v'' = 0$  ввиду того, что  $B$  — нуль-простая матрица. Собственные ортопроекторы составляют полную сумму.

$$\sum_{i=1}^{r \cdot v'} \vec{S}_i + \vec{S}_m + \vec{S}_q = I,$$

где  $\vec{S}_q = \overrightarrow{\{\cos \Phi_B + I\}}$  проецирует ортогонально на подпространство

$$\langle \mathcal{P}_q \rangle \equiv \langle \ker B \cap \ker B' \rangle$$

размерности  $n - 2r + v'$  (см. рис.2).

Общая размерность пространства, как и должно быть, составляет:

$$2 \cdot (r - v') + v' + (n - 2r + v') = n.$$

На подпространстве  $\langle \mathcal{P}_i \rangle$  коэффициент  $K_2(B,r)$  формально проявляет себя как сингулярная матрица ранга 1, её размер в прямой сумме есть  $2 \times 2$ . На  $\langle \mathcal{P}_m \rangle$  он формально проявляет себя как несингулярная матрица, её размер в прямой сумме есть  $v' \times v'$ . На  $\langle \mathcal{P}_q \rangle$  он формально проявляет себя как нулевая матрица; её размер в прямой сумме есть  $(n - 2r + v') \times (n - 2r + v')$ . В прямой сумме имеем:

$$K_2(B,r) = \sum_{i=1}^{r \cdot v'} \oplus B_i^{2 \times 2} \oplus \det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n - 2r + v') \times (n - 2r + v')}, \tag{374}$$

где знак  $\oplus$  обозначает *ортогональное прямое суммирование*.  
 Здесь как  $(r - v')$ , так и  $(n - 2r + v')$  - неотрицательные числа.  
 Поэтому имеет место неравенство.

$$2r - n \leq v' \leq r. \tag{375}$$

В частности, для *нуль-нормальной* матрицы формула (374) приобретает простейший вид:

$$K_2(B,r) = \det B_m^{v' \times v'} \cdot I^{r-r} \oplus Z^{(n-r) \times (n-r)}$$

В формуле (374) применены специальные обозначения матриц:  $B_1^{2 \times 2}$  -  $2 \times 2$ - матрица ранга 1; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент совпадает с самой матрицей, а высший скалярный коэффициент совпадает с её следом;

$B_m^{v' \times v'}$  -  $v' \times v'$ -матрица ранга  $v'$ ; для неё, согласно (29), высший матричный коэффициент равен  $\det B_m^{v' \times v'} \cdot J^{v' \times v'}$ , а высший скалярный коэффициент совпадает с её детерминантом;

$Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}$  - часть нулевого блока, неотносящаяся к  $B_1^{2 \times 2}$ .  
 Общая сингулярность  $B$ , как и должно быть, составляет:

$$(r - v') + (n - 2r + v') = n - r$$

Если в формуле (374) каждое слагаемое  $B_1^{2 \times 2}$  поделить на его след, а несингулярное слагаемое поделить на его детерминант, то тогда она преобразуется в *прямой* тригонометрический спектр косопроектора:

$$\overleftarrow{B} = \frac{K_2(B,r)}{k(B,r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{B_1^{2 \times 2}}{\text{tr } B_1^{2 \times 2}} \oplus I^{v'-v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}. \tag{376}$$

При данном преобразовании применяется формула (62) для  $r=2$  и  $r=n$ . Аналогичные тригонометрические спектры с использованием принципа бинарности выводятся для *мультипликативных* матриц:

$$K_2(BB',r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \overrightarrow{S}_i \cdot K_2(BB',r) \cdot \overleftarrow{S}_i + \overrightarrow{S}_m \cdot K_2(BB',r) \cdot \overleftarrow{S}_m, \tag{377}$$

$$K_2(BB',r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus B_1^{2 \times 2} \cdot B_1'^{2 \times 2} \oplus \det^2 B_m^{v' \times v'} \cdot I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}, \tag{378}$$

$$\overleftarrow{BB'} = \frac{K_2(BB',r)}{k(BB',r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{B_1^{2 \times 2} \cdot B_1'^{2 \times 2}}{\text{tr } \{B_1^{2 \times 2} \cdot B_1'^{2 \times 2}\}} \oplus I^{v' \times v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \times (n-2r+v')}.$$

(379)

Из (374), (376) и (378), (379) получаем прямые произведения для высших скалярных коэффициентов:

$$k(\mathbf{B}, r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } \mathbf{B}_i^{2 \times 2} \cdot \det \mathbf{B}_m^{v' \times v'} = k(\mathbf{B}', r), \quad (380)$$

$$k(\mathbf{B}\mathbf{B}', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr } \{\mathbf{B}_i^{2 \times 2} \cdot \mathbf{B}'^{2 \times 2}\} \cdot \det^2 \mathbf{B}_m^{v' \times v'} = k(\mathbf{B}'\mathbf{B}, r). \quad (381)$$

### 4.8.2. Генеральное косинусное неравенство

В свою очередь, согласно (186), (194), имеем:

$$\overleftarrow{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = \overleftarrow{\mathbf{B}} \cdot \overleftarrow{\mathbf{B}'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}} = (\overleftarrow{\mathbf{B}} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}) \cdot (\overleftarrow{\mathbf{B}'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}})'. \quad (382)$$

Подставив в первую часть соотношения все матрицы в форме прямых спектров, получаем собственные косинусные неравенства для каждой его тригонометрической клетки:

$$0 \leq \cos^2 \varphi_i = \frac{\text{tr}^2 \mathbf{B}_i^{2 \times 2}}{\text{tr} \{\mathbf{B}_i^{2 \times 2} \cdot \mathbf{B}'^{2 \times 2}\}} \leq 1. \quad (383)$$

Из (380), (381) и (383) следует *генеральное косинусное неравенство* для квадратной матрицы в *модульной форме*, то есть для косинусного отношения (137), а именно:

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{\mathbf{B}\}|_{\cos}^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_{\mathbf{B}}| = \frac{k^2(\mathbf{B}, r)}{k(\mathbf{B}\mathbf{B}', r)} \leq 1. \quad (384)$$

Здесь в крайних случаях:

$|\{\mathbf{B}\}|_{\cos} = 0$  - для нуль-дефектной матрицы,

$|\{\mathbf{B}\}|_{\cos} = 1$  - для нуль-нормальной матрицы.

Используя ранее введённые характеристики матрицы — *диааналь* и *минорант*, придадим косинусному неравенству вид:

$$0 \leq \frac{|\mathcal{N}(r) \mathbf{B}|}{\mathcal{M}(r) \mathbf{B}} = \{ \mathbf{B} \}_{\cos} = \frac{|\mathcal{N}(r) \mathbf{B}|}{\sqrt{\mathcal{N}(r) \mathbf{B} \mathbf{B}'}} \leq 1.$$

Воспользовавшись второй частью соотношения (382), получаем аналогичные косинусные неравенства, но в *знаковой форме*:

$$-1 \leq \cos \beta_1 = \frac{\text{tr } \mathbf{B}_1^{2 \times 2}}{\sqrt{\text{tr} \{ \mathbf{B}_1^{2 \times 2} \cdot \mathbf{B}_1^{2 \times 2} \}}} \leq +1. \tag{385}$$

В случае косинусного отношения (138) имеем

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-1} \cos \beta_i = \{ \mathbf{B} \}_{\cos} = \frac{k(\mathbf{B}, r)}{\sqrt{k(\mathbf{B} \mathbf{B}', r)}} \leq +1, \tag{386}$$

или

$$-1 \leq \frac{\mathcal{N}(r) \mathbf{B}}{\mathcal{M}(r) \mathbf{B}} = \{ \mathbf{B} \}_{\cos} = \frac{\mathcal{N}(r) \mathbf{B}}{\sqrt{\mathcal{N}(r) \mathbf{B} \mathbf{B}'}} \leq +1$$

Крайние варианты здесь соответствуют нуль-нормальным матрицам с отрицательной и положительной диааналью

$$(\mathcal{N}(r) \mathbf{B} = k(\mathbf{B}, r) = \prod_{i=2}^r \mu_i^{\delta_i}).$$

Например, это могут быть несингулярные матрицы с отрицательным и положительным детерминантом. Нетрудно также видеть, что в вышеуказанных формулах частный угол  $-\pi \leq \beta_1 \leq +\pi$  отличается от собственного угла  $-\pi/2 \leq \phi_i \leq +\pi/2$  также, как угол между двумя направленными векторами отличается от угла между двумя ненаправленными векторами или линиями. Соответственно  $\{ \mathbf{B} \}_{\cos}$  есть косинусное отношение для *планаров*  $\langle \text{im } \mathbf{B} \rangle$ ,  $\langle \text{im } \mathbf{B}' \rangle$  и для планаров  $\langle \text{ker } \mathbf{B} \rangle$ ,  $\langle \text{ker } \mathbf{B}' \rangle$ , а  $\{ \mathbf{B} \}_{\cos}$  есть косинусное отношение для *линеоров*, заданных матрицами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}'$ .

Заметим также что для простой составляющей  $\mathbf{P}_B$  от *нуль-простой матрицы*  $\mathbf{B}$ , согласно (22) и (76), тригонометрия и спектры тождественны таковым для самой исходной матрицы

$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_B = \overleftrightarrow{\mathbf{B}}, \\ \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_B \overleftrightarrow{\mathbf{P}}_B' = \overleftrightarrow{\mathbf{B} \mathbf{B}'}, \end{array} \right\} (\mathbf{B} \in \langle \mathbf{V}_p \rangle)$$

Кроме того, отметим, что для тензорного угла между планарами ранга 1, то есть прямыми и ранга  $(n - 1)$ , то есть гиперплоскостями, возможна только одна тригонометрическая

клетка, что отвечает одной собственной тригонометрической плоскости.

Из вышеизложенного следует основной вывод. *Тригонометрический смысл собственных углов  $\phi_i$ , для сферических функций тензорного угла заключается в том, что это суть скалярные углы между планарами первого ранга -  $\langle \text{im } B_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im } B_i'^{2 \times 2} \rangle$  в прямых тригонометрических спектрах для  $K_2(B, r)$  и  $K_2(B', r)$ .*

Аналогичный указанному тригонометрический смысл имеют собственные скалярные углы  $\phi_i$  в клетках, когда бинарный тензорный угол задается эквиранговыми тинзорами  $A_1$  и  $A_2$  или планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ . Пусть выполняется условие (224) при  $B = A_1 A_2'$  и соответственно имеет место взаимно-однозначное соответствие (226) между ортопроекторами Тригонометрические спектры для внешних мультипликаций линеоров  $A$  имеют вид

$$K_2(AA', r) = \sum_{i=1}^{r+v'} \vec{S}_i \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_i - \vec{S}_m \cdot K_2(AA', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [AA']_i^{2 \times 2} \oplus \det [AA']^{v' \cdot v' \cdot v' \cdot v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \cdot (n-2r+v')}, \quad (387)$$

$$K_2(A_1 A_2', r) = \sum_{i=1}^{r-v'} \vec{S}_i \cdot K_2(A_1 A_2', r) \cdot \vec{S}_i + \vec{S}_m \cdot K_2(A_1 A_2', r) \cdot \vec{S}_m \equiv \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \oplus \det [A_1 A_2']^{v \cdot v \cdot v \cdot v'} \oplus Z^{(n-2r+v') \cdot (n-2r+v')}, \quad (388)$$

$$\overleftarrow{AA'} = \frac{K_2(AA', r)}{k(AA', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [AA']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v \cdot v \cdot v} \oplus Z^{(n-2r+v') \cdot (n-2r+v')}, \quad (389)$$

$$\overleftarrow{A_1 A_2'} = \frac{K_2(A_1 A_2', r)}{k(A_1 A_2', r)} = \sum_{i=1}^{r-v'} \oplus \frac{[A_1 A_2']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2}} \oplus I^{v \cdot v \cdot v} \oplus Z^{(n-2r+v') \cdot (n-2r+v')}, \quad (390)$$

$$k(AA', r) = \prod_{i=1}^{r+v'} \text{tr} [AA]_i^{2 \times 2} \cdot \det [AA']^{v \cdot v \cdot v} = \det A' A, \quad (391)$$

$$k(A_1 A_2', r) = \prod_{i=1}^{r-v'} \text{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1 A_2']^{v \cdot v \cdot v} = \det A_1' A_2. \quad (392)$$



Причём, согласно (132),  
 $\det^2 [A_1 A_2']^{v \wedge v'} = \det [A_1 A_1']^{v \wedge v'} \cdot \det [A_2 A_2']^{v \wedge v'}$ . В свою очередь,  
 согласно (186), (196) и (226), имеем:

$$\overleftarrow{A_1 A_1'} \cdot \overleftarrow{A_2 A_2'} = \overleftarrow{A_1 A_2'} \cdot \cos^2 \tilde{\Phi}_{12} = (\overleftarrow{A_1 A_2'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}) \cdot (\overleftarrow{A_2 A_1'} \cdot \cos \tilde{\Phi}_{12}). \quad (393)$$

Отсюда же для  $2 \times 2$ -клеток ранга 1 устанавливаются вспомогательные соотношения:

$$[A_1 A_2']_i^{2 \times 2} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} = \text{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} = [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}. \quad (394)$$

Первое из них есть частный случай (68). Подставив в формулу(393) матрицы в виде прямых спектров и используя (394) по клеткам, получаем собственные косинусные неравенства и затем генеральное косинусное неравенство для пары эквиванговых линейоров  $A_1$  и  $A_2$ :

$$0 \leq \cos^2 \varphi_1 = \text{tr}^2 [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} / \text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (395)$$

$$0 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos^2 \varphi_i = |\{A_1 A_2'\}_{\cos}|^2 = |\det \cos \tilde{\Phi}_{12}| = \frac{\mathcal{D}^2(r) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r) A_2} \leq 1, \quad (396)$$

где  $\varphi_i$  — собственные скалярные углы между планарами первого ранга.

$\langle \text{im} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$ . Здесь в крайних случаях:

$|\{A_1 A_2'\}_{\cos}| = 1$  - для параллельных линейоров,

$|\{A_1 A_2'\}_{\cos}| = 0$  - для ортогональных, в том числе частично, линейоров.

Соответствующие косинусные неравенства в *знаковой форме*:

$$-1 \leq \cos \beta_1 = \text{tr} [A_1 A_2']_i^{2 \times 2} / \sqrt{\text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2}} \cdot \sqrt{\text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}} \leq +1, \quad (397)$$

$$-1 \leq \prod_{i=1}^{r-v'} \cos \beta_i = \{A_1 A_2'\}_{\cos} = \frac{\mathcal{D}(r) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}(r) A_1 \cdot \mathcal{M}(r) A_2} \leq +1. \quad (398)$$

Заметим, что в (384) и (396) знаменатели тождественны (где  $B = A_1 A_2'$ ). Это соответствует той же формуле (132). При  $r_1 \neq r_2$  косинусное отношение формально нулевое.

### 4.8.3. Спектрально-клеточное представление тензорных тригонометрических функций

Теперь можно взглянуть более детально на структуру проективного косинуса и синуса на уровне тригонометрической  $2 \times 2$ -клетки. Как было показано ранее, собственные тригонометрические плоскости, относящиеся к  $2 \times 2$ -клеткам, для тензорных углов проективного и моторного типа тождественны. Поэтому на основании левой части (301) и спектра (389) имеем.

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \cdot \frac{[A_1 A_1']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} = \frac{[A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2}}.$$

В свою очередь,  $2 \times 2$ -клетку проектора  $[AA']_i^{2 \times 2}$  ранга 1 можно представить как внешнюю мультипликацию единичного  $2 \times 1$ -вектора  $e_i$ , задающего  $i$ -ю базисную линию планара  $\langle \text{im } A \rangle$  на  $i$ -й собственной тригонометрической плоскости бинарного тензорного угла:

$$\overleftarrow{[AA']_i^{2 \times 2}} = \frac{[AA']_i^{2 \times 2}}{\text{tr} [AA']_i^{2 \times 2}} = e_i e_i' = \overleftarrow{e_i e_i'}.$$

Соответственно две стороны тензорного угла, образуемого планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$ , на уровне  $2 \times 2$ -клетки можно представить в виде двух собственных единичных векторов или прямых, которые преобразуются друг в друга посредством ротационного или рефлексивного преобразования, согласно (301). Выразим декартовы координаты указанных единичных векторов для обоих планаров на  $i$ -й тригонометрической плоскости через прилежащие углы:

$$e_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Тогда при ротационном преобразовании планаров имеем:

$$e_2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} \end{bmatrix} e_1 \quad (\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1).$$

(Если представить 1-й вектор в форме суммы его двух ортопроекции, то видно, что каждая из проекций поворачивается на тот же угол, что и вектор ) Согласно (171), косинус для  $2 \times 2$ -клетки имеет вид:

$$[\cos \check{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_1' + \overleftarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_2' - \mathbf{1}^{2 \times 2} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - \mathbf{1}^{2 \times 2}$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\cos \check{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varphi_{12} \begin{array}{|c|c|} \hline \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 1, \quad (399) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{array} \right.$$

Согласно (163), синус для 2×2-клетки имеет вид:

$$[\sin \check{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{e}}_2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_2' - \overleftarrow{\mathbf{e}}_1 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_1' = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2' - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1'$$

После тригонометрических преобразований получаем

$$[\sin \check{\Phi}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varphi_{12} \begin{array}{|c|c|} \hline -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{l} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1, \quad (400) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_1) = \\ = \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_1. \end{array} \right.$$

Условие  $(\varphi_2 + \varphi_1) = 0$  или в тензорной форме  $(\check{\Phi}_1 + \check{\Phi}_2) = Z$  отвечает базису диагонального косинуса, или тригонометрическому базису. При том же условии все проективные тригонометрические функции и углы, а также все рефлекторы имеют ранее установленные канонические формы. Зеркало срединного рефлектора есть срединное подпространство тензорного угла, что наглядно видно на уровне рассмотренной 2×2-клетки. Аналогично представляются проективные секанс и тангенс.

### 4.8.4. Генеральное синусное неравенство

Генеральное косинусное неравенство (396) для пары эквианговых линейоров  $A_1$  и  $A_2$  служит далее определению *косинусных* тригонометрических норм. При  $r = 1$  оно есть геометрическое неравенство Коши в *модульной форме* для парной совокупности чисел. Последнее используется в аналитической геометрии с целью нормирования косинуса угла между двумя векторами в интервале  $[0 - \pi/2]$ . В *знаковой* форме типа (141) неравенство Коши определяет косинусную меру угла между двумя направленными векторами в интервале  $[0 - \pi]$ . Оно является частным случаем генерального косинусного

неравенства (398). Изначально неравенство Коши имело чисто алгебраический характер. Но тот же характер можно придать и вышеуказанным генеральным неравенствам (384), (386) и (396), (398), если их отнести непосредственно к скалярным элементам матриц. Генеральные косинусные неравенства суть прямые произведения собственных неравенств Коши, согласно тригонометрическим спектрам. В соответствии с (229), (230) для пары эквиранговых  $n \times r$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной ортогональности*:

$$\det C_{1,2} = \det (A_1' A_2) = 0 \leftrightarrow \{ A_1 A_2' \}_{\cos} = 0. \tag{401}$$

С другой стороны, для определения тригонометрических норм *синусного* характера может применяться синусное отношение (135). Оно невырождено для пары полно линейно независимых линеоров. В соответствии с (227), (228) для пары  $n \times r_1$ - и  $n \times r_2$ -линеоров имеет место *критерий внутренней мультипликации для констатации их хотя бы частичной параллельности, или частичной линейной зависимости* (аналог определителя Грама для набора векторов):

$$\det G_{1,2} = \det [(A_1|A_2)' \cdot (A_1|A_2)] = 0 \leftrightarrow \{ A_1|A_2 \}_{\sin} = 0. \tag{402}$$

Тот же самый критерий можно применять к планарам  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  для констатации их хотя бы частичной параллельности. Синусное отношение (135) невырождено только для *полно линейно независимых линеоров*. Оно представляется аналогично косинусному в форме прямого произведения собственных синусных отношений (124), согласно соответствующему тригонометрическому спектру. Матрица-суперпозиция линеоров  $(A_1|A_2)$ , когда последние полно линейно независимы, имеет ранг  $(r_1 + r_2)$ . Её внешняя гомомультипликация есть симметричная положительно (полу)определённая  $n \times n$ -матрица

$B_{1,2} = [(A_1|A_2)' \cdot (A_1|A_2)]$ . С учётом (120) и (402) имеем:

$$k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \det G_{1,2} \geq 0. \tag{403}$$

Согласно (135), получаем:

$$\{|A_1|A_2\}_{\sin}^2 = \frac{k [B_{1,2},(r_1 + r_2)]}{k (A_1 A_1', r_1) \cdot k (A_2 A_2', r_2)} . \tag{404}$$

С другой стороны, согласно (62), (159) и (163), для пары полно линейно независимых линеоров имеем:

$$\overleftarrow{\sin \Phi}_{12} = \overleftarrow{B}_{12} = \frac{K_2 [B_{1,2},(r_1 + r_2)]}{k [B_{1,2},(r_1 + r_2)]} \tag{405}$$

Тригонометрический спектр высшего матричного коэффициента 2-го рода (в числителе дроби) выражается ниже как в алгебраической сумме, так и в прямой сумме с использованием принципа бинарности (где  $v' = 0$ ).

$$K_2 [B_{1,2},(r_1 + r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1+v''} \overrightarrow{S}_i \cdot K_2 [B_{1,2},(r_1 + r_2)] \cdot \overrightarrow{S}_i + \overrightarrow{S}_d \cdot K_2 [B_{1,2},(r_1 + r_2)] \cdot \overrightarrow{S}_d . \tag{406}$$

Здесь проектор  $\overrightarrow{S}_d = \overrightarrow{\cos \Phi}_{12}$  проецирует ортогонально на дефектное подпространство пересечений:

$\langle \mathcal{P}_d \rangle \equiv \langle \langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle \cup \langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle \rangle$  размерности  $(r_2 - r_1 + 2v'')$ .

$$K_2 [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] = \sum_{i=1}^{r_1+v''} \oplus \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2} \cdot I_i^{2 \times 2} \oplus \tag{407}$$

$$\oplus \det [A_1 A_1']^{v'' \times v''} \cdot I^{v'' \times v''} \oplus \det [A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \cdot (r_2 - r_1 + v'')} \cdot I^{(r_2 - r_1 + v'') \cdot (r_2 - r_1 + v'')} \oplus$$

$$\oplus Z^{(n - r_1 - r_2) \cdot (n - r_1 - r_2)} .$$

Поясним некоторые выражения в формуле (407):

$[(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2}$  -  $2 \times 2$ -матрица ранга 2 (несингулярная), соответствующая 1-ой тригонометрической клетке; для неё высший матричный коэффициент 2-го рода определяется, согласно (29), а высший скалярный коэффициент совпадает с детерминантом;

$[A_1 A_1']^{v'' \times v''}$  и  $[A_2 A_2']^{(r_2 - r_1 + v'') \cdot (r_2 - r_1 + v'')}$  - несингулярные матрицы, соответствующие в спектре подпространствам  $\langle \text{im } A_1 \cap \ker A_2' \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \cap \ker A_1' \rangle$ ; для них высшие коэффициенты определяются аналогично;

$Z^{(n - r_1 - r_2) \cdot (n - r_1 - r_2)}$  - нулевой блок.

Ортопроектор на образ гомомультипликации  $B_{1,2}$  в прямой сумме имеет вид:

$$B_{1,2} = \sum_{i=1}^{r_1-v''} \oplus I_1^{2 \times 2} \oplus [^{(r_1-r_1+2v'') \times (r_2-r_1+2v'')} \oplus Z^{(n-r_1-r_2) \times (n-r_1-r_2)}] \quad (408)$$

Далее принято, что  $r_2 \geq r_1$ , как указано на рис. 2. Отметим, что для полно линейно независимых линейоров  $(r_1 + r_2) \leq n$  и  $v' = 0$ . Для  $i$ -й тригонометрической клетки, согласно (124), имеем:

$$0 \leq \sin^2 \varphi_i = \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2} / \text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \leq 1, \quad (409)$$

где  $\varphi_i$  - угол между планарами первого ранга  $\langle \text{im} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \rangle$  и  $\langle \text{im} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \rangle$ , как и в косинусном варианте (395).

Для установления генерального синусного неравенства остаётся, как и ранее, вычислить высший скалярный коэффициент. Он находится с учётом (407) и (409) в форме прямого произведения по тригонометрическим подпространствам.

$$\begin{aligned} k [B_{1,2}, (r_1 + r_2)] &= \quad (410) \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \det [(A_1|A_2) \cdot (A_1|A_2)']_i^{2 \times 2} \cdot \det [A_1 A_1']_i^{1 \times 1 \cdot v''} \cdot \det [A_2 A_2']_i^{(r_1-r_1+v'') \times (r_2-r_1+v'')} = \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \{ \sin^2 \varphi_i \cdot \text{tr} [A_1 A_1']_i^{2 \times 2} \cdot \text{tr} [A_2 A_2']_i^{2 \times 2} \} \cdot \det [A_1 A_1']_i^{v'' \times v''} \cdot \det [A_2 A_2']_i^{(r_1-r_1+v'') \times (r_2-r_1+v'')} = \\ &= \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \varphi_i \cdot k (A_1 A_1', r_1) \cdot k (A_2 A_2', r_2). \end{aligned}$$

(В этом произведении опускаются  $v''$  значений  $\sin^2 \varphi_i = 1$  при  $i > r_1 - v''$ .)

И, наконец, из (404) и (410) выводим *генеральное синусное неравенство* для пары  $n \times r_1$ - и  $n \times r_2$ -линейоров, причём при  $n > 2$  исключительно в *модульной* форме:

$$\begin{aligned} 0 \leq \prod_{i=1}^{r_1-v''} \sin^2 \varphi_i &= |\{A_1|A_2\}|_{\sin}^2 = \frac{\mathcal{M}^2(r_1 + r_2) \{A_1 A_2'\}}{\mathcal{M}^2(r) A_1 \cdot \mathcal{M}^2(r) A_2} = \\ &= |\mathcal{M}(r_1 + r_2) \sin \tilde{\Phi}_{12}| \leq 1. \end{aligned} \quad (411)$$

Здесь в крайних случаях:

$$\begin{aligned} |\{A_1|A_2\}|_{\sin} = 0 & \text{ - для хотя бы частично параллельных линейоров,} \\ |\{A_1|A_2\}|_{\sin} = 1 & \text{ — для полно ортогональных линейоров.} \end{aligned}$$

Для пары эквиранговых линейоров и соответственно для тензорного угла между ними генеральные неравенства (396) и (411) можно объединить в парное тригонометрическое неравенство:

$$0 \leq \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\cos}^2} + \sqrt{|\{A_1 \cdot A_2\}|_{\sin}^2} \leq 1. \tag{412}$$

Оно получается путём применения алгебраического неравенства Коши для средних арифметического и геометрического к квадратам собственных значений косинуса и синуса и суммирования обоих неравенств. Косинусное отношение может быть ненулевым только при исходном условии  $r_1 = r_2 = r$ . Синусное отношение может быть ненулевым только при  $2r \leq n$ . При этом знак равенства справа в (412) имеет место тогда и только тогда, когда  $|\varphi_i| = \text{const}$  ( $i = 1, \dots, r$ ). При  $r = 1$  (то есть для угла между двумя векторами или прямыми) соотношение (412) трансформируется в обычное равенство:  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .

Пусть дана прямоугольная  $n \times r$ -матрица ранга  $r$ . Представим её путём произвольной разбивки в форме совокупности блок-столбцов:

$$A \equiv \{A_1 | A_2 | \dots | A_j\}.$$

Такой форме матрицы  $A$  соответствует некоторый полигранный тензорный угол, задаваемый гранями – линейорами  $A_1, A_2, \dots, A_j$ . В частности, это есть полирёберный угол, если разбивка осуществляется до вектор-столбцов. Последовательно применив к указанной форме матрицы  $A$  генеральное синусное неравенство, получаем в итоге

$$\text{Mtr}(r) A \leq \text{Mtr}(r_1) A_1 \cdot \text{Mtr}(r_2) A_2 \cdot \dots \cdot \text{Mtr}(r_j) A_j. \tag{413}$$

Причём знак равенства отвечает варианту взаимно-ортогональных линейоров (векторов). Соотношение (413) наиболее полно обобщает синусное неравенство Адамара. Кроме того, его частным случаем, применительно к теории решения линейного уравнения  $Ax = a$ , является тригонометрическая формула (122).

Все рассмотренные неравенства в исконной сферической трактовке имеют геометрический смысл применительно к евклидову или квазиевклидову пространству. С другой стороны, в псевдоевклидовом пространстве, используя сферическо-гиперболическую синус-тангенсную аналогию, получаем секансные и тангенсные генеральные неравенства гиперболического типа для матричных объектов, заданных сначала в универсальном базисе. В свою очередь, обращая секансное неравенство, получаем неравенство-перевертыш гиперболического типа косинусной природы. Далее эти неравенства обобщаются на любые псевдодекартовы базисы с применением фундаментального рефлектор-тензора или срединного рефлектора угла.

## **4.9. Геометрические нормы матричных объектов**

### **4.9.1. Квадратичные нормы матричных объектов евклидова (квазиевклидова) пространства**

Для любых принятых *геометрических* норм матриц или матричных объектов требуется, прежде всего, инвариантность по отношению к собственным геометрическим преобразованиям пространства. Например, последние в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  задаются рефлектор-тензором. К ним относятся тригонометрически согласованные ротации и рефлексии, а также параллельный перенос. С другой стороны, в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  подобной согласованности для ротаций и рефлексий вообще не требуется, так как в нём рефлектор-тензор формально есть обычная единичная матрица. В таких арифметических пространствах для объектов ранга 1 вполне естественно применяется евклидова норма протяжённости. В бинарных *тригонометрических* отношениях объектов ранга 1 применяются евклидовы нормы косинуса и синуса, вытекающие из неравенств Коши и Адамара. Но для объектов большего ранга евклидова норма (или норма Фробениуса) имеет всего лишь *первый порядок*, выделяющий её на *множестве* геометрических норм. В связи с этим для



объектов ранга  $r$  представляет особый интерес определить аналогичные нормы более высоких порядков - вплоть до величины ранга  $r$ . Выбор геометрических норм для  $r \times n$ -матрицы  $A$  или для отвечающего ей линеора возможен, в принципе, двумя способами.

По *первому способу* сначала вычисляют промежуточную норму для гомомультипликации  $A'A$  (в случае исходной симметричной матрицы - для квадрата  $S^2$ ). Она увязывается с её собственными значениями  $\sigma_i^2 > 0$ . Следовательно, чтобы далее произвести норму, относящуюся непосредственно к исходной матрице  $A$ , нужно из промежуточной дополнительно извлечь положительный квадратный корень. По *второму способу* норму можно было бы сразу увязать с собственными значениями  $\sigma_i > 0$  матричного арифметического корня  $\sqrt{A'A}$  (для неотрицательной симметричной матрицы такой корень тождествен исходной матрице  $S$ ). Однако в общем случае вычисление матричного арифметического корня - довольно сложный и трудоёмкий процесс. С учётом этого обстоятельства в данной работе применяется именно первый способ. Получаемые по нему геометрические нормы именуется как *квадратичные* ввиду того, что они базируются на генеральной совокупности собственных значений  $\sigma_i^2$ .

Например, для знакоопределённых симметричных матриц-функций  $\cos \Phi$ ,  $\sin \Phi$ ,  $\operatorname{tg} \Phi$  и  $\operatorname{sec} \Phi$  тригонометрические квадратичные нормы увязывают с собственными значениями их квадратов  $\cos^2 \varphi$ ,  $\sin^2 \varphi$ ,  $\operatorname{tg}^2 \varphi$  и  $\operatorname{sec}^2 \varphi$ . Они же при таком подходе одинаковы для тензорных тригонометрических функций проективного и моторного типа.

Предпосылками для корректного определения *общих квадратичных норм* являются ранее установленные геометрические аналогии типа (125), (127) —, а также *генеральное неравенство средних величин* в части цепи (11) для средних алгебраических. Ранее анализ соотношений (125) и (127) показал, что коэффициенты Виета для гомомультипликаций матриц имеют вполне ясную геометрическую трактовку. Кроме того, получаемые из коэффициентов Виета малые медианы, согласно цепи (11) генерального неравенства средних величин, укладываются в некоторую иерархическую последовательность. (Медианы, как и ранее, отмечаются чертой сверху.) С учётом вышесказанного определим *квадратичные геометрические нормы  $r \times n$ -матриц*

порядка  $t$  и степени  $h$  через внутренние гомомультпликации как характеристики двух типов - простые и приведённые:

$$\|A\|_t^h = [\sqrt[2t]{k(A'A, t)}]^h > 0, \tag{414}$$

$$\overline{\|A\|_t^h} = [\sqrt[2t]{k(A'A, t)/C_r^t}]^h > 0. \tag{415}$$

В частности,

$$\|B\|_n^n = \sqrt{\det(B'B)} = |\det B| = \overline{\|B\|_n^n},$$

$$\|B\|_t^t = \sqrt{k(B'B, t)}, \quad \overline{\|B\|_t^t} = \sqrt{k(B'B, t)/C_1^t},$$

$$\|A\|_r^r = \sqrt{\det(A'A)} = \mathcal{M}_r(r) A = \overline{\|A\|_r^r}.$$

*Генеральная норма*, по определению, имеет порядок  $r$ , равный рангу матрицы. Она же при  $h = r$  есть *минорант* матрицы. *Генеральные квадратичные тригонометрические нормы* степени 1 для тензорного косинуса и синуса (проективных и моторных) определяются аналогичным образом:

$$0 \leq \|\cos \Phi_{12}\|_n^1 = \sqrt[2n]{\det \cos^2 \Phi_{12}} = \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{n-r} \cos^2 \varphi_i} = \sqrt[2n]{\{A_1 \cdot A_2\}_{\cos}^2} \leq 1, \tag{416}$$

$$0 \leq \|\sin \Phi_{12}\|_{t_1 \ t_2}^1 = \sqrt[2(r_1+r_2)]{\mathcal{M}(r_1+r_2) \sin^2 \Phi_{12}} = \sqrt[2(r_1+r_2)]{\prod_{i=1}^{r_1+r_2} \sin^2 \varphi_i} = \sqrt[2(r_1+r_2)]{\{A_1 \cdot A_2\}_{\sin}^2} \leq 1 \tag{417}$$

Эти нормы характеризуют скалярно бинарный тензорный угол между линейорами  $A_1$  и  $A_2$  или между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  при условии  $2r \leq n$  (для косинуса) и при условии  $r_1 + r_2 \leq n$  (для синуса). В случае  $2r > n$  генеральную косинусную норму относят к углу между планарами  $\langle \ker A_1' \rangle$  и  $\langle \ker A_2' \rangle$ . При  $r_1 + r_2 > n$  генеральная синусная норма вырождена. В свою очередь, скалярная характеристика

$$\theta \leq \|\cos \Phi_B\|_n^1 = \sqrt[2n]{\{B\}_{\cos}^2} \leq 1 \tag{418}$$

есть генеральная тригонометрическая норма степени 1 для косинуса бинарного тензорного угла между планарами  $\langle \text{im } B \rangle$  и  $\langle \text{im } B' \rangle$  при условии  $2r \leq n$ . В противном случае эту норму относят к углу между планарами  $\langle \ker B \rangle$  и  $\langle \ker B' \rangle$ . Все

вышеуказанные геометрические нормы формально при  $t > \text{rang}\{ \cdot \}$  суть нулевые, а при  $t = 0$  суть единичные.

Согласно рекуррентной формуле Варинга - Леверье прямого типа или системе уравнений Ньютона, имеется только  $r$  независимых геометрических норм. Именно нормы (414) и (415) полностью охарактеризовывают геометрические свойства линейного матричного объекта ранга  $r$ , согласно *полному* набору его геометрических инвариантов. Квадратичная геометрическая норма порядка 1 и степени 1 есть норма Фробениуса

$$\|A\|_1^1 = \sqrt{\text{tr}(A'A)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^r \sigma_{jk}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \|A\|_F > 0 \quad (419)$$

(То же справедливо для евклидовой нормы векторов )

С другой стороны, отметим, что если бы нормы определялись, согласно второму способу (см выше), из собственных значений  $\sqrt{A'A}$ , то тогда нормы Фробениуса и Евклида являлись *степенными* нормами порядка  $\theta = 2$

$$\sqrt[\theta]{S_\theta(\sigma_1)} = \sqrt[\theta]{\sum_{i=1}^r \sigma_i^\theta} \quad (\theta = \overline{1, r})$$

Соответствующий им полный набор *алгебраических* норм тогда бы имел вид:

$$\|\sqrt{A'A}\|_t^1 = \sqrt[t]{s_t(\sigma_1)} = \sqrt[t]{k(\sqrt{A'A}, t)} \quad (t = \overline{1, r})$$

Тождественность обоих способов определения норм (при одних и тех же их параметрах) имеет место только для норм высшего порядка, то есть для генеральных норм

$$\|A\|_r^1 = \sqrt[2t]{s_r(\sigma_1^2)} = \sqrt[2t]{\det(A'A)} = \sqrt[t]{\mathcal{M}r(r)A} = \sqrt[t]{s_r(\sigma_1)} = \sqrt[t]{\det \sqrt{A'A}}.$$

(В частности, это имеет место для евклидовой нормы при  $r = 1$ .) Однако в общем случае при  $t \leq r$  для вычисления норм по второму способу, как уже указывалось, потребовалось бы сначала найти матричный арифметический корень. По первому способу нормы вычисляют через скалярные характеристические коэффициенты той же внутренней гомомультипликации  $A'A$ . В этом суть различия обоих подходов и, как отмечалось ранее, — причина выбора именно первого способа определения геометрических норм.

Норма Фробениуса, или норма порядка 1 и степени 1 есть инвариант длины. Генеральная норма - минорант, или норма

порядка  $r$  и степени  $r$  есть инвариант объёма ранга  $r$ . Характеристика  $\|A\|_r^1 = \|A\|_r$  есть инвариант степени 1 этого объёма, или генеральная иерархическая норма - малая медиана. Геометрические нормы  $\|A\|_r^1$  - малые медианы находятся в иерархии, соответствующей цепи (11) генерального неравенства средних величин. Геометрическая сущность вышеуказанных общих норм трактуется исходя из соотношений (127) как характеристика  $t$ -мерных объёмов и, в частности, при  $t = 1$  как характеристика длины, а генеральной нормы - из соотношения (125) как характеристика  $r$ -мерного объёма. *Иерархические квадратичные тригонометрические* нормы порядка 1 определяются аналогичным образом.

$$\|\cos \Phi\|_1^1 = \sqrt{\frac{\text{tr} \cos^2 \Phi}{n}}, \quad \|\sin \Phi\|_1^1 = \sqrt{\frac{\text{tr} \sin^2 \Phi}{l}}.$$

С учётом (182), (261) и (208), (264) имеем:

$$\|\cos \Phi\|_1^2 + \|\sin \Phi\|_1^2 = 1 = \|\sec \Phi\|_1^2 - \|\text{tg} \Phi\|_1^2. \tag{420}$$

Квадратичные тригонометрические нормы *высшего* порядка выражаются формулами (416), (417). Если цепь (11) генерального неравенства средних величин состоит из усреднённых инвариантов какой-либо тензорной тригонометрической функции, то тогда его же цепь (12) содержит обращенные усредненные инварианты мультипликативно обратной тригонометрической функции. Очевидно, что иерархические инварианты косинуса и синуса заключены в интервале  $[0 - 1]$ , а секанса и тангенса в интервалах  $[1 - \infty]$  и  $[0 - \infty]$

## 4.9.2. Определение абсолютных и относительных геометрических норм

Рассмотрим определение и имманентные свойства разнообразных геометрических норм матричных объектов. Пусть  $A$  есть комплексная  $n \times m$ -матрица, представляющая алгебраически либо одновалентный тензор в пространстве  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$  при  $m \leq n$ , либо двухвалентный тензор в пространстве  $\langle \mathcal{A}^{n \times n} \rangle$  при  $m = n$  как некие геометрические объекты.

Дадим следующее определение.

*Вещественная скалярная функциональная характеристика  $\|A\|_t^h$  от элементов матрицы  $A$  ранга  $r$  есть определённая абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$ , если она удовлетворяет следующим условиям ( $0 \leq t \leq m$ ):*

$$(a) \|A\|_t^h = [\|A\|_t^1]^h > 0 \text{ при } 1 \leq t \leq r.$$

$$(a') \|A\|_0^h = 1 \text{ при } t = 0.$$

$$(a'') \|A\|_t^h = 0 \text{ при } t > r;$$

$$(b) \|c \cdot A\|_t^h = |c|^h \cdot \|A\|_t^h.$$

$$(c) \|A\|_t^h = \|U_1 \cdot A \cdot U_2\|_t^h,$$

$$(d) \|A\|_t^h = \|A^*\|_t^h.$$

Данному определению отвечают, например, нормы (414) - (419). Если же в условии (a) знак  $>$  заменить на знак  $\geq$ , то тогда аналогичная функциональная числовая характеристика есть *полуопределённая абсолютная геометрическая норма порядка  $t$  и степени  $h$* . Последняя применяется исключительно для квадратных матриц  $B$ , представляющих алгебраически двухвалентный тензор. Полуопределённые нормы обозначаются как  $\|\{B\}\|_t^h$ . Приведём некоторые примеры:

$$\|\{B\}\|_t^1 = |k(B,t)| \geq 0.$$

$$\|\{B\}\|_r^1 = |k(B,r)| \geq 0, \quad \|\{B\}\|_n^h = |\det B|, \quad \|\{B\}\|_1^1 = |\operatorname{tr} B|.$$

(421)

В свою очередь, *относительная норма* того же порядка и степени образуется через отношение полуопределённой и определённой абсолютных геометрических норм. Она применяется также для квадратных матриц и имеет *тригонометрическую природу*, являясь при этом всегда безразмерной характеристикой. Например, это может быть косинусное и синусное отношения матриц, введённые ранее. Однако пока что порядок относительных норм отвечал только рангу матриц.

### 4.9.3. Геометрический смысл общих квадратичных норм

Далее на примере косинусного отношения рассматриваются относительные нормы *общих* порядков и их связь с абсолютными нормами. Генеральные косинусные неравенства (396), (398) и соответствующие им косинусные отношения имеют обобщённые квазианалоги для порядков  $t < r$ . Пусть даны  $n \times r$ -линеоры  $A_1$  и  $A_2$ . Выделим в каждом из них взаимные субматрицы столбцов размера  $n \times t$  с одним и тем же набором номеров столбцов:  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ , где  $j = \overline{1, C_1^t}$ . Далее расположим вертикально и по порядку эти взаимные субматрицы отдельно для линеоров  $A_1$  и  $A_2$ . При этом исходные  $A_1$  и  $A_2$  преобразуются в пару *ранжированных* линеоров размера  $n \cdot C_1^t \times t$  и ранга  $t$ . Для каждой пары взаимных субматриц столбцов имеют место косинусные неравенства типа (396), (398):

$$-1 \leq \det \{A_1' A_2\}_j / \sqrt{\det (A_1' A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2' A_2)_j} \leq +1,$$

где в числителе представлен один из диагональных миноров матрицы  $\{A_1' A_2\}$  порядка  $t$ , соответствующий внутренней мультипликации взаимных субматриц столбцов  $\{A_1\}_j$  и  $\{A_2\}_j$ . Отсюда, суммируя числители и знаменатели всех частных неравенств, получаем общее неравенство:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_1^t} \det \{A_1' A_2\}_j}{\sum_{j=1}^{C_1^t} \sqrt{\det (A_1' A_1)_j} \cdot \sqrt{\det (A_2' A_2)_j}} \leq +1.$$

Положительный знаменатель преобразуется далее без его уменьшения с использованием геометрического неравенства Коши для парной совокупности положительных чисел:

$$-1 \leq \frac{\sum_{j=1}^{C_1^t} \det \{A_1' A_2\}_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{C_1^t} \det (A_1' A_1)_j} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{C_1^t} \det (A_2' A_2)_j}} \leq +1.$$

Используя (120) и (121), отсюда получаем *общее квазикосинусное неравенство* в знаковой форме:

$$-1 \leq \frac{k(A_1'A_2, t)}{\sqrt{k(A_1'A_1, t)} \cdot \sqrt{k(A_2'A_2, t)}} = \frac{k(A_1A_2', t)}{\sqrt{k(A_1A_1', t)} \cdot \sqrt{k(A_2A_2', t)}} \leq +1. \quad (422)$$

В свою очередь, квазикосинусное неравенство в незнаковой форме задаёт относительную норму:

$$0 \leq \frac{|\{A_1'A_2'\}_t|^t}{\|A_1\|_t^t \cdot \|A_2\|_t^t} \leq 1. \quad (423)$$

Тригонометрическая сущность квазикосинусного отношения как нормы порядка  $t < r$  устанавливается, согласно схеме его вывода, и относится непосредственно к ранжированным линейорам. Для 1-го порядка имеют место частные неравенства:

$$-1 \leq \frac{\text{tr}(A_1'A_2)}{\sqrt{\text{tr}(A_1'A_1)} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2'A_2)}} = \frac{\text{tr}(A_1A_2')}{\sqrt{\text{tr}(A_1A_1')} \cdot \sqrt{\text{tr}(A_2A_2')}} \leq +1, \quad (424)$$

$$0 \leq \frac{|\{A_1'A_2'\}_1|^1}{\|A_1\|_1^1 \cdot \|A_2\|_1^1} \leq 1. \quad (425)$$

Именно отсюда для нормы Фробениуса, применительно к паре исходных  $n \times r$ -линеоров, следуют классические неравенства параллелограмма и треугольника:

$$\left| \|A_1\|_1^1 - \|A_2\|_1^1 \right| \leq \|A_1 \pm A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1, \quad (426)$$

$$\|A_1 + A_2\|_1^1 \leq \|A_1\|_1^1 + \|A_2\|_1^1. \quad (427)$$

Эти неравенства имеют линейный характер. Они демонстрируют природу нормы Фробениуса для линейоров как инварианта протяжённости. Но, строго говоря, косинусные характеристики (424), (425), неравенства (426), (427) и сами нормы Фробениуса относятся к линейорам  $A_1$  и  $A_2$  при  $r > 1$  только опосредовано - через пару ранжированных  $n \cdot r \times 1$ - векторов  $a_1$  и  $a_2$ :

$$\|A_1\|_1^1 = \|a_1\|_E, \quad \|A_2\|_1^1 = \|a_2\|_E, \quad \|A_1 \pm A_2\|_1^1 = \|a_1 \pm a_2\|_E;$$

$$\text{tr}(A_1'A_2) = \text{tr}(A_1'A_2') = a_1' \cdot a_2, \quad |\{A_1'A_2'\}_1|^1 = |a_1' \cdot a_2|.$$

В частности, теорема Пифагора для норм Фробениуса имеет место тогда и только тогда, когда ортогональны именно ранжированные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \|A_1 \pm A_2\|_1^2 &= \|A_1\|_1^2 + \|A_2\|_1^2, \\ \text{tr}(A_1' \cdot A_2) &= 0 = \mathbf{a}_1' \cdot \mathbf{a}_2. \end{aligned} \right\} \quad (428)$$

Аналогичным образом, общие квазикосинусные отношения (422), (423) как относительные нормы применяются к линейорам  $A_1$  и  $A_2$  только опосредовано — через пару ранжированных линейоров (с точки зрения их тригонометрического смысла).

### 4.9.4. Линеоры специальных видов и простейшие линейорные фигуры

Выявим в *евклидовом линейорном пространстве* специальные множества централизованных эквиранговых линейоров. Согласно (130), линейор представляется в форме квазиполярного разложения:

$$A = Rq \cdot |A|,$$

где  $|A| = \sqrt{A'A}$  - матричный евклидов модуль линейора. Здесь имеется аналогия с таким же представлением вектора:  $\mathbf{a} = \mathbf{e} \cdot |\mathbf{a}|$ , где  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}} = \|\mathbf{a}\|_{\mathbb{E}}$ . Матричный модуль линейора играет ту же роль, что и скалярный модуль вектора, но для набора единичных векторов  $\{\mathbf{e}_i\} = Rq$ . Последние задают приведённые базисные ортогональные оси линейора.

$$\begin{aligned} \overleftarrow{AA'} &= \overleftarrow{Rq \cdot Rq'} = Rq \cdot Rq', \quad Rq' \cdot Rq = I, \quad Rq' = Rq^+; \\ \overleftarrow{A_2 A_1'} &= \overleftarrow{Rq_2 Rq_1'} = Rq_2 \cdot \{Rq_1' Rq_2^{-1} \cdot Rq_1'\} = Rq_2 Rq_2' \cdot \sec^2 \Phi_{12} \cdot Rq_1 Rq_1' = \\ &= \overleftarrow{A_2 A_2'} \cdot \sec^2 \Phi_{12} \cdot \overleftarrow{A_1 A_1'} - \text{см. также формулы (133), (186), (187)}. \end{aligned}$$

Каждый линейор формально принадлежит собственному базисному плану:  $A \in \langle \text{im } A \rangle$ . Эквиранговые линейоры, имеющие один и тот же базисный планар  $\langle \text{im } A \rangle$ , образуют полное множество *колпланарных линейоров* (по отношению к плану  $\langle \text{im } A \rangle$ ). В частности, при  $r = 1$  это есть множество *коллинеарных векторов*. Колпланарность для пары эквиранговых линейоров определяется условием (153). Полное множество



эквиранговых *коллпланарных* *линеоров* задаётся параметрически через свободную  $r \times r$ -матрицу  $C$  ( $\det C \neq 0$ ) исходя из тождества:

$$\overleftrightarrow{(AC)} \cdot \overleftrightarrow{(AC)}' = \overleftrightarrow{AA}' \tag{429}$$

В частности, на этом множестве всегда имеется *единичный* ортогональный *линеор*  $Rq \in \langle \text{im } A \rangle$ . (Заметим, что выполнение более "широкого" условия (154) соответствовало бы множеству *коллпланарных* *линеоров* относительно планара  $\langle \text{im } A_1 \rangle$ .) Для коллпланарных *линеоров* имеет место определяющее инвариантное соотношение:

$$Rq \cdot Rq' = \text{Const} = \overleftarrow{AA}'$$

Выявим на множестве коллпланарных *линеоров* подмножество *эквиранговых коаксиальных* *линеоров* исходя из более строгого определяющего соотношения  $Rq = \text{Const} = \{e_i\}$ , то есть:

$$Rq_1 = Rq_2 = \dots = Rq \rightarrow \overleftarrow{A_1 A_1}' = \overleftarrow{A_2 A_2}' = \dots = \overleftarrow{AA}'$$

Для пары коаксиальных *линеоров* имеют место простые модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = [|A_1| \pm |A_2|]^2$$

$$A_1' \cdot A_2 = |A_1| \cdot |A_2| = (A_2' \cdot A_1)'$$

Ротационная сферическая матрица  $\text{Rot } \Phi_{12}$ , получаемая из (245), согласно (301), транслирует *линеор*  $A_1$  во множество *линеоров*, коллпланарных на  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ .

$$(\text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1) \in \langle \text{im } A_2 \rangle,$$

где  $\Phi_{12}$  - моторный сферический угол между планарами  $\langle \text{im } A_1 \rangle$  и  $\langle \text{im } A_2 \rangle$  ранга  $r$ . Следовательно, с учётом (429) любая пара *экви-ранговых* *линеоров* связана соотношением типа

$$A_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 \cdot C, \tag{430}$$

где внутреннее линейное преобразование  $C$  вычисляется после внешней ротации  $\text{Rot } \Phi_{12}$ . Далее на этой основе определим *сферически ротационно конгруэнтные* *между собой* *линеоры*  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_2 = \text{Rot } \Phi_{12} \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \tag{431}$$

Для пары таких *линеоров* имеем модульные соотношения:

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1^2 \cdot \frac{1 \pm \cos \Phi_{12}}{2} \cdot A_1,$$

$$|A_1 + A_2|^2 = 4 \cdot A_1^2 \cdot \sin^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1,$$

$$|A_1 - A_2|^2 = 4 \cdot A_1^2 \cdot \cos^2 \frac{\Phi_{12}}{2} \cdot A_1.$$

Эта пара образует 2г-мерный линейный ромб сферического типа. В частности, центральные эквимодульные векторы всегда сферически конгруэнтны. Если  $\Phi_{12} = \pi/2$ , то пара таких линейоров образует линейорный квадрат:

$$|A_1 \pm A_2| = \sqrt{2} \cdot |A_1| = \sqrt{2} \cdot |A_2|.$$

В свою очередь, сферически ортогональный рефлектор  $\{\sqrt{I}\}_S$ , получаемый из (247), согласно (301), тоже транслирует линейор  $A_1$  во множество линейоров, колпланарных на  $\langle \text{im } A_2 \rangle$ :

$$(\{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1) \in \langle \text{im } A_2 \rangle.$$

Следовательно, с учётом (429) любая пара эквиранговых линейоров связана соотношением типа

$$A_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1 \cdot C, \tag{432}$$

где внутреннее линейное преобразование  $C$  вычисляется после внешней рефлексии  $\{\sqrt{I}\}_S$ . Теперь на основе этого определим *сферически зеркально конгруэнтные между собой чинеоры*  $A_1$  и  $A_2$ :

$$A_2 = \{\sqrt{I}\}_S \cdot A_1 \rightarrow |A_1| = |A_2|. \tag{433}$$

Для пары таких линейоров имеет место модульное соотношение

$$|A_1 \pm A_2|^2 = 4 \cdot A_1^2 \cdot \frac{1 \pm \{\sqrt{I}\}_S}{2} \cdot A_1.$$

Здесь, в частности, можно использовать собственные *срединные ортопроекторы*, согласно формулам (253).

Таким образом, из эквиранговых линейоров, как и из векторов, формально возможно составлять разнообразные геометрические фигуры, обладающие теми или иными свойствами. Линейорное евклидово или квазиевклидово пространство, как и векторное, имеет валентность 1.

Нетрудно также определить псевдоевклидовы (гиперболические) аналоги вышерассмотренных линейоров

специального вида и простейших линейных фигур, используя при этом гиперболические варианты тензорных тригонометрических функций и рефлекторов. В свою очередь, псевдоевклидовы модули - матричные и скалярные геометрических объектов определяются с применением во внутренних мультипликации линейных фундаментального рефлектор-тензора пространства.

## 4.10. Варианты комплексификации тензорной тригонометрии

### 4.10.1. Адекватный вариант

Комплексные сферические углы вообще, то есть в *проективном* и в *моторном* вариантах, выражаются через сферические и гиперболические вещественные углы в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= \Phi + i\Gamma, \\ \Psi_j &= \varphi_j + i\gamma_j, \end{aligned} \right\}$$

(434)

В *комплексном евклидовом пространстве* тензорная тригонометрия воплощается в результате адекватной комплексификации. *Проективный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\tilde{\Psi}' = \tilde{\Phi} - i\tilde{\Gamma}$  (так как  $\tilde{\Phi}' = \tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}' = -\tilde{\Gamma}$ ). *Моторный* тензорный угол в транспонированной форме выражается как  $\Psi' = -\Phi + i\Gamma$  (так как  $\Phi' = -\Phi, \Gamma' = \Gamma$ ). Все геометрические понятия и формулы, кроме норм и неравенств, сохраняют свой прежний вид и значение. В частности, при вычислении миноранта и тензорного модуля используется простое транспонирование. Адекватный модуль для комплексных чисел  $\pm c$  с одинаков и вычисляется через их квадрат с использованием формулы Муавра (то есть вполне универсальным способом):

$$\pm c = \pm \rho \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad \text{где } 0 \leq \alpha < \pi;$$

$$(\pm c)^2 = c^2 = \rho^2 \cdot (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) = \rho^2 \cdot (\cos \beta + i \sin \beta), \quad \text{где } 0 \leq \beta < 2\pi;$$

$$|\pm c| = |c| = \rho \cdot (\cos \beta/2 + i \sin \beta/2) = \rho \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha). \quad (435)$$

В частности, отсюда видно, что сохраняется соотношение  $|\underline{c}|^2 = c^2$ . Адекватный матричный евклидов модуль  $|A| = \sqrt{A'A}$  для матрицы  $A$  вычисляют через промежуточную диагонализацию её внутренней гомомультпликации посредством комплексного ортогонального модального преобразования:

$$R'A'A \cdot R = D\{A'A\} = \{\sigma_j^2\}, \text{ где } \sigma_j^2 = \rho_j^2 \cdot (\cos \beta_j + i \cdot \sin \beta_j) = |\sigma_j|^2,$$

где  $0 \leq \beta_j < 2\pi$ .

Откуда через формулу Муавра имеем:

$$|\sigma_j| = \rho_j \cdot (\cos \beta_j / 2 + i \cdot \sin \beta_j / 2), \quad |A| = R \cdot \{|\sigma_j|\} \cdot R'.$$

В частности, сохраняется соотношение  $|A|^2 = A'A$ . В адекватном варианте все геометрические характеристики, в том числе углы и их функции, распадаются на вещественную и мнимую составляющие, хотя конечные (целые) характеристики можно представлять в наиболее удобной форме. Адекватный вариант в простейшем случае применяется в комплексной евклидовой геометрии на плоскости, включая скалярную евклидову тригонометрию. Тождества Коши ( $n > 2$ ) и Лагранжа ( $n = 3$ ) сохраняют форму (142).

## 4.10.2. Эрмитов вариант

В *эрмитовом пространстве* осуществляется эрмитова комплекси-фикация вещественной евклидовой геометрии. *Проективный* сферический тензорный угол - эрмитова матрица  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\Phi} + i\tilde{\Gamma} = \tilde{\mathcal{E}}^*$ . Её собственные значения суть вещественные сферические скалярные углы  $\varepsilon_j$ . Напротив, *моторный* сферический тензорный угол - косо-эрмитова матрица  $\mathcal{E} = \Phi + i\Gamma = -\mathcal{E}^*$ . Модуль и евклидова норма в эрмитовом варианте тождественны. Тригонометрические неравенства и нормы матричных объектов сохраняют свое значение в эрмитизированных вариантах. Заметим также, что *принцип бинарности* остаётся в силе как при адекватной, так и при эрмитовой ком-плексификации, поскольку все необходимые предпосылки для него в комплексной тензорной тригонометрии сохраняются. Эрмитовы аналоги клеточных формул (399), (400)

получаются через соответствующие преобразования комплексных единичных векторов:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} + \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = 1$ ;

$$\cos \alpha = \cos \varepsilon \cdot \exp(i\beta_c), \quad \sin \alpha = \sin \varepsilon \cdot \exp(i\beta_s),$$

$$\cos \alpha \cdot \overline{\cos \alpha} = \cos^2 \varepsilon, \quad \sin \alpha \cdot \overline{\sin \alpha} = \sin^2 \varepsilon.$$

$$[\cos \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_1^* + \overleftarrow{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{u}_2^* - I^{2 \times 2} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - I^{2 \times 2} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - 1 & \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1} + \cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} \\ \hline \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 & \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 + \overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline + |c_1| & \overline{s_1} \\ \hline s_1 & - |c_1| \\ \hline \end{array},$$

$$- \det [\cos \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |c_1|^2 + s_1 \cdot \overline{s_1} = \cos^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \Delta = \cos^2 \varepsilon_{12},$$

$$\Delta = 1/2 \sin 2\varepsilon_1 \cdot \sin 2\varepsilon_2 \cdot (1 - \cos \beta_{c_1} \cdot \cos \beta_{c_2} \cdot \cos \beta_{s_1} \cdot \cos \beta_{s_2}).$$

$$[\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \overleftarrow{\mathbf{u}_2} \cdot \mathbf{u}_2^* - \overleftarrow{\mathbf{u}_1} \cdot \mathbf{u}_1^* = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2^* - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1^* =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \alpha_2 \cdot \overline{\cos \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\cos \alpha_1} & \cos \alpha_2 \cdot \overline{\sin \alpha_2} - \cos \alpha_1 \cdot \overline{\sin \alpha_1} \\ \hline \overline{\cos \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\cos \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 & \overline{\sin \alpha_2} \cdot \sin \alpha_2 - \overline{\sin \alpha_1} \cdot \sin \alpha_1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline - |s_2| & \overline{c_2} \\ \hline c_2 & + |s_2| \\ \hline \end{array},$$

$$- \det [\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = |s_2|^2 + c_2 \cdot \overline{c_2} = \sin^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \Delta = \sin^2 \varepsilon_{12},$$

$$(\Delta = 0 \leftrightarrow \cos \beta_{c_1} \cdot \cos \beta_{c_2} \cdot \cos \beta_{s_1} \cdot \cos \beta_{s_2} = +1, \quad \Delta \neq 0 \leftrightarrow \varepsilon_{12} \neq \varepsilon_2 - \varepsilon_1). \quad (436)$$

В тригонометрическом базисе имеем клеточные формы:

$$[\cos \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \cos \varepsilon_{12} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline +1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array}, \quad [\sin \tilde{\mathcal{E}}_{12}]^{2 \times 2} = \sin \varepsilon_{12} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & +1 \\ \hline +1 & 0 \\ \hline \end{array}. \quad (437), (438)$$

В эрмитовом варианте все канонические W-формы в тригонометрическом базисе вещественны и сохраняют свой прежний вид. Преобразование к каноническим W-формам осуществляет унитарная модальная матрица  $U_W$ . На эрмитовой плоскости в базисе диагонального косинуса допускается эрмитово угловое смещение между парными функциями (косинус-синус, секанс-тангенс) с фазовым углом  $\beta$ :

$$\begin{array}{c}
 \text{Exp } (-i\beta/2) \quad \text{Ref } \{B^* \cdot B\}_i \quad \text{Exp } (+i\beta/2) \quad \text{Ref } \{B^* \cdot B\}_c \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ \hline \sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline +\cos \varepsilon & \frac{\sin \varepsilon}{\exp(-i\beta)} \\ \hline \sin \varepsilon & -\cos \varepsilon \\ \hline \end{array}
 \quad (439)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Exp } (-i\beta/2) \quad \text{Rot } \{\mathcal{E}\}_i \quad \text{Exp } (+i\beta/2) \quad \text{Rot } \{\mathcal{E}\}_c \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(-\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(\frac{i\beta}{2}) \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \hline +\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|c|} \hline \exp(\frac{i\beta}{2}) & 0 \\ \hline 0 & \exp(-\frac{i\beta}{2}) \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|} \hline \cos \varepsilon & \frac{-\sin \varepsilon}{\exp(-i\beta)} \\ \hline +\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \\ \hline \end{array}
 \quad (440)
 \end{array}$$

Поэтому эрмитов тригонометрический базис, помимо диагональности косинуса (как прежде), должен обеспечивать ещё и вещественность W-формы. Эрмитово угловое смещение с фазовым углом  $\beta_j$  на каждой собственной эрмитовой плоскости устраняется специальным эрмитово ортогональным (унитарным) модальным преобразованием  $\text{Exp } i\beta/2$  с приведением тригонометрических функций к вещественным каноническим формам.

Эрмитовы аналоги тождеств Коши ( $n > 2$ ) и Лагранжа ( $n = 3$ ) в соотношении (142) реализуются для координат пары векторов на эрмитовой плоскости при замене простого транспонирования на эрмитово. Заметим также, что эрмитов угол в общем случае есть весьма сложная функция от координат векторов или линейоров. Лишь в тригонометрическом базисе он приобретает вещественную каноническую форму тензорного сферического угла.

### 4.10.3. Псевдоизация в бинарных комплексных пространствах

Далее особое значение имеет псевдоизация. Пусть изначально задано бинарное комплексное аффинное пространство с индексом  $q$ . Оно обозначается как  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$ . В конкретном базисе аффинное пространство может рассматриваться как линейное. В частности,  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$  в некотором псевдоединичном базисе  $\tilde{E}_0$  представляется прямой суммой, состоящей из  $n$ -мерного вещественного и  $q$ -мерного мнимого линейных подпространств:

$$\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle \cong \langle \mathcal{A}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{A}^q \rangle \cong \text{CONST.} \quad (441)$$

Здесь постоянны, во-первых, суммарное пространство и, во-вторых, размерности слагаемых подпространств. В  $\langle \mathcal{A}^{n+q} \rangle$  допускаются такие линейные преобразования  $V$ , которые сохраняют бинарную структуру:

$$\begin{matrix} V \\ \begin{array}{|c|c|} \hline V_{11} & iV_{12} \\ \hline iV_{21} & V_{22} \\ \hline \end{array} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \tilde{E}_0 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline I^{n \times n} & Z^{n \times q} \\ \hline Z^{q \times n} & \pm I^{q \times q} \\ \hline \end{array} \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{E} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline V_{11} & \pm V_{12} \\ \hline iV_{21} & \pm V_{22} \\ \hline \end{array} \end{matrix}. \quad (442)$$

Первые  $n$  столбцов матрицы базиса задают  $\langle \mathcal{A}^n \rangle$ , остальные  $q$  столбцов задают  $\langle i\mathcal{A}^q \rangle$ . Соответственно модальная матрица  $V^{-1}$  (с такой же матричной структурой) приводит какой-либо бинарный базис  $\tilde{E}$  к простейшей диагональной (псевдоединичной) форме. Кроме того, она осуществляет пассивное модальное преобразование координат линейного элемента:  $\mathbf{z}\{\tilde{E}\} = V^{-1} \cdot \mathbf{z}\{\tilde{E}_0\}$ .

Бинарный комплексный базис в тригонометрических формах представляется псевдоединичными матрицами двух типов:

$$\tilde{E}_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & i \\ \hline \end{array} = \sqrt{I^{\oplus}}, \quad \tilde{E}_0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -i \\ \hline \end{array} = \sqrt{I^{\oplus}}^{-1}. \quad (443),$$

$$(444)$$

В любом бинарном комплексном базисе  $\tilde{E}$  линейный элемент пространства представляется прямой суммой, состоящей из вещественной и мнимой аффинных проекций:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \oplus i\mathbf{y} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x} \\ \hline i\mathbf{y} \\ \hline \end{array}. \quad (445)$$

Ввиду аффинности пространства в целом подпространства-слагаемые и базисы могут подвергаться операции параллельного переноса на элемент (445). Применение базиса (443) целесообразно для представления канонических форм в псевдогиперболическом варианте тригонометрических функций с собственными углами  $i\phi_j$ . Он тождествен (271). Применение базиса (444) целесообразно для представления канонических

форм в *псевдосферическом* варианте тригонометрических функций с собственными углами  $i\gamma_j$ . Он тождествен базису, обратному (271). Вместе с тем, оба базиса эрмитово сопряжены по отношению друг к другу. Имеем соответствующие модальные преобразования:

$$\sqrt{I^{\oplus -1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & -\sin \varphi_j \\ \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix} \cdot \sqrt{I^{\oplus}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(-i\varphi_j) & \operatorname{sh}(-i\varphi_j) \\ \operatorname{sh}(-i\varphi_j) & \operatorname{ch}(-i\varphi_j) \end{pmatrix},$$

что отвечает преобразованию (322);

$$\sqrt{I^{\oplus}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \gamma_j & \operatorname{sh} \gamma_j \\ \operatorname{sh} \gamma_j & \operatorname{ch} \gamma_j \end{pmatrix} \cdot \sqrt{I^{\oplus -1}} = \begin{pmatrix} \cos i\gamma_j & -\sin i\gamma_j \\ \sin i\gamma_j & \cos i\gamma_j \end{pmatrix},$$

что отвечает преобразованию (323). Кроме того, базис (444) целесообразен как исходный для изложения псевдоевклидовой геометрии в форме *комплексного* квазиевклидова изоморфизма. А именно, введём для комплексных линейных элементов бинарного аффинного пространства  $\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle$ , выраженных в базисе (444), скалярное произведение с единичным метрическим тензором:

$$z_1' \cdot z_2 = x_1' \cdot x_2 - y_1' \cdot y_2.$$

При этом пространство трансформируется в *комплексное квазиевклидово пространство с индексом q*. Оно представляется прямой сферически ортогональной суммой, состоящей из вещественного и мнимого евклидовых подпространств:

$$\langle \mathcal{E}^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \langle i\mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST}. \tag{446}$$

Здесь знак  $\oplus$ , как и ранее, обозначает сферически ортогональное суммирование. По существу это есть комплексное бинарное *квазиевклидово* пространство, задаваемое рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$



## 4.11. Тригонометрия общих псевдоевклидовых пространств

### 4.11.1. Овеществление бинарного евклидова пространства

Далее применим к бинарному комплексному квазиевклидову пространству, в том числе к исходному комплексному базису в нём, овеществляющее модальное преобразование:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \tilde{\mathbf{E}}_0 = \{\mathbf{I}\}. \quad (447)$$

Последнее выходит за пределы множества допустимых ортогональных модальных преобразований данного квазиевклидова пространства, так как  $\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}' \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \neq \mathbf{I}$ . Ввиду этого пространство становится иным.

Теперь оно есть вещественное *псевдоевклидово* пространство с рефлектор-тензором  $\mathbf{i}$ , вместе с тем, - метрическим тензором  $\mathbf{I}^{\oplus}$  и с индексом  $q$ :

$$\mathbf{z}' \cdot \mathbf{z} = \text{const} = (\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \mathbf{u})' (\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \mathbf{u}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{u} \quad (448)$$

Здесь тот же самый линейный элемент  $\mathbf{z}$  выражен в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{I}\}$  и обозначается как « $\mathbf{u}$ ». В скобках осуществляется пассивное преобразование координат. Базис  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  в (447) выражен в единичном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Но, если другой исходный координатный базис  $\tilde{\mathbf{E}}$  связан с вышеуказанным универсальным (декартовым) базисом  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  каким-либо вещественным линейным преобразованием  $V$ , то в нём базисы  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  выражаются в виде:

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{V}\}_{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (449)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_0 = \{\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_1}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{V}^{-1} \cdot \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}\}_{\tilde{\mathbf{E}}}^{-1} \mathbf{V} \}_{\tilde{\mathbf{E}}} \{\mathbf{V}^{-1}\}_{\tilde{\mathbf{E}}} \tilde{\mathbf{E}} = \{\mathbf{V}^{-1} \sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}\}_{\tilde{\mathbf{E}}} \tilde{\mathbf{E}} \quad (450)$$

Здесь матрица преобразования  $\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}}^{-1}$  переводится из координат базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  в координаты базиса  $\tilde{\mathbf{E}}$ , как это осуществляется при последовательных модальных преобразованиях. Скалярное

произведение в новом единичном базисе по-прежнему то же, поскольку оно определяет исконную метрическую величину элемента.

$$\mathbf{z}' \mathbf{z} = \text{const} = (\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \mathbf{V} \mathbf{a})' (\sqrt{\mathbf{I}^{\oplus}} \mathbf{V} \mathbf{a}) = \mathbf{a}' \{ \mathbf{V}' \mathbf{I}^{\oplus} \mathbf{V} \} \mathbf{a} \quad (451)$$

Здесь тот же самый линейный элемент  $\mathbf{z}$  выражен в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}$  и обозначается как « $\mathbf{a}$ ». В скобках осуществляется пассивное преобразование координат. Ввиду несогласованности преобразования  $\mathbf{V}$  с метрическим рефлектор-тензором  $\mathbf{I}^{\oplus}$  последний претерпевает общее конгруэнтное преобразование

$$\mathbf{G}^{\oplus} = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{V}. \quad (452)$$

Например, такой метрический тензор формально действует в гауссовых криволинейных координатах псевдоевклидова пространства (с искажённой метрикой) как функция от его точечного элемента. Взаимный метрический тензор выражается в виде:

$$\hat{\mathbf{G}}^{\oplus} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \{ \mathbf{G}^{\oplus} \}^{-1}. \quad (453)$$

В свою очередь, геометрия с постоянным метрическим тензором (452) изоморфна псевдоевклидовой геометрии с теми же параметрами размерностей  $n$  и  $q$ . Она по сути есть линейное отображение последней во множестве допустимых аффинных базисов:

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_{af} \rangle \equiv \langle \mathbf{T}_{af} \rangle \cdot \tilde{\mathbf{E}}, \quad (454)$$

где формально действует метрический тензор  $\mathbf{G}^{\oplus}$ .

$$\mathbf{T}'_{af} \cdot \mathbf{V}' \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}_{af} = \mathbf{T}'_{af} \cdot \mathbf{G}^{\oplus} \cdot \mathbf{T}_{af} = \mathbf{G}^{\oplus}. \quad (455)$$

Из (455) следует, что  $\det \mathbf{T}_{af} = \pm 1$ . Чтобы  $\mathbf{T}_{af}$  входило в группу непрерывных преобразований, примем  $\det \mathbf{T}_{af} = +1$ . Исходя из этого зададим группу аффинных тригонометрических преобразований  $\langle \mathbf{T}_{af} \rangle$ , соответствующую тензору  $\mathbf{G}^{\oplus}$ , в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}'_{af} \cdot \mathbf{G}^{\oplus} \cdot \mathbf{T}_{af} &= \mathbf{G}^{\oplus} = \text{Const}, \\ \det \mathbf{T}_{af} &= +1. \end{aligned} \right\} \quad (456)$$

## 4.11.2. Группа псевдоевклидовых ротаций

Положим в (452)  $V = R$ . Тогда имеем метрический тензор пространства как симметричный рефлектор-тензор:

$$G^{\oplus} = R' \cdot I^{\oplus} \cdot R = \{\sqrt{I}\}_S. \quad (457)$$

Напомним, что  $\{\sqrt{I}\}_S$  обозначает некоторый симметричный квадратный корень из  $I$ . Метрический тензор (457) действует в *ориентированном* псевдоевклидовом пространстве. *Группа ротационных тригонометрических преобразований*  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учётом (456) в виде условий:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T &= \{\sqrt{I}\}_S = \text{Const.} \\ \det T &= +1 \end{aligned} \right\} \quad (458)$$

В частности, метрический тензор (457) формально действует в ориентированном псевдоевклидовом пространстве, задаваемом срединным рефлектором тензорного угла  $\tilde{I}$ , если  $R = R_w$

$\tilde{E} = R_w \cdot \tilde{E}_1 = \{R_w\}_{\tilde{E}_1}$ . В этом пространстве осуществляется гиперболическая интерпретация собственных косогональных проекторов. Отметим также, что допустимые тригонометрические преобразования в псевдоевклидовом пространстве определяются равнозначно как внутренней, так и внешней мультипликацией:

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T &= \{\sqrt{I}\}_S, \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S &= I, \\ T' \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' &= T', \\ \{\sqrt{I}\}_S \cdot T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' &= I, \\ T \cdot \{\sqrt{I}\}_S \cdot T' &= \{\sqrt{I}\}_S \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

(Соответствующий аналог в евклидовом пространстве:  $R'R = RR' = I$ .) Положив в (452)  $V = I$ , возвращаемся в *неориентированное* псевдоевклидово пространство с метрическим рефлктор-тензором  $I^{\oplus}$ . Группа ротационных тригонометрических преобразований  $\langle T \rangle$  в нём задаётся с учетом (458), (459) в виде условий.

$$\left. \begin{aligned} T' \cdot I^{\oplus} \cdot T &= I^{\oplus} = T \cdot I^{\oplus} \cdot T' = \text{Const.} \\ \det T &= +1 \end{aligned} \right\} \quad (460)$$

Она известна как группа *однородных непрерывных преобразований Лоренца*. Установим изоморфную связь между группами аффинных  $\langle T_{af} \rangle$  и ротационных  $\langle T \rangle$  тригонометрических преобразований:

$$\begin{aligned} (V^{-1} \cdot T \cdot V)' \cdot \{V' \cdot I^{\oplus} \cdot V\} \cdot (V^{-1} \cdot T \cdot V) &= \{V' \cdot I^{\oplus} \cdot V\}, \\ T_{af} &= V^{-1} \cdot T \cdot V \end{aligned} \quad (461)$$

Эта формула показывает, что обе группы подобны. Группа  $\langle T \rangle$  является трансляцией группы  $\langle T_{af} \rangle$  из аффинных базисов  $\{T_{af}\}$  в псевдодекартовы базисы  $\{T\}$ . Заметим, что евклидовым аналогом  $\langle T_{af} \rangle$  является группа:  $\langle T_{af} \rangle \equiv V^{-1} \cdot \langle \text{Rot } \Phi \rangle \cdot V$  в *евклидовой* версии тригонометрии. (Тригонометрические функции в ней выражаются в аффинной форме.)

Псевдоевклидово пространство в каком-либо псевдодекартовом базисе представляется *гиперболически ортогональной суммой*, состоящей из двух вещественных евклидовых подпространств:

$$\langle P^{n+q} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle \oplus \langle \mathcal{E}^q \rangle \equiv \text{CONST} \quad (462)$$

Здесь и далее знак  $\oplus$  обозначает гиперболически ортогональное суммирование по отношению к метрическому рефлктор-тензору. Например,  $\langle \text{im } B_p \oplus \text{ker } B_p \rangle \equiv \langle P^{r+(n-1)} \rangle$  по отношению к тензору  $\text{Ref } \{ \cos \Phi_{B_p} \}^{\oplus} = \text{Ref } \{ \text{ch } \Gamma_{B_p} \}^{\oplus}$ . Согласно (462), псевдоевклидово пространство имеет бинарную структуру, задаваемую  $I^{\oplus}$  и конкретным псевдодекартовым базисом. Одновалентный тензор в этом пространстве расщепляется на две гиперболически ортогональные проекции – на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Двухвалентные тензоры расщепляются на

пару однородных проекций  $n \times n$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ) и  $q \times q$  (бипроекция на  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ ) и пару смешанных проекций  $n \times q$  и  $q \times n$ . В частности, при  $q = 1$  это суть  $n \times n$ -тензор, скаляр и пара векторов. Для одновалентных тензоров определяются внутренняя и внешняя мультипликации:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot \mathbf{a}_2 &= c_{12}, \\ A_1' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot A_2 &= C_{12}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\Gamma^{\oplus}} \cdot T \cdot \{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2'\} \cdot T' \cdot \sqrt{\Gamma^{\oplus}} &= B_{12}, \\ \sqrt{\Gamma^{\oplus}} \cdot T \cdot \{A_1 A_2'\} \cdot T' \cdot \sqrt{\Gamma^{\oplus}} &= B_{12}. \end{aligned} \right\}$$

(463), (464)

Как видно, указанные мультипликации транслируются именно в исходное бинарное комплексное евклидово пространство (446). Вследствие этого они применимы в формулах евклидовой геометрии, включая тензорную тригонометрию. В частности, применяя к этим мультипликциям соотношения (120), (121), получаем псевдоаналоги данных формул:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= \text{tr } B_{12}, \quad \mathbf{a}' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot \mathbf{a} = \text{tr} \{ \sqrt{\Gamma^{\oplus}} \cdot T \cdot \{\mathbf{a} \mathbf{a}'\} \cdot T' \cdot \sqrt{\Gamma^{\oplus}} \}, \\ k(C_{12}, t) &= k(B_{12}, t), \quad k[(A' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot A), t] = k\{(\sqrt{\Gamma^{\oplus}} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{\Gamma^{\oplus}}), t\}. \end{aligned} \right\}$$

(465)

Для векторных и линейных объектов в псевдоевклидовом пространстве эти скалярные характеристики являются по сути соответствующими псевдонормами.

При  $t = r$  определяются псевдоминорант и дианаль:

$$\mathcal{M}^2(r) A = k\{(\sqrt{\Gamma^{\oplus}} \cdot T \cdot A A' \cdot T' \cdot \sqrt{\Gamma^{\oplus}}), r\} = \det(A' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot A), \quad (466)$$

$$\mathcal{N}(r) B_{12} = k(B_{12}, r) = \det C_{12}.$$

Одновалентные тензорные объекты *псевдоортогональны*, если  $C_{12} = Z$  ( $c_{12} = 0$ ), - по аналогии с (155) - и хотя бы частично псевдоортогональны. если  $\det C_{12} = 0$ , - по аналогии с (229). Сферическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися оба в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  или оба в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Гиперболическая ортогональность может иметь место между объектами, находящимися порознь в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ . Множество универсальных базисов (352) тождественно множеству

согласованных с тензором  $I^{\oplus}$  ортосферических ротационных матриц:

$$\left. \begin{aligned} \langle \tilde{E}_{I^{\oplus}} \rangle &\equiv \langle \text{Rot } \Theta \cdot \{I\} \equiv \langle \{ \text{Rot } \Theta \} \rangle, \\ \text{Rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{Rot } \Theta &= I^{\oplus} = \text{Rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{Rot}' \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (467)$$

Согласованные с метрическим тензором общие ротационные матрицы и рефлекторы не изменяют ни внутренние мультипликации (463), ни собственные углы между линейными объектами (векторами, линеорами, планарами). Заметим, что рефлекторы в  $\langle P^{n+q} \rangle$  могут быть сферически, гиперболически и псевдоевклидово ортогональными.

Линейное (централизованное) псевдоевклидово пространство по отношению к метрике распадается на 3 характеристических подпространства. Первое из них - разделительная плоская (коническая) гиперповерхность, или вещественный изотропный конус второго порядка:

$$\rho^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = 0 \quad (\text{для тензора } I^{\oplus}),$$

$$\rho^2 = \mathbf{x}' \cdot G^{\oplus} \cdot \mathbf{x} = 0 \quad (\text{для тензора } G^{\oplus} = \text{Const}).$$

Здесь  $\rho^2$  обозначает квадратичный метрический инвариант. Как отсюда видно, на конусе метрика везде нулевая. Вершина изотропного конуса находится в начале координат. Его образующие - центральные прямые лучи. В свою очередь, изотропный конус как гиперповерхность разделяет пространство на две части ( $n \geq q$ ). Это внешняя полость конуса, где  $\rho^2 > 0$ . (Внешняя полость — объединённое множество всех  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ .) И это внутренняя полость конуса, где  $\rho^2 < 0$ . (Внутренняя полость - объединённое множество всех  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ .)

При  $q = 1$ , а именно в пространстве Минковского, последняя как геометрический объект распадается ещё на 2 части. Как принято в СТО, это верхняя внутренняя полость, или конус будущего - с положительным направлением оси  $\vec{y}$  и это нижняя внутренняя полость, или конус прошлого - с отрицательным направлением оси  $\vec{y}$ . В данном случае линейное подпространство  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  вырождается в направленную ось  $\vec{y}$  (в СТО - стрела времени). Кроме того, внешняя и внутренняя полости содержат одно- и двухсвязный гиперболоиды

Минковского — гиперповерхности с инвариантами  $\rho^2 > 0$  и  $\rho^2 < 0$ .

В псевдоевклидовом пространстве метрические инварианты первой степени, как и метрика, — либо вещественные (вне конуса), либо мнимые (внутри конуса), либо нулевые (на конусе). Вещественные инварианты определяются также как *пространствуподобные*; мнимые инварианты определяются также как *времениподобные* (как принято в СТО). В случае же  $n < q$  понятия "вещественный" и "мнимый" меняются местами, если пространство мнимонизируют. (Изоморфизм между псевдоевклидовым и псевдоантиевклидовым пространствами.)

Собственные углы в ротациях (460), в формах  $W$  или аналогичные углы между линейными объектами - вещественные величины, но либо сферические ( $\theta_k$  или  $\theta_i$ ), либо гиперболические ( $\gamma_j$ ). Покажем это исходя из ротационных матриц (460) самой простой структуры, согласованной с знакопостоянными и знакопеременными фрагментами тензора  $\Gamma^{\oplus}$ . В диагональных формах таких нетривиальных структур нет. Однако в формах  $W$  таковыми структурами являются только два чистых ротационных тригонометрических типа, изученные ранее:

$$T = \{\text{Rot}(\pm \Theta)\}_{can} \leftrightarrow \{\Gamma^{\oplus}\} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (468)$$

$$T = \{\text{Roth}(\pm \Gamma)\}_{can} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}. \quad (469)$$

Из этих прародительских структур путём допустимого модального преобразования  $R_w'$  порождаются два *чистых* типа ротационных матриц  $T$ , выражаемых в каком-либо универсальном базисе как базисе своего действия, а именно:

$$\left. \begin{aligned} R_{W(1)} \cdot \{\text{Rot} \Theta\}_{can} \cdot R'_{W(1)} &= \text{Rot} \Theta = T_{(1)}, \\ T_{(1)} \cdot T_{(1)} &= I = T_{(1)} \cdot T_{(1)}', \quad \det T_{(1)} = +1; \end{aligned} \right\} \quad (470)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{W_{(2)}} \cdot \{ \text{Roth } \Gamma \}_{\text{can}} \cdot R'_{W_{(2)}} = \text{Roth } \Gamma = T_{(2)}, \\ T_{(2)} = T'_{(2)}, \quad \det T_{(2)} = +1. \end{aligned} \right\} \quad (471)$$

Заметим, что применение модальных матриц, несогласованных с тензором  $I^{\oplus}$ , привело бы к изменению последнего, то есть к нарушению условия (460). Следовательно, группа  $\langle T \rangle$  включает как чистые типы две существующие разновидности вещественных ротационных матриц бинарной тригонометрической структуры:  $\text{Rot } \Theta$  и  $\text{Roth } \Gamma$ . В самом общем случае эти матрицы в преобразовании  $T$  могут образовывать какую-либо последовательность частных сферических и гиперболических ротаций, выраженных в универсальном базисе:

$$T = \dots \cdot \text{Rot } \Theta_{(t-1)t} \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \dots \quad (472)$$

Однако все частные ротации должны быть тригонометрически согласованы с тензором  $I^{\oplus}$ . Данное согласование, имея ввиду структуры ротационных матриц и тензора, означает следующее. Сферические ротации, согласно (468), должны отвечать либо положительной, либо отрицательной единичным частям тензора, либо быть их произведением, необходимо коммутативным:

$\text{Rot } \Theta$			$I^{\oplus}$	
$\text{Rot } \Theta^{n \ n}$	$Z^{n \ q}$		$I^{n \ n}$	$Z^{n \ q}$
$Z^{q \ n}$	$\text{Rot } \Theta^{q \ q}$		$Z^{q \ n}$	$-I^{q \ q}$

(473)

Гиперболические ротации, согласно (469), своими тригонометрическими клетками должны отвечать двум равным блокам, взятым из положительной и отрицательной единичных частей рефлектор-тензора. В частности, при  $q = 1$  они имеют формы (363), (364).



### 4.11.3. Полярное представление псевдоевклидовых ротаций

Любое линейное непрерывное *геометрическое* преобразование в пределах одной из вышеуказанных полостей изотропного конуса всегда сводится к какому-то тригонометрическому преобразованию из группы  $\langle T \rangle$ . При этом в универсальном базисе любое общее преобразование (460) через полярное представление сводится к произведению одной ортосферической и одной гиперболической ротационных матриц:

$$T = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \bar{\Gamma}, \quad (474), (475)$$

где  $\text{Roth } \Gamma = \sqrt{TT'} = \sqrt{\text{Roth } 2\Gamma}$ ,

$$\text{Roth } \bar{\Gamma} = \sqrt{T'T} = \sqrt{\text{Roth } 2\bar{\Gamma}},$$

$$\text{Rot } \Theta = \sqrt{TT'}^{-1} \cdot T = \text{Roth } (-\Gamma) \cdot T = T \cdot \sqrt{T'T}^{-1} = T \cdot \text{Roth } (-\bar{\Gamma}),$$

$$\text{Roth } \bar{\Gamma} = \text{Rot}' \Theta \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta.$$

(476)

Полярное представление выводится следующим образом:

$$T = \sqrt{TT'} \cdot R = R \cdot (R' \cdot \sqrt{TT'} \cdot R) = R \cdot \sqrt{T'T},$$

$$(R' \cdot TT' \cdot R = T'T), \quad \det T = +1 \rightarrow \det R = +1 \rightarrow R = \text{Rot } \Theta,$$

$$(460) \rightarrow (TT') \cdot I^{\oplus} \cdot (TT') = I^{\oplus} = (T'T) \cdot I^{\oplus} \cdot (T'T) \rightarrow (471) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rightarrow TT' = \text{Roth } 2\Gamma, \quad \sqrt{TT'} = \text{Roth } \Gamma \rightarrow (474). \\ \rightarrow T'T = \text{Roth } 2\bar{\Gamma}, \quad \sqrt{T'T} = \text{Roth } \bar{\Gamma} \rightarrow (475) \rightarrow (476) \end{cases}$$

Отметим, что в силу (476),  $\bar{\Gamma}$  и  $\Gamma$  имеют один и тот же спектр  $\langle \gamma_j \rangle$ .

Далее полярное представление-произведение общего ротационного преобразования применяется для упрощённого описания многоступенчатых гиперболических ротаций и, в частности, таковых релятивистских движений в СТО, а также многоступенчатых движений во внешних и во внутренних сферической и гиперболической геометриях. Заметим, что в классическом полярном представлении модального линейного преобразования

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{V}\mathbf{V}'} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}} \tag{477}, (478)$$

матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}}$  выражены в координатах какого-либо единичного декартова базиса. В этом базисе они являются самостоятельными преобразованиями - ортогональным и симметричным. Но по геометрической сути полярного представления эти преобразования действуют последовательно, а именно оотогональное — в базисе  $\check{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{1}\}$ , симметричное - в базисе  $\check{\mathbf{E}} = \mathbf{R} \cdot \check{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{R}\}$ . Поэтому второе преобразование  $\sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}}$  нужно транслировать из координат базиса  $\check{\mathbf{E}}$  в координаты базиса  $\check{\mathbf{E}}_1$ . Тогда обе матрицы в произведении (477) выражаются в исходном базисе  $\check{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{R} \cdot \sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}} \cdot \mathbf{R}') \cdot \mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{V}\mathbf{V}'} \cdot \mathbf{R}$ . Если же использовать матрицы преобразований в координатах базисов, где они действуют, то есть в исходном виде, то тогда их последовательность в полярном представлении становится обратной, что соответствует (478). В этом заключается суть различия между формами (477) и (478). Тот же смысл наглядно проявляется при пассивном преобразовании координат одного и того же линейного элемента:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \sqrt{\mathbf{V}'\mathbf{V}}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1s)}, \tag{479}$$

где каждое из обратных преобразований действует в своем базисе.

В линейном псевдоевклидовом пространстве выделим множество правых псевдодекартовых базисов  $\langle \check{\mathbf{T}} \cdot \check{\mathbf{E}}_1 \rangle$ . Все они ротационно конгруэнтны. Переход из  $\check{\mathbf{E}}_1$  к новому базису  $\check{\mathbf{E}}$ , согласно (474), (475), представляется в двух полярных формах:

$$\check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{T}} \cdot \check{\mathbf{E}}_1 = \text{Roth } \check{\mathbf{T}} \cdot \text{Rot } \check{\mathbf{E}}_1 = \{\text{Roth } \check{\mathbf{T}} \cdot \text{Rot } \check{\mathbf{E}}_1\}, \tag{480}$$

$$\check{\mathbf{E}} = \check{\mathbf{T}} \cdot \check{\mathbf{E}}_1 = \text{Rot } \check{\mathbf{E}}_1 \cdot \text{Roth } \check{\mathbf{T}} = \{\text{Rot } \check{\mathbf{E}}_1 \cdot \text{Roth } \check{\mathbf{T}}\}. \tag{481}$$

Здесь ротационные матрицы  $\text{Rot } \check{\mathbf{E}}_1$  и  $\text{Roth } \check{\mathbf{T}}$  выражены в координатах какого-либо единичного универсального базиса. В этом базисе их можно рассматривать как самостоятельные ротационные преобразования - сферическое и гиперболическое. Но в полярном представлении они действуют последовательно. А именно, сферическое - в базисе  $\check{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{1}\}$ , гиперболическое - в

базисе  $\check{E}_{1u} = \text{Rot } \Theta \cdot \check{E}_1 = \{ \text{Rot } \Theta \}$ . После трансляции второго преобразования из  $\check{E}_{1u}$  в  $\check{E}_1$  обе матрицы выражаются в  $\check{E}_1$ , что соответствует (480). Если же использовать матрицы преобразований в координатах базисов, где они действуют, то тогда их последовательность в полярном представлении становится обратной, что соответствует (481). Итак, истинно гиперболическая ротация Roth  $\Gamma$  совершается в базисе  $\check{E}_{1u}$  после сферической ротации исходного базиса  $\check{E}_1$ .

В матрице любого псевдодекартового базиса  $\check{E}_1$  первые  $n$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)}$ , остальные  $q$  столбцов задают собственное  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)}$  метрического тензора  $I^\oplus$  в сумме (452). С учётом структуры (473) для матрицы  $\text{Rot } \Theta$  при преобразовании из любого универсального базиса (467) новые собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  задаются тождественно столбцами любой из матриц:  $\check{E}$ ,  $T$  и  $\text{Roth } \Gamma$ . Например, из (480) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{E}^n \rangle &\equiv \text{im } [\check{E}]^{(n+q) \times n} \equiv \text{im } [\Gamma]^{(n+q) \times n} \equiv \text{im } [\text{Roth } \Gamma]^{(n+q) \times n}, \\ \langle \mathcal{E}^q \rangle &\equiv \text{im } [\check{E}]^{(n+q) \times q} \equiv \text{im } [T]^{(n+q) \times q} \equiv \text{im } [\text{Roth } \Gamma]^{(n+q) \times q}, \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

где в квадратных скобках взяты либо первые  $n$ , либо остальные  $q$  столбцов. В частности, в пространстве Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  при преобразовании из универсального базиса новые  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и ось  $\vec{y}$  задаются тождественно столбцами матриц:  $\check{E}$ ,  $T$  и  $\text{Roth } \Gamma$ . Последняя как *элементарная* имеет структуру (363), (364). Смысл сказанного состоит в том, что любое тригонометрическое преобразование (460), применительно к собственным евклидовым подпространствам  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  в целом как множествам точечных элементов, в исходном универсальном базисе сводится к их чисто гиперболической ротации, взятой из представления (474). В частности, это справедливо для оси  $\vec{y}$  в пространстве Минковского, так как она в целом является собственным подпространством тензора  $I^\oplus$ . Следовательно, используя полярное представление (474), любое сложное тригонометрическое преобразование  $T$  универсального базиса, например многоступенчатое, для собственных подпространств метрического тензора сводится к их чисто гиперболической ротации  $\text{Roth } \Gamma = \sqrt{\text{TT}'}$ . Напомним, что матрицы всех

псевдодекартовых базисов (которые, в частности, задают собственные подпространства метрического рефлектор-тензора) выражаются в исходном универсальном базисе  $\check{E}_1 = \{I\}$ . В универсальных координатных базисах в СТО описываются мировые события (процессы и фиксации) именно с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя. Среди них  $\check{E}_1 = \{I\}$  - простейший по форме исходный базис. В частности, в универсальных базисах реализуется сферическо-гиперболическая аналогия любого конкретного типа, например синус-тангенсная.

Кроме того, заметим, что при  $q = 1$  матрица  $\text{Rot } \Theta^{q^q}$  в (473) вырождается в единицу. Поэтому в  $\langle P^{n+1} \rangle$  непрерывное преобразование Лоренца любой точки на оси  $\vec{Y}$ , независимо от исходного базиса, сводится к её чисто гиперболической ротации - либо как тензорного точечного объекта (при пассивном преобразовании координат), либо как производящего точечного элемента (при активном преобразовании координат). Дадим два примера, которые представляют интерес в СТО и в гиперболической геометрии, а именно:

$$\mathbf{u}^{(j)} = T_{1j}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth}^{-1} \check{\Gamma}_{1j} \cdot \text{rot}^{-1} \Theta_{1j} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \{ \text{roth}^{-1} \check{\Gamma}_{1j} \}_{\check{E}_{1j}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad (483)$$

где  $\mathbf{u}^{(1)}$  - точечный объект, выраженный в базисе  $\check{E}_1$ , причём  $\mathbf{u}^{(1)} \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;

$\mathbf{u}^{(j)}$  - тот же точечный объект в базисе  $\check{E}_j = T_{1j} \cdot \check{E}_1$ .

( $T_{1j}$  — пассивное преобразование координат объекта.)

$$\mathbf{u}_j = T \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{1j} \cdot \text{rot } \Theta_{1j} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{1j} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (484)$$

где  $\mathbf{u}^{(1)}$  - производящий точечный элемент, причём  $\mathbf{u}_1 \in \langle \vec{y} \rangle^{(1)}$ ;

$\mathbf{u}_j$  — результирующий точечный элемент.

( $T$ - активное преобразование координат элемента.)

Вышеизложенное представление общего тригонометрического преобразования собственных подпространств в целом их гиперболической ротацией, вообще говоря, не относится к каким-либо подмножествам этих подпространств, например к координатным осям базиса. Из (481), где матрицы выражены в базисах своего действия, но даны в обратном порядке, следует,

что координатные оси последовательно подвергаются сферической ротации  $\text{Rot } \Theta$  и гиперболической ротации  $\text{Roth } \tilde{\Gamma}$ .

Матрица преобразования  $T$  может рассматриваться как двух-валентный, псевдоевклидово квазибиортогональный тензор в силу (460). То же относится и к матрице базиса  $\tilde{E} = T \cdot \{1\}$ . Этот тензор расщепляется на пару однородных и пару смешанных тензоров, то есть однородные ( $n \times n$  и  $q \times q$ ) и смешанные ( $n \times q$  и  $q \times n$ ) бипроекции:

$[\tilde{E}]^{n \times n}$  - проекция на исходное  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  пространствуподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ ;  
 $[\tilde{E}]^{q \times q}$  - проекция на исходное  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  времениподобных единичных векторов базиса как проекции базиса на новое  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$ ;  
 $[\tilde{E}]^{n \times q}$  и  $[\tilde{E}]^{q \times n}$  — аналогичные смешанные проекции.

При транспонировании матрицы базиса проекции отражаются зеркально относительно её главной диагонали. Это, например, происходит при изменении последовательности многоступенчатых гиперболических ротаций на противоположную.

#### **4.11.4. Многоступенчатые гиперболические ротации**

Многоступенчатые гиперболические ротации в случае тригонометрической согласованности ротационных матриц между собой остаются чисто гиперболическими. Это соответствует в ротациях (363), (364) и в СТО для суммируемых движений (скоростей) равенству направляющих косинусов с точностью до общего коэффициента « $\pm 1$ ». При этом гиперболические углы в итоговой ротационной матрице суммируются алгебраически, то есть с учётом знака данного коэффициента. Но если частные ротационные матрицы не согласованы тригонометрически между собой (хотя все они согласованы с рефлектор-тензором), то тогда многоступенчатые гиперболические ротации сводятся, как правило, к общему тригонометрическому преобразованию, в том числе в полярных формах (474), (475). Пусть в каком-либо единичном базисе  $\{1\}$  заданы матрицы частных гиперболических ротаций:

$$\text{Roth } \Gamma_{12}, \text{Roth } \Gamma_{23}, \dots, \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t}.$$

Как преобразования они осуществляются последовательно в базисах:

$$\tilde{E}_1 = \{I\}, \quad \tilde{E}_2 = \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{t-1} = \{\text{Roth } \Gamma_{(t-2)(t-1)}\}_{(\tilde{E}_{t-2})} \cdot \tilde{E}_{t-2}.$$

После трансляции матриц частных ротаций из координат базисов, где они действуют, в координаты исходного базиса  $\tilde{E}_1$ , получаем формулу итогового многоступенчатого преобразования базиса

$$\tilde{E}_t = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(t-1)t} \cdot \tilde{E}_1. \tag{485}$$

Например, её можно доказать по индукции, начиная с  $t = 3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_3 &= \{\text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23}, \text{Roth}^{-1} \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \{\text{Roth } \Gamma_{12}\}_{(\tilde{E}_1)} \cdot \tilde{E}_1 = \\ &= \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{E}_1. \end{aligned} \tag{486}$$

В формулах (485), (486) в итоге имеет место обратный порядок расположения частных гиперболических матриц, так как они задают последовательные преобразования базиса в координатах собственных единичных базисов.

В свою очередь, координаты тензорных объектов преобразуются *пассивно*, но в прямом порядке расположения матриц:

$$\mathbf{u}^{(t)} = \text{Roth } (-\Gamma_{(t-1)t}) \cdot \dots \cdot \text{Roth } (-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth } (-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \tag{487}$$

$$\mathbf{u}^{(3)} = \text{Roth } (-\Gamma_{23}) \cdot \text{Roth } (-\Gamma_{12}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{Roth } (-\Gamma_{23}) \cdot \mathbf{u}^{(2)}. \tag{488}$$

Здесь модальные матрицы также выражены в координатах собственных единичных базисов  $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots, \tilde{E}_{t-1}$ , то есть как они были заданы исконно в единичном базисе  $\{I\}$ .

В псевдоевклидовой геометрии матрица чисто гиперболической ротации - либо симметричная, либо нет, но всегда простая. Всё зависит от того, в каком базисе она действует и выражается. Общее правило тут такое. Эта матрица всегда симметричная в любом псевдодекартовом базисе *своего* действия  $\tilde{E} = T \cdot \tilde{E}_1$  как модальная.

В координатах же исходного базиса  $\tilde{E}_1$  при  $T \notin \langle \text{Rot } \Theta \rangle$  она несимметричная. Матрицы вида  $\{T \cdot \text{Roth } \Gamma \cdot T^{-1}\}_{\tilde{E}_1}$  и  $\{\text{Roth } \Gamma\}_{\tilde{E}_1}$  представляют одну и ту же гиперболическую ротацию, заданную соответственно в универсальном базисе и в псевдодекартовом базисе своего действия. Простая матрица гиперболической

ротации также принадлежит группе Лоренца. Её W-форма и собственные углы  $\gamma_j$  — те же, что и у симметричной матрицы. Это выделяет множество чисто гиперболических ротаций с простыми матрицами в группе Лоренца.

Аналогичные выводы относятся к сферическим ротациям  $\{\mathbf{T} \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \mathbf{T}^{-1}\}_{\tilde{\mathbf{E}}}$  и  $\{\text{Rot } \Theta\}_{\tilde{\mathbf{E}}}$ .

Они, как и гиперболические ротации, могут быть выражены либо в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ , либо в базисе своего действия  $\tilde{\mathbf{E}}$ .

При *активном* многоступенчатом гиперболическом ротационном преобразовании производящего точечного элемента в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  частные модальные матрицы образуют обратный порядок, так как те же матрицы действуют последовательно в своих базисах:

$$\mathbf{u}_i = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \dots \cdot \text{Roth } \Gamma_{(i-1)i} \cdot \mathbf{u}_1, \quad (489)$$

$$\mathbf{u}_3 = \text{Roth } \Gamma_{12} \cdot \text{Roth } \Gamma_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \{\text{Roth } \Gamma_{23}\}_{\tilde{\mathbf{E}}_2} \cdot \mathbf{u}_2. \quad (490)$$

Все вышеуказанные соотношения (485) - (490) выражают частные случаи общего *правила многоступенчатых линейных преобразований*. Например, аналогичные последовательности из сферических ротационных матриц составляются в евклидовой геометрии для многоступенчатых сферических движений. Для анализа многоступенчатых гиперболических ротаций используется полярное представление

$$\tilde{\mathbf{E}}_i = \text{Roth } \Gamma \cdot \text{Rot } \Theta \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \text{Rot } \Theta \cdot \text{Roth } \tilde{\Gamma} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1, \quad (491)$$

$$\mathbf{u}^{(j)} = \text{Roth } (-\tilde{\Gamma}) \cdot \text{Rot } (-\Theta) \cdot \mathbf{u}^{(i)} = \{\text{Roth } (-\tilde{\Gamma})\}_{\tilde{\mathbf{E}}_{10}} \cdot \mathbf{u}^{(10)}, \quad (492)$$

$$\mathbf{A}^{(j)} = \text{Roth } (-\tilde{\Gamma}) \cdot \text{Rot } (-\Theta) \cdot \mathbf{A}^{(i)} = \{\text{Roth } (-\tilde{\Gamma})\}_{\tilde{\mathbf{E}}_{10}} \cdot \mathbf{A}^{(10)}. \quad (493)$$

Таким образом, двух- и многоступенчатые гиперболические ротации в общем случае разлагаются на две составные ротации чистых типов: сферическую и гиперболическую.

Согласно (491) во *втором* варианте, сначала осуществляется внутренняя сферическая ротация на угол  $\Theta$  исходного базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  вместе с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (на  $\Theta^{n \times n}$ ) и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)}$  (на  $\Theta^{q \times q}$ ). При этом указанные собственные подпространства в целом как множества остаются постоянными. Затем осуществляется

гиперболическая ротация на угол  $\tilde{\Gamma}$  смещённого базиса  $\tilde{\tilde{E}}_{1u}$  вместе с  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^n \rangle^{(1u)}$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^q \rangle^{(1u)}$ . Именно так она воспринимается из  $\tilde{\tilde{E}}_{1u}$ . Но в  $\tilde{E}_1$  эта же ротация воспринимается как на тензорный угол  $\Gamma$  по *первому* варианту (491).

В формулах (492), (493) выражены соответствующие изменения координат одновалентного тензорного объекта (линейного элемента  $u$  или линеора  $A$ ) Эти изменения геометрически воспринимаются так, как если объект сначала был подвергнут сферической ротации на угол  $\Theta$ , а затем гиперболической ротации на угол  $\tilde{\Gamma}$ . Но последняя из  $\tilde{E}_1$  воспринимается как ротация  $\Gamma$ . В пространстве Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$  как пространстве событий СТО это изменение первоначальной сферической ориентации на угол  $\Theta$  неточечного объекта в евклидовом подпространстве в результате последовательного сложения скоростей с отличающимися направлениями является тоже релятивистским эффектом (именуемым по физической терминологии как *буст*), равно как и гиперболический характер закона сложения скоростей. В свою очередь, в общем псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+q} \rangle$  изменяется внутренняя сферическая ориентация гиперболических проекций тензорного объекта в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (на угол  $\Theta^{n \times n}$ ) и в  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  (на угол  $\Theta^{q \times q}$ ) относительно декартовых осей базиса этих подпространств. При противоположной последовательности частных ротаций имеем:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E} &\rightarrow \tilde{E}' \quad (\Gamma \rightarrow \Gamma'), \\ [\tilde{E}]^{n \times q} &\rightarrow \{[\tilde{E}]^{q \times n}\}', \\ \Gamma &\rightarrow \tilde{\Gamma}. \end{aligned} \right\}$$

(494)

(Последнее объясняет дополнительное обозначение для угла  $\tilde{\Gamma}$ .)

Обратим также внимание на то, что многоступенчатые ортосферические ротации, в соответствии с их структурой (473), имеют конечным результатом опять-таки ортосферическую ротацию.

Многоступенчатые гиперболические ротации точечного элемента последовательно производят реперные точки (вершины) каких-либо геометрических фигур, например гиперболических многоугольников. Для реализации последних



необходимое условие — замкнутость цикла гиперболических ротаций

$$\prod_{k \geq 1} \text{Roth } \Gamma_{(k)} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \text{ где } \mathbf{u}_1 \text{ принадлежит } \langle \mathcal{E}^{n,(1)} \rangle \text{ или } \langle \mathcal{E}^{q,(1)} \rangle$$

В силу непрерывности частных ротаций такие централизованные фигуры расположены в одной из полостей изотропного конуса - там, где находится элемент  $\mathbf{u}_1$ , причем  $\rho(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}_1) = \text{const}$ . Фигуры и их геометрия реализуются на какой-либо гиперboloидной поверхности с заданным инвариантом  $\rho$ . Непрерывные преобразования Лоренца включают в себя тригонометрические ротации  $\langle T \rangle$  и параллельные переносы. Они осуществляют любые непрерывные движения в псевдоевклидовой геометрии.

С другой стороны, однородные преобразования Лоренца  $\langle T \rangle$ , используемые активно, осуществляют движения производящего точечного элемента ( $\mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u}_1$ ) на той же гиперboloидной (псевдосферической) поверхности

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{t=1}^q y_t^2 = \rho^2(\mathbf{u}_1) = \text{const}, \tag{495}$$

где  $\rho^2(\mathbf{u}_1)$  — квадратичный метрический инвариант. Эта централизованная гиперповерхность находится либо во внешней полости конуса ( $\rho^2 > 0$ ), либо во внутренней полости конуса ( $\rho^2 < 0$ ), либо она есть конус ( $\rho = 0$ ). Она же как многообразие есть функция от метрического инварианта. Метрика псевдосферической гиперповерхности — внешняя, псевдоевклидова. Ее родственные подмножества - псевдосферические  $m$ -поверхности меньшей размерности и псевдоокружности ( $m = 1$ ) С точки зрения аффинной геометрии они же суть гиперboloидные поверхности и гиперболы. Каждую из них можно представить как гиперповерхность в некотором своём подпространстве  $\langle P^{n-q} \rangle \subset \langle P^{n-q} \rangle$ , где  $1 \leq n' \leq n, 1 \leq q' \leq q$ . В частности, любая гипербола на гиперповерхности (495) принадлежит некоторой своей псевдоплоскости

## 4.12. Тригонометрия псевдоевклидова пространства Минковского

### 4.12.1. Проективные тригонометрические модели сопутствующих гиперболических геометрий

В  $\langle \mathbb{R}^{n+1} \rangle$  реализуется псевдоевклидова геометрия Минковского. Две псевдосферические гиперповерхности в нём ( $n > 2, q = 1$ ), отличающиеся знаком квадратичного инварианта (+ или —), в аффинном смысле, суть пара сопутствующих гиперboloидов. Геометрическим путём они производятся сферической ротацией относительно направленной оси  $\vec{u}_s$  числом степеней свободы ( $n - 1$ ) соответственно одной времениподобной гиперболы (например правой) и двух пространствуподобных гипербол (верхней и нижней) — см. рис. 3. Первый из них (топологически односвязный, с инвариантом  $\rho^2 = + \mathbb{R}^2$ ) находится во внешней полости конуса. Второй из них (топологически двухсвязный, с инвариантом  $\rho^2 = - \mathbb{R}$ ) находится по отдельности в двух внутренних полостях конуса - верхней и нижней. В метрическом смысле эти объекты представляют собой две гиперпсевдосферы — одна с вещественным ( $\pm R$ ), а другая с мнимым ( $\pm iR$ ) радиусом. (В том же смысле изотропный конус есть гиперпсевдосфера нулевого радиуса.). Они известны как гиперboloиды Минковского I и II. На этих сопутствующих гиперboloидах реализуются особые *внешние гиперболические геометрии* с псевдоевклидовой метрикой в  $\langle \mathbb{R}^{n+1} \rangle$ . Их название обусловлено тем, что гиперболические траектории на гиперboloидах Минковского - геодезические линии (в указанной *внешней* метрике).

Если некая гиперболическая траектория проходит по какой-либо псевдосфере меньшей размерности ( $1 < n' < n$ ), принадлежащей гиперboloиду Минковского, то она и на данной поверхности остаётся геодезической. При  $n' = 1$ , то есть на собственной секущей псевдоплоскости, остаётся только гипербола, сама по себе. Здесь на псевдоплоскости в координатах  $(x, y)$  легко определяется её псевдоевклидова протяжённость, так как длина данной кривой остаётся той же.

*Централизованные* геодезические движения производящего элемента  $\mathbf{u}_1$  (рис. 4) по гиперboloиду с инвариантом  $\rho(\mathbf{u}_1)$

осуществляет ротационная матрица-функция  $\text{roth } \Gamma = F(\gamma)$ , согласно структуре (363), (364). *Нецентрализованное* геодезическое движение производящего элемента  $\mathbf{u} = T \cdot \mathbf{u}_1$  по тому же гиперboloиду осуществляет ротационная матрица  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\mathbf{E}_1}$ , или  $\{T \cdot \text{roth } \Gamma \cdot T^{-1}\}_{\mathbf{E}_1}$ , где  $\mathbf{E} = T \cdot \mathbf{E}_1$ . Причём  $\gamma$  изменяется непрерывно от 0 до  $+\infty$  ( $du > 0$ ) или от 0 до  $-\infty$  ( $du < 0$ ). Протяжённость геодезической траектории на обоих гиперboloидах определяется формально также, как псевдоевклидова длина гиперболической дуги в пределах псевдоплоскости. А именно, как  $a = R \cdot \gamma$  (на гиперboloиде II) и как  $ia = iR \cdot \gamma$  (на гиперboloиде I). Выражение для данной характеристики протяжённости «a» тождественно таковому для меры Ламберта, принятой в гиперболической неевклидовой геометрии.

Для двухсвязного гиперboloида II этот факт объясняется тем, что внешняя гиперболическая геометрия на нём изоморфна в целом (а, следовательно, и в малом) внутренней гиперболической геометрии Лобачевского — Больяи при одних и тех же  $n$  и  $R$ . Причём различие геометрий на *верхней* и на *нижней* частях гиперboloида II заключается только в перемене знаков перед гиперболическими углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  (обращении ротационной матрицы  $\text{roth } \Gamma$ ) для зеркально симметричных движений на них относительно гиперплоскости  $\langle \mathcal{E}^{n,1} \rangle$ . Но при этом всегда для этих углов при  $du > 0$  применяется знак «+», а при  $du < 0$  применяется знак «—». Углы  $\Gamma$  и  $(-\Gamma)$  имеют тождественный вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_a$ . То же относится к двум соответствующим антиподным частям гиперболического пространства Лобачевского — Больяи. Последнее, как и гиперboloид II, по сути двухсвязное.

Изоморфизм в целом внешней геометрии на гиперboloиде II и внутренней геометрии Лобачевского — Больяи наиболее просто доказывают тем, что они обе приводятся центральными проективными преобразованиями к одной и той же форме - модели Клейна внутри овального абсолюта Кэли. Для внешней геометрии на гиперboloиде II модель Клейна (внутри абсолюта) есть её центральное проективное отображение (рис. 4) на проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ». С тригонометрической точки зрения модель Клейна (внутри абсолюта) есть её тангенсное отображение в векторной форме ( $\gamma \rightarrow \text{th } \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или тангенсная проекция на централизованную « $\mathcal{E}^n$ ». Для геометрии Лобачевского - Больяи модель Клейна есть её

центральное проективное отображение на указанную проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ». (Заметим, что впервые эту модель для неё предложил Бельтрами.) Все эти отображения по отношению к гиперплоскости проектирования - двухсторонние и двухсвязные.

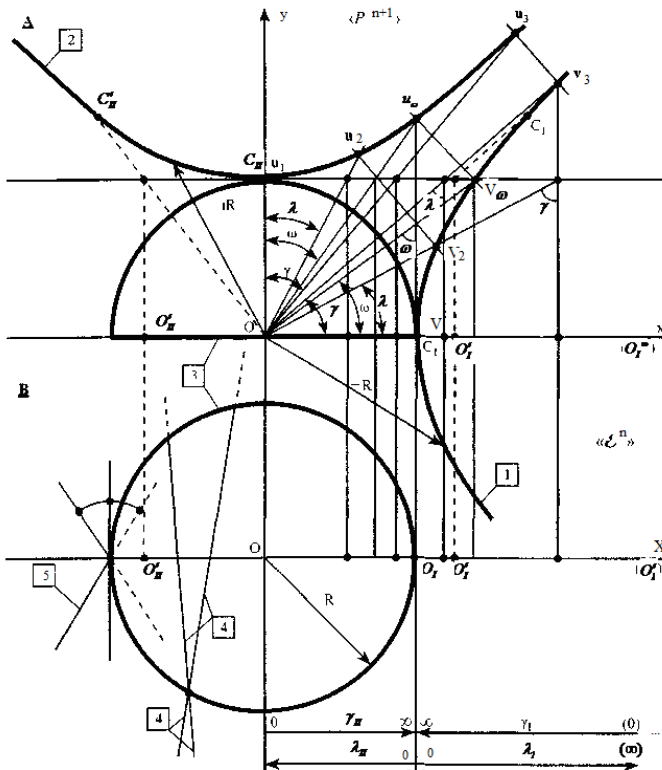


Рис. 4. А) Тригонометрические соответствия точек гиперboloидов Минковского I и II в псевдоплоскости ротации.

В) Проективные модели Клейна гиперboloида II (тангенсная) и I (котангенсная), относительно овального абсолюта Кэли, на проективной гиперплоскости.

(1) гиперboloид I (2) гиперboloид II, (3) абсолют Кэли, (4) пара смежно параллельных прямых (геодезических) внутри и вне абсолюта, (5) различные варианты соответствий прямых внутри и вне абсолюта.

Общим для них является то, что мера Ламберта трансформируется в проективную меру. Кроме того, изоморфизм в целом как известно, включает одну и ту же топологию геометрических пространств с точностью до их гомеоморфизма. В рассматриваемом случае это есть топология внутренней области овального абсолюта Кэли. Поскольку последняя не включает в себя абсолют, то есть не имеет границы, то такая область проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » топологически эквивалентна « $\mathcal{E}^n$ ». (То же относится к двум антиподным пространствам Лобачевского - Больяи и к обеим частям гиперблоида II.) Все они по сути имеют топологию « $\mathcal{A}^n$ ».

Внутри овального абсолюта на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » действует проективная мера в тангенсной форме « $R \cdot \text{th } a / R$ », отождествляемая с евклидовой мерой. В модели Клейна внутри абсолюта проективная мера ограничена радиусом  $R$ . При  $R \rightarrow \infty$  ее гиперблоид II и пространство Лобачевского - Больяи трансформируются в « $\mathcal{E}^n$ ». Если  $\gamma = a/R \rightarrow 0$ , то есть либо  $a \rightarrow 0$ , либо  $R \rightarrow \infty$ , то  $R \cdot \text{th } a / R \rightarrow a$ ; при этом в обоих вариантах меры Ламберта и Евклида совпадают.

В свою очередь, для односвязного гиперблоида I тождественность псевдоевклидовой меры и меры Ламберта объясняется тем, что внешняя гиперболическая геометрия на нём изоморфна в целом ( $a$ , следовательно, и в малом) внутренней цилиндрической гиперболической геометрии. Цилиндрическое гиперболическое пространство отличается от пространства Лобачевского-Больяи с той же метрикой только в большом, а именно тем, что оно топологически эквивалентно цилиндрическому евклидову пространству или наиболее общо - аффинному цилиндру .

Обе гиперболические геометрии с цилиндрической топологией центральными проективными преобразованиями приводятся к одной и той же форме - модели Клейна вне овального абсолюта Кэли. Для внешней геометрии на гиперблоиде I модель Клейна (вне абсолюта) есть её центральное проективное отображение (рис.4) на проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ».

С тригонометрической точки зрения модель Клейна (вне абсолюта) есть её котангенсное отображение в векторной

форме ( $\gamma \rightarrow \text{cth } \gamma, \cos \alpha_k = \text{const}_k$ ), или котангенсная проекция на централизованную « $\mathcal{E}^n$ ». В другой, *тангенсной цилиндрической модели*, ортогональной предыдущей, тангенсная проекция отображается на боковую гиперповерхность централизованного гиперцилиндра с радиусом  $R$  и с высотой  $2R$ , расположенного между двумя овальными абсолютами. Для цилиндрической гиперболической геометрии модель Клейна (вне абсолюта) есть её центральное проективное отображение на указанную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ »; а цилиндрическая модель есть её последующее гомеоморфное отображение на цилиндрическую евклидову гиперповерхность радиуса  $R$ . Все отображения в модели Клейна (вне абсолюта) по отношению к гиперплоскости проектирования -двухсторонние и односвязные. Последнее свойство обусловлено непрерывностью отображения гиперблоида  $I$  на обе стороны области гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ », находящейся вне абсолюта. (Топологическая связь между обеими этими сторонами модели Клейна осуществляется через бесконечно удалённую условную границу проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ ».) Для цилиндрической модели это же утверждение вполне очевидно. Гиперблоид  $I$  и соответственно цилиндрическое гиперболическое пространство аналогично, но не топологически разделяются на две половинные части - с положительным и с отрицательным направлением оси  $\vec{Y}$ . Цилиндрическая модель также разделяется пополам гиперплоскостью « $\mathcal{E}^n$ ». Выбор знака для углов движений  $\Gamma$  и  $\gamma$  осуществляется, согласно вышеуказанной схеме, с учётом направления оси  $\vec{Y}$  (по знаку  $dy$ ). В модели Клейна вне овального абсолюта на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » действует проективная мера в котангенсной форме « $R \cdot \text{cth } a/R$ », отождествляемая с евклидовой мерой. При  $R \rightarrow \infty$  гиперблоид  $I$  и цилиндрическое гиперболическое пространство вырождаются вместе с абсолютом в бесконечно удалённую границу проективной гиперплоскости. В цилиндрической модели на внутренней области между двумя овальными абсолютами на проективном гиперцилиндре действует проективная мера в тангенсной форме, а именно как « $R \cdot \text{th } a/R$ », отождествляемая с евклидовой мерой. Если  $a \rightarrow 0$ , то  $\gamma = a/R \rightarrow 0$  и  $R \cdot \text{th } a/R \rightarrow a$ ; при этом меры Ламберта и Евклида совпадают. В этом отображении  $(n-1)$ -мерный центральный пояс гиперблоида  $I$  и цилиндрической модели (радиуса  $R$ ) является

автоморфизмом. Причём в модели Клейна вне абсолюта ему соответствует бесконечно удалённая граница проективной гиперплоскости.

Кроме того, гиперboloид I и цилиндрическое гиперболическое пространство, в принципе, возможно отобразить изометрично в целом на гиперпсевдосферу Бельтрами с теми же параметрами  $n$  и  $R$ . При этом последняя рассматривается как топологически односвязная гиперповерхность (эквивалентная цилиндрической гиперповерхности). Гиперболическая геометрия на её верхней и нижней частях увязывается воедино с положительными, нулевым и отрицательными значениями угла  $\gamma$ . (Доказательство данного изоморфизма приводится в главе 6А Приложения.)

Уравнение овального абсолюта для всех вышеуказанных гиперболических геометрий (2-х внешних и 2-х внутренних)

одно и то же:  $\sum_{k=1}^n x_k^2 = R^2$ . Сумма 2-х сопутствующих

неевклидовых пространств и разделительного изотропного конуса отображается двухсторонне на *всю* проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^n$ ». Точно также сумма двух гиперboloидов Минковского и изотропного конуса отображается двухсторонне на *всю* « $\mathcal{E}^n$ ». Данная конструкция в  $\langle \mathbb{P}^{n+1} \rangle$ , состоящая из гиперboloидов I и II Минковского, в том числе в её тангенсо-котангенсном отображении на проективную гиперплоскость или в её тангенсном отображении на проективный гиперцилиндр по сути олицетворяет некое трёхсвязное гиперболическое пространство. Его внешняя, односвязная часть трактуется как гиперболическое неевклидово пространство с парой антиподных «чёрных дыр». Роль последних выполняют антиподные пространства Лобачевского — Больяи.

В моделях Клейна оба сопутствующие гиперболические пространства трансформируются в области проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » внутри и вне абсолюта радиуса  $R$ . С учётом последнего факта, если прямые (геодезические) и их формальные продолжения в односторонних тангенсо-котангенсных моделях Клейна (внутри и вне абсолюта) рассматриваются вместе, то тогда их *смежная параллельность* в сопутствующих пространствах обуславливается на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » пересечением в какой-либо точке абсолюта (рис. 4). В цилиндрической модели оба сопутствующие гиперболические пространства трансформируются в два

основания и в боковую поверхность *проективного гиперцилиндра*. Диаметр и высота этого гиперцилиндра равны  $2R$ .

Обе сопутствующие геометрии вместе с геометрией изотропного конуса целесообразно, на наш взгляд, трактовать как *единую гиперболическую геометрию* с группой Лоренца, задаваемой рефлектор-тензором в псевдоевклидовом пространстве Минковского.

Гиперболическая траектория, или геодезическая (прямая) на гиперболоидах I и II всегда представима как их сечение некоторой централизованной псевдоплоскостью. Ей же тождественна собственная псевдоплоскость тензорного угла  $\Gamma$  в ротационной матрице  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\mathbb{E}_2}$ , в которой проецируются тригонометрические функции тангенса и котангенса. (Именно в этом состоит причина прямолинейности проекций геодезических в обеих моделях Клейна!) При этом гиперболический угол в матрице может быть задан параметрически через псевдоевклидову длину геодезической:  $\gamma = a/R$  и  $\Gamma = A/R$ . В модели Клейна внутри абсолюта это сечение-геодезическая вместе с псевдоплоскостью (в границах сечения) проецируется в евклидов отрезок прямой, проходящей через круг (2-х мерный вариант) или шар (3-х мерный вариант) в овальном абсолюте. Геодезическая в целом отображается соответствующей хордой. Заметим также, что углы между геодезическими в модели Клейна не искажаются при условии, что проективные прямые (для гиперболоида II) или их формальные продолжения (для гиперболоида I) встречаются в центре абсолюта. Для гиперболоида II это тождественно принадлежности его *центрального* элемента  $i$ , (рис. 4) пересекающимся геодезическим. В данном случае матрица ротации  $\{\text{roth } \Gamma\}_{\mathbb{E}_1}$  симметрична и имеет каноническую форму (363), задавая движение центрального исходного элемента  $\mathbf{u}_1$  по централизованной геодезической. Для произвольного элемента этого гиперболоида  $\mathbf{u}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}_1$  ротационная матрица преобразуется координатно пассивно из симметричной, а именно как  $\{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12}\}_{\mathbb{E}_1}$ , задавая его движение по произвольной геодезической. Здесь и выше излагается общий подход к изучению гиперболических движений в обеих сопутствующих неевклидовых геометриях как некоторого тригонометрического подмножества преобразований Лоренца, то



есть с применением тензорной тригонометрии объемлющего псевдоевклидова пространства.

Если геометрический центр хорды исходя из центра проектирования принять за точку начала отсчёта функции  $\text{th } \gamma < +1$  (условно справа) и  $\text{th } \gamma > -1$  (условно слева), то евклидово расстояние по *внутренней* хорде-геодезической в модели Клейна внутри абсолюта связано с истинным псевдоевклидовым или неевклидовым расстоянием мерой Ламбертапо формуле ( $\gamma_2 > \gamma_1$ ):

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_2 - a_1 = R \cdot (\gamma_2 - \gamma_1) = R \cdot \gamma_{12} = l/2 R \cdot \left[ \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_2}{1 - \text{th } \gamma_2} - \ln \frac{1 + \text{th } \gamma_1}{1 - \text{th } \gamma_1} \right] = \\ &= R \cdot \ln \sqrt{\frac{(1 + \text{th } \gamma_2) \cdot (1 - \text{th } \gamma_1)}{(1 - \text{th } \gamma_2) \cdot (1 + \text{th } \gamma_1)}}. \end{aligned}$$

Соответственно евклидово расстояние по *внешней* хорде-геодезической в модели Клейна вне абсолюта связано с неевклидовым расстоянием соотношением:

$$a_{12} = R \cdot \ln \sqrt{\frac{(\text{cth } \gamma_2 + 1) \cdot (\text{cth } \gamma_1 - 1)}{(\text{cth } \gamma_2 - 1) \cdot (\text{cth } \gamma_1 + 1)}}.$$

Обе формулы получены тригонометрическим способом, но изначально они исходят из проективного мероопределения Кэли - Клейна. (Формула искажения сферического угла между прямыми в модели Клейна в гиперболической трактовке дана в гл. 7А Приложения.)

Идея о возможности реализации полноценной геометрии, в которой не выполняется V-ый постулат Евклида, или справедлива гипотеза острого угла Саккери, на особой поверхности - "какой-нибудь мнимой сфере" (цитата), как известно, впервые была высказана Ламбертом в 1766 г. Впоследствии было уточнено, что первое её свойство относится к геометрии в большом, а второе - к геометрии в малом. (В полноценной геометрии - с полной свободой движения фигур они взаимосвязаны.) Тауринус предложил аналитическую модель такой геометрии на *гипотетической сфере мнимого радиуса* по аналогии с геометрией вещественной сферы. Тем самым он обосновал непротиворечивость её планиметрии. *Интуитивная* геометрия Ламберта-Тауринуса предвосхитила *реальную* геометрию на гиперboloиде II и исторически предшествующий ей вещественный изоморфизм - геометрию Лобачевского - Больяи. Бельтрами показал её реализуемость, но

как геометрии в малом, на *особой* гиперповерхности евклидова пространства - *псевосфере* (которую ранее открыл и изучил Миндинг). Проективная модель Бельтрами - Клейна свела проблему её непротиворечивости в целом к таковой для евклидовой геометрии. Гильберт доказал невозможность реализации в трёхмерном евклидовом пространстве двумерной геометрии Лобачевского — Больяи в целом на какой-то вложенной в него *неособой* римановой поверхности, то есть как внутренней геометрии Гаусса.

Однако последнее вовсе не означает невозможность её реализации в целом на какой-то неособой римановой поверхности, вложенной в  $(3+k)$ -мерное евклидово надпространство. Как известно, такая поверхность определяется постоянной и отрицательной римановой кривизной. Но если бы удалось описать её как вложение в евклидово надпространство *минимальной* размерности, то тогда решение *задачи Бельтрами* было бы доведено до логического конца. Конкретные результаты в этом направлении получили последовательно Блануша – для  $\langle \mathcal{E}^6 \rangle$ , Розендорн – для  $\langle \mathcal{E}^5 \rangle$  и Сабитов – для  $\langle \mathcal{E}^4 \rangle$ . (Та же проблема остаётся и для вложения неевклидовых пространств в целом.)

Хорошо известно, что определение римановой поверхности и её геометрии оторвано не от объемлющего евклидова надпространства, а только от его размерности. Апостериори размерность последнего может быть вполне определённой. С другой стороны, имманентная размерность римановой поверхности всегда одна и та же для любого её гомеоморфизма. Она совпадает с размерностью касательного евклидова пространства, обобщившего одномерную касательную к *кривой, самой по себе*. Из напрашивающейся здесь аналогии достаточно указать, что бесконечная регулярная кривая с *постоянной сферической кривизной* не реализуется на плоскости, но зато она реализуется в трёхмерном евклидовом пространстве в виде винтовой линии. Такого же типа кривая, но с *постоянной гиперболической кривизной* реализуется на псевдоплоскости в виде гиперболы. Изометричные отображения одной и той же неевклидовой геометрии на различных поверхностях: гиперboloиде II Минковского, плоскости Лобачевского — Больяи, римановой поверхности с постоянной отрицательной кривизной - отличаются весьма значительно по степени сложности и наглядности. С другой стороны, сопутствующая цилиндрическая гиперболическая геометрия реализуется как в

псевдоевклидовом пространстве — на гиперboloиде I Минковского, так и в вещественном евклидовом пространстве - на гиперпсевдосфере Бельтрами как изоморфизмы. Эти гиперболические геометрии имеют один и тот же характеристический радиус и гомеоморфны по топологии своих подпространств

Рассекая проективный гиперцилиндр какой-либо централизованной псевдоплоскостью, получаем в сечении четыре смежных бесконечных прямых в 3-х гиперболических пространствах. В данном отображении они образуют замкнутую фигуру - четырёхугольник. Его четыре вершины лежат попарно на двух овальных абсолютах - верхнем и нижнем. Каждая из этих четырёх прямых с заданным центром проектирования однозначно задаёт три других и секущую псевдоплоскость.

Точечные элементы на гиперboloидах Минковского I и II исходно определяются внешними, псевдодекартовыми координатами  $\langle x_{1,n}, y \rangle$ . например в  $\check{E}_1 = \{I\}$ . Кроме того, они также взаимно-однозначно исходно определяются специальными угловыми координатами, но уже на конкретном гиперboloиде Минковского. Последний в  $\check{E}_1$  задаётся радиус-вектором ( $iR$  - гиперboloид II,  $R$  - гиперboloид I). Для элементов гиперboloида II  $\vec{u}$  - реперная косинусная ось ( $+\vec{u}$  на верхней части и  $-\vec{u}$  на нижней части). Для элементов гиперboloида I  $\vec{u}$  - синусная ось. Внутренние угловые координаты включают в себя параметры: гиперболический угол  $\gamma$  с учётом знака для обеих частей гиперboloида (отмеряемый от реперной оси  $\vec{u}$  для гиперboloида II и от реперной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ » для гиперboloида I) и его же направляющие косинусы  $\langle \cos \alpha_{1,n} \rangle$ .

Ввиду того что

$$\sum_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k = 1,$$

для задания элемента достаточно  $n$  независимых угловых координат.

Между точками *одного и того же* гиперboloида устанавливается парное соответствие из условия равенства их дополнительных друг к другу гиперболических угловых координат и направляющих косинусов (рис.4):

$$\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 \ (\mathbf{u}_\omega \leftrightarrow \mathbf{u}_\omega, \mathbf{v}_\omega \leftrightarrow \mathbf{v}_\omega); \gamma_{12} = \lambda_{13} \leftrightarrow \lambda_{12} = \gamma_{13},$$

$$\omega = \text{Arsh } 1, \cos \alpha_k = \text{const}_k.$$

Между точками *различных* гиперboloидов I и II также устанавливается парное соответствие. Оно задаётся из условия равенства их одноимённых друг к другу гиперболических угловых координат и направляющих косинусов (рис.4):

$$\mathbf{u}_2 \leftrightarrow \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \leftrightarrow \mathbf{v}_3 (\mathbf{u}_\omega \leftrightarrow \mathbf{v}_\omega);$$

$$\gamma_{12_{II}} = \gamma_{12_I} \leftrightarrow \lambda_{12_{II}} = \lambda_{12_I}, \gamma_{13_I} = \gamma_{13_{II}} \leftrightarrow \lambda_{13_{II}} = \lambda_{13_I}, \cos \alpha_k = \text{const}_k.$$

С геометрической точки зрения такое соответствие означает зеркальную симметрию пары точечных элементов  $\mathbf{u}_I$  и  $\mathbf{v}_I$  относительно изотропного конуса.

*Отметим одно исключение:* точечный элемент  $\mathbf{u}_I$  отображается в  $\mathbf{u}_\infty$  и в  $\mathbf{v}_I$  только при задании направляющих косинусов; обратно же:

$$\mathbf{u}_\infty \rightarrow \mathbf{u}_I, \mathbf{v}_I \rightarrow \mathbf{u}_I. (\text{Но } \mathbf{v}_I \leftrightarrow \mathbf{v}_\infty, \cos \alpha_k = \text{const}_k.)$$

В связи с этим каждая прямая (геодезическая) гиперboloида II взаимно-однозначно отображается через изотропный конус в прямую (геодезическую) гиперboloида I, а в модели Клейна - через овалный абсолют. В тангенсном отображении гиперboloида II ( $\gamma_{II} \rightarrow \infty$ ) и в котангенсном отображении гиперboloида I ( $\gamma_I \rightarrow \infty, \lambda_I = 0$ ) абсолют соответствует их периферии.

При активных однородных преобразованиях Лоренца универсального базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_I = \{\mathbf{1}\}$  исходная реперная точка  $C_{II}$  на оси  $\tilde{\mathbf{y}}$ , от которой в  $\tilde{\mathbf{E}}_I$  отсчитываются углы  $\gamma_{II}$ , перемещается по гиперboloиду II в любую другую его точку  $C_{II}'$  (в пределах одной его части). При этом её исходная тангенсная проекция O в модели Клейна перемещается из центра абсолюта в соответствующую точку  $O_{II}'$  внутри абсолюта. От этой точки отсчитываются угловые расстояния (отрезки) внутри абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_{II}$  в новом псевдодекартовом базисе.

Аналогичным образом, при тех же преобразованиях  $\tilde{\mathbf{E}}_I = \{\mathbf{1}\}$  точка  $C_I$  с направляющими косинусами  $\langle \cos \alpha_{\overline{1,n}} \rangle$ , от которой в  $\tilde{\mathbf{E}}_I$  отсчитываются углы  $\gamma_I$ , перемещается по гиперboloиду I в любую другую его точку  $C_I'$  (причём  $C_I' \leftrightarrow C_{II}'$ ). При этом её исходная котангенсная проекция  $O_I^\infty$  в модели Клейна перемещается из бесконечно удалённой точки (на границе « $\mathcal{E}^n$ ») в соответствующую точку  $O_I'$  вне абсолюта. От этой точки

отсчитываются угловые расстояния (отрезки) вне абсолюта мерой Ламберта  $\gamma_I$  в новом псевдодекартовом базисе.

Следует отметить, что тензорные углы  $\Gamma$  и  $\Lambda$ , как и бесконечный прямой угол, - все в одном и том же гиперболически прямоугольном треугольнике согласованы тригонометрически между собой. В гиперболически прямоугольных треугольниках две стороны (катеты) гиперболически ортогональны (рис.4). Противолежащие этим катетам углы  $\gamma$  и  $\lambda$  по сути дополнительные друг к другу. То же относится к тензорным углам  $\Gamma$  и  $\Lambda$ . С учётом формул (356), (360) имеем:

$$\text{th}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \text{sch}(\lambda, \gamma), \quad \text{th}(\pm \Gamma, \Lambda) \equiv \text{sch}(\Lambda, \Gamma);$$

$$\text{cth}(\pm \gamma, \lambda) \equiv \text{ch}(\lambda, \gamma), \quad \text{cth}(\pm \Gamma, \Lambda) \equiv \text{ch}(\Lambda, \Gamma);$$

$$\text{sh}(\gamma, \lambda) \cdot \text{sh}(\lambda, \gamma) = 1, \quad \text{sh}(\Gamma, \Lambda) \cdot \text{sh}(\Lambda, \Gamma) = 1.$$

$$\text{ch}^2(\Gamma, \Lambda) - \text{sh}^2(\Gamma, \Lambda) = 1 = \text{cth}^2(\Lambda, \Gamma) - \text{cosh}^2(\Lambda, \Gamma);$$

$$\text{th}^2(\Gamma, \Lambda) + \text{sch}^2(\Gamma, \Lambda) = 1 = \text{sch}^2(\Lambda, \Gamma) + \text{th}^2(\Lambda, \Gamma); \text{ где } \gamma + \lambda < \infty.$$

(Следствие: *сумма гиперболических углов псевдоевклидова треугольника меньше двух прямых углов.*) Заметим, что тождественные тензорные функции приводятся в тригонометрическом базисе к разным каноническим формам (левые к обычным, правые к особым для первого случая и наоборот - для второго случая). В псевдоевклидовом пространстве Минковского, согласно (324), (326) и (363) - (365), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{roth } \Gamma &= F_1(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) = \text{ch } \Gamma + \text{sh } \Gamma \equiv F_2(\lambda, \mathbf{e}_\alpha) = \text{cth}(\pm \Lambda) + \text{cosh } \Lambda, \\ \text{defh } \Gamma &= F_3(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) = \text{sch } \Gamma + i \cdot \text{th } \Gamma \equiv F_4(\lambda, \mathbf{e}_\alpha) = \text{th}(\pm \Lambda) \pm i \cdot \text{sch } \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (496)$$

С использованием сферическо-гиперболической аналогии абстрактного типа (323) осуществляется формальный переход от моделей движения в гиперболической геометрии к моделям движения в сферической геометрии. Ранее такой же подход, но в обратную сторону применялся при выводе структур матриц гиперболических ротаций (363), (364) из уже доказанных структур матриц сферических ротаций (313). (314) с реперной осью.

Изоморфизм ротаций в объемлющем централизованном <квази-евклидовом, псевдоевклидовом> пространстве и геометрических движений на вложенной в него (сферической, псевдосферической) гиперповерхности связывает также

изоморфно внешнюю ротационную тригонометрию объемлющего пространства и внутреннюю геометрию гиперповерхности с данным инвариантом. В частности, ротационные тригонометрии в квазиевклидовом пространстве с реперной осью и в пространстве Минковского размерности  $(n + 1)$  изоморфны геометриям на  $n$ -мерной сфере и  $n$ -мерных гиперboloидах Минковского I и II (в сопутствующих  $n$ -мерных гиперболических неевклидовых пространствах) с учётом их инварианта — радиуса  $R$ .

### **4.12.2. Ротации и деформации в псевдоевклидовом пространстве Минковского**

Далее на примере простейших псевдоевклидовых пространств Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$ , где  $n \leq 3$ , покажем: как работает формула (474) для классификации псевдоевклидовых ротаций, или непрерывных однородных движений Лоренца. Конечно, данная формула применима для этого и в более сложных случаях.

При  $n = 1$  возможна только элементарная гиперболическая ротация, автоматически согласованная с рефлектор-тензором. Эта ротация реализуется геометрически как движение по гиперболе.

При  $n = 2$  возможны элементарная сферическая ротация (в пределах множества централизованных плоскостей в трёхмерной внешней полости изотропного конуса) и элементарная гиперболическая ротация (в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{y}$  в трёхмерной внутренней полости изотропного конуса). Эти ротации реализуются как движения по сферическим и гиперболическим траекториям на двумерных гиперboloидах Минковского I и II.

При  $n = 3$  возможны элементарная сферическая ротация (в пределах множества централизованных плоскостей в четырёхмерной внешней полости изотропного конуса) и элементарная гиперболическая ротация (в пределах множества централизованных псевдоплоскостей с осью  $\vec{y}$  в четырёхмерной внутренней полости изотропного конуса). Эти ротации реализуются как движения по сферическим и

гиперболическим траекториям на трёхмерных гиперболоидах Минковского I и II.

Итак, при  $n \leq 3$  и  $q = 1$  любые тригонометрические ротации Лоренца, согласно (474), сводятся к однократной элементарной ортосферической ротации  $\text{rot } \Theta$  и затем однократной элементарной гиперболической ротации  $\text{roth } \Gamma$ , согласованным с рефлектор-тензором псевдоевклидова пространства Минковского. Сферическая ротация элементарна, в силу того что  $n \leq 3$  в структуре (473). Гиперболическая ротация элементарна в любом пространстве Минковского.

В данном случае между  $\text{rot } \Theta$  и  $\text{roth } \Gamma$  имеется принципиальное отличие, заключающееся в формах их представлений. Гиперболическая ротация имеет реперную ось для отсчёта угла  $\gamma$ . Её структура (363), (364) и псевдоплоскость ротации  $\gamma$  определяются вектором направляющих косинусов (выраженных в декартовой части базиса). Форма представления  $\text{rot } \Theta$  определяется только её общей структурой (473). Например, в  $\langle P^{2+1} \rangle$  её  $2 \times 2$ -блок есть элементарная сферическая ротационная клетка. Однако в  $\langle P^{3+1} \rangle$  её  $3 \times 3$ -блок  $\text{rot } \Theta_{3 \times 3}$  целесообразно представить как сферическую ротацию с фиксированной нормальной осью  $r_N$ . Тогда структура и плоскость ротации  $\theta$  определяются вектором направляющих косинусов нормальной оси ротации  $r_N \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (выраженных в декартовой части базиса):

$$\text{rot } \Theta$$

$\cos \theta + \frac{r_1^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_1 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 - \cos \theta}$	$+r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$+r_3 + \frac{r_1 \cdot r_2}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_2^2}{1 + \cos \theta}$	$-r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	0
$-r_2 + \frac{r_1 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$+r_1 + \frac{r_2 \cdot r_3}{1 + \cos \theta}$	$\cos \theta + \frac{r_3^2}{1 - \cos \theta}$	0
0	0	0	1

(497)

Пусть  $\cos \sigma_k$  и  $\cos \bar{\sigma}_k$  ( $k = 1, 2, 3$ )- направляющие косинусы углов

$\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  из (474), (475) в структуре (363);  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  и  $\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}} = \{\cos \tilde{\sigma}_k\}$  - единичные векторы направляющих косинусов в структуре (364). Применив ротационную формулу (476), последовательно получаем:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' \Theta_{3,3} \cdot \{ \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma'} \} \cdot \text{rot} \Theta_{3,3} = \mathbf{e}_\sigma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma'} \\ \mathbf{e}_\sigma = \text{rot}' \Theta_{3,3} \cdot \mathbf{e}_{\sigma'} \end{aligned} \right\} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = \overleftarrow{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{e}').$$

(498)

В  $\langle P^{3+1} \rangle$  единичные векторы  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}}$  в силу (498) однозначно задают вектор нормальной оси ротации  $\text{rot} \Theta$  через их векторное (синусное) произведение:

$$\mathbf{r}_N = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_\sigma \otimes \mathbf{e}_{\tilde{\sigma}} = \begin{bmatrix} \cos \tilde{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_3 - \cos \tilde{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_2 \\ \cos \tilde{\sigma}_3 \cdot \cos \sigma_1 - \cos \tilde{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_3 \\ \cos \tilde{\sigma}_1 \cdot \cos \sigma_2 - \cos \tilde{\sigma}_2 \cdot \cos \sigma_1 \end{bmatrix}.$$

(499)

Векторы  $\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}}$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  образуют правую тройку, что соответствует принятому в работе направлению отсчёта угла  $\theta$  против часовой стрелки: ориентированный вектор  $\mathbf{r}_N$  задаёт правый винт ротации;

$$\|\mathbf{r}_N\| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = |\sin \theta|; \quad \text{tr rot} \Theta = 2 \cdot (\cos \theta + 1).$$

Наряду с чисто гиперболическими и сферическими ротациями в псевдоевклидовом пространстве Минковского представляют особый интерес, а именно в универсальном базисе, допустимые элементарные гиперболические деформации. В тригонометрической форме они представлены в (496). В базисе своего действия они имеют структуру типа (365) и совершаются в псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ . Направляющие косинусы для матриц  $\text{roth} \Gamma$  и  $\text{defh} \Gamma$  тождественны. В базисе диагонального косинуса эти матрицы и рефлектор-тензор имеют общую бинарно-клеточную структуру:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{defh} \Gamma\}_{\text{can}} & \{\text{roth} \Gamma\}_{\text{can}} & \mathbf{I}^{\oplus} (q=1) \\ \begin{bmatrix} \text{sch } \gamma & -\text{th } \gamma \\ \text{th } \gamma & \text{sch } \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \\ \text{sh } \gamma & \text{ch } \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$



Из прародительской структуры, аналогично (471), порождается *чистый* тип гиперболической деформационной матрицы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_w \cdot \{\text{defh } \Gamma\}_{\text{can}} \cdot \mathbf{R}_w' &= \text{defh } \Gamma, \\ \text{defh}' \Gamma \cdot \text{defh } \Gamma &= \mathbf{I} = \text{defh } \Gamma \cdot \text{defh}' \Gamma. \quad (\det \text{defh } \Gamma = +1). \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

Деформационные преобразования, конечно, не относятся к группе Лоренца, так как не удовлетворяют условию (460). Хотя при этом соотношения (500) по форме и совпадают с (470). Но согласования матриц  $\text{rot } \Phi$  и  $\text{defh } \Gamma$  с рефлектор-тензором  $\mathbf{I}^{\oplus}$  осуществляются различно. А именно, первые согласуются по его единичному блоку, а вторые согласуются по какой-либо его знакпеременной  $2 \times 2$ -клетке. Иначе говоря, первые действуют в плоскостях, а вторые - в псевдоплоскостях. Хотя матрицы  $\text{defh } \Gamma$  не удовлетворяют псевдоевклидову метрическому соотношению (460), но они же в универсальном базисе формально удовлетворяют евклидову метрическому соотношению, что следует из (500). Поэтому для этих матриц в псевдоплоскости деформации действует *перекрестный евклидов инвариант*. Согласно сферическо-гиперболической аналогии конкретного, синус-тангенсного типа в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ , имеем:

$$\begin{aligned} \text{defh } \Gamma &\equiv \text{rot } \Phi(\Gamma) \leftrightarrow \text{th } \Gamma \equiv \sin \Phi(\Gamma) \\ &\quad \updownarrow \qquad \qquad \qquad \updownarrow \\ \text{roth } \Gamma &\equiv \text{def } \Phi(\Gamma) \leftrightarrow \text{sh } \Gamma \equiv \text{tg } \Phi(\Gamma). \end{aligned}$$

Ввиду того что все матрицы действуют в одной и той же псевдоплоскости, то и согласуются с рефлектор-тензором сходным образом:

$$\begin{aligned} \text{defh } \Gamma \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \text{defh } \Gamma &= \text{rot } \Phi(\Gamma) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi(\Gamma) = \\ &= \text{roth } \Gamma \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \text{roth } \Gamma = \text{def } \Phi(\Gamma) \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \text{def } \Phi(\Gamma) = \mathbf{I}^{\oplus}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что все эти четыре соотношения в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  имеют место как в гиперболической, так и в сферической геометриях. Поэтому они представлены здесь в самом общем виде — через углы ротации  $\Gamma$  и  $\Phi$  с рефлектор-тензором  $\mathbf{I}^{\oplus} \equiv \text{Ref}$ . Основное различие между ними заключается в том, что в гиперболической геометрии в допустимом псевдодекартовом базисе в  $\langle \mathbf{P}^{n+1} \rangle$  действует только определяющее движения соотношение  $\text{roth } \Gamma \cdot \mathbf{I}^{\oplus} \cdot \text{roth } \Gamma = \mathbf{I}^{\oplus}$ , с

другой стороны, в сферической геометрии в *допустимом кваздекартовом базисе* в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  действует только определяющее движения соотношение  $\text{rot } \Phi \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi = I^{\oplus}$ . Во внешних вариантах они реализуются на собственных гиперлоидах Минковского I и II в псевдоевклидовом пространстве  $\langle P^{n+1} \rangle$  (первое) и на собственном гиперсфероиде в квазиевклидовом пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  (второе).

Основные свойства деформационных матриц и преобразований сходны с таковыми для ротационных. Но для них Правило №2, в части алгебраического суммирования тригонометрически согласованных углов-аргументов, не выполняется. (Хотя коммутативность матриц с согласованными углами сохраняется.) Деформационные матрицы целесообразно применять в  $\langle P^{n+1} \rangle$ , например, при *перекрестном* (недекартовом) проецировании, то есть при определении перекрестных координат или перекрестных проекций. Такое проецирование в  $\langle P^{3+1} \rangle$  формально математически интерпретирует лоренцево сокращение пространственных образов линейных объектов в направлении их физического движения. Согласно исконной блочной структуре (442), для деформационных матриц имеют место соотношения - аналоги (482).

### 4.12.3. Специальный математический принцип относительности

Все утверждения, относящиеся к <евклидовой, квазиевклидовой, псевдоевклидовой) геометрии за вычетом её аффинной части, имеют место именно в <декартовом, кваздекартовом, псевдодекартовом> базисе <евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова> пространства. Любая геометрия с квадратичным инвариантом (или *квадратичная геометрия*) как свод утверждений по их форме никак не связана с выбором конкретного допустимого базиса за исходный единичный базис. Иначе говоря, <евклидова, квазиевклидова, псевдоевклидова> геометрия инвариантна по отношению к преобразованиям, осуществляющим переход от одного вышеуказанного базиса к другому, то есть она инвариантна к <ортогональным, квазиортогональным, псевдоортогональным>

преобразованиям и к операции параллельного переноса в пространстве. (Ориентация в указанных пространствах сохраняется именно при непрерывных преобразованиях.)

Это *специальный математический принцип относительности*, действующий в любой плоской (квадратичной) геометрии, в частности, в псевдоевклидовой геометрии Минковского. Применительно к СТО ему тождествен *специальный физический принцип относительности Пуанкаре*. Он заключается в форминвариантности физических законов в равномерно и прямолинейно движущихся системах отсчёта (вплоть до околосветовых скоростей), или относительно преобразований Лоренца. Оба принципа связывает *физико-математический изоморфизм*.

Ротационные преобразования Лоренца в активной форме оставляют инвариантными в целом каждую полость изотропного конуса и сам конус. Но при этом собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  неинвариантны и преобразуются активно вместе с базисом. Хотя они вместе со своими координатными осями всегда находятся в своих полостях изотропного конуса - внешней и внутренней. Кроме того,  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  преобразуются активно так, что всегда составляют прямую сумму и остаются гиперболически ортогональными друг к другу. Поэтому одноиндексные  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  и  $\langle \mathcal{E}^q \rangle$  относительны, но *взаимозависимы как ортогональные дополнения в псевдоевклидовом пространстве*. В соответствии с (462) каждое из них является взаимно-однозначной функцией от другого. В СТО это соотношение даёт математическую формулировку закона Пуанкаре - Эйнштейна об относительности, взаимозависимости и единстве пространства и времени ( $n = 3$ ,  $q = 1$ ). Но само псевдоевклидово пространство  $\langle P^{n+q} \rangle$ , как и пространство-время Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{ct} \rangle$ , — в целом абсолютно, то есть оно инвариантно по отношению к преобразованиям Лоренца (как множество точек данной структуры).

В четырёхмерном пространстве-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$  законы нерелятивистской физики (механики), выраженные в инерциальных системах отсчёта, как и соответствующая *евклидово-афинная геометрия* в нём, инвариантны по форме к преобразованиям Галилея. Это *специальный принцип относительности Галилея* в общей физико-математической

форме. С математической точки зрения пространство-время Лагранжа — бинарное евклидово-аффинное пространство  $\langle \mathcal{E}^n \oplus \mathcal{A}^q \rangle$  с  $p = 3$  и  $q = 1$  с допустимыми в нём преобразованиями Галилея. Пространство-время Лагранжа в целом абсолютно, то есть инвариантно относительно последних (как множество точек данной структуры). По отношению к активным однородным преобразованиям Галилея евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в целом и скалярное время  $t$  тоже инвариантны; но стрела времени  $\vec{t}$  неинвариантна (каждый раз это какая-либо мировая линия). Она претерпевает, в том числе возможно на дифференциальном уровне, особое линейное преобразование -параллельную ротацию относительно  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (сочетающее поворот на угол  $\varphi$  от исходной  $\vec{t}$  и компенсационное растяжение с коэффициентом  $\sec \varphi$ ). Данная ротация как бы промежуточна между сферической и гиперболической. Кроме того,  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\vec{t}$  могут смещаться на вектор параллельного переноса. Евклидово подпространство и время образуют здесь единство, так как составляют прямую сумму, но они не взаимозависимы. Евклидово-аффинная геометрия по форме своих утверждений никак не связана с выбором конкретного бинарного декартово-аффинного базиса за исходный единичный базис. В универсальном базисе  $\vec{E}_i = \{I\}$ , как принято ранее, четыре координатные оси ортонормированы. Допустимые базисы связаны общими непрерывными преобразованиями Галилея. Отметим, что евклидово-аффинная геометрия пространства-времени Лагранжа (индекса 1), отвечающая принципу относительности Галилея, тождественна "параболической" геометрии Клейна из его знаменитой Эрлангенской программы. (Это было установлено в XX столетии в ряде математических исследований по неевклидовым геометриям и их связям с физикой. С другой стороны, в  $\langle P^{n+1} \rangle$  при общих непрерывных преобразованиях Лоренца тензорные объекты подвергаются относительно базиса согласованным с рефлектор-тензором элементарным ортосферической и гиперболической ротациям, а также операции параллельного переноса. При этом исходные пространственные образы объектов подвергаются элементарной гиперболической деформации.

Именно гиперболические ротации и деформации с тригонометрической точки зрения ответственны за релятивистский характер преобразований Лоренца - Пуанкаре - Эйнштейна в

абсолютном четырёхмерном пространстве-времени Минковского. Гиперболические ротации и деформации в элементарных канонических формах (363), (365) выражаются в универсальном базисе как в исходном, то есть как базисе своего действия.

Между ротационной тригонометрией в псевдоевклидовом пространстве Минковского, гиперболической геометрией на гиперблоидах Минковского I и II и гиперболической неевклидовой геометрией в сопутствующих пространственных топологических формах устанавливается отношение изоморфизма. Между сферической и гиперболической неевклидовыми геометриями на основе сферическо-гиперболической аналогии абстрактного типа устанавливается формальная взаимосвязь, позволяющая увязать их собственные движения в единой теории в рамках тензорной тригонометрии надпространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$

Вышеизложенное позволяет создать как отдельное приложение тензорные тригонометрические модели кинематических преобразований в теории относительности, а также движений в гиперболической и в сферической (эллиптической) неевклидовых геометриях.

## **Приложение 1**

# **Тригонометрические модели движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности**

## **Введение**

В Приложении излагается конкретное применение тензорной тригонометрии в элементарных ротационной и деформационной формах к теоретическому анализу движений в неевклидовых геометриях и в теории относительности. Поясним вкратце его содержание.

На основе сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа показан геометрический смысл сферического угла параллельности Лобачевского, проявляемый внешним образом в псевдоевклидовом пространстве Минковского исключительно в универсальном базисе. В СТО этот базис отвечает относительно неподвижному инерциальному наблюдателю. В отличие от своего сферического аналога-функции гиперболический угол движения имеет исконный (неискажённый) геометрический смысл в любых псевдодекартовых, или инерциальных базисах. (Глава 1А.)

Определены канонические формы тригонометрических тензоров основного движения и деформации. Показано, что именно эти тензоры обуславливают математически релятивистские эффекты замедления времени и сокращения протяжённости для движущихся объектов. Выявлены компоненты (по две проекции) этих эффектов с надлежащей тригонометрической и физической интерпретацией. (Главы 2А - 4А.)

С целью суммирования двух или любого иного количества движений (скоростей), а также для его тригонометрического анализа используется полярное разложение общего (суммарного) тензора движения. Закону суммирования движений (скоростей) придана генеральная форма, полученная в соответствии с

правилом последовательного применения линейных преобразований. Изучены четырёхмерные тензорные тригонометрические модели кинематики и динамики СТО.

Показана взаимосвязь между конкретными тригонометрическими характеристиками и хорошо известными физическими параметрами движущихся объектов - как инерциально, так и неинерциально в пространстве-времени Минковского. Изложена трактовка физического движения как гиперболической ортопроекции абсолютного движения по мировым линиям. Получен релятивистский гиперболический аналог формулы Циолковского. (Главы 5 А и 7А.)

В рамках изоморфного преобразования псевдоевклидова пространства Минковского в специальным образом сжатое квазиевклидово пространство получены гиперболические отображения, определяющие трактрису и псевдосферу Бельтрами как подобные однопараметрические фигуры в своих классах. (Глава 6А.)

Установлена теорема о приведении суммы двух движений к би-ортогональной (квадратичной) форме - коммутативной для евклидовой и некоммутативной для неевклидовых геометрий. Установлены формулы вычисления и общая тригонометрическая интерпретация для особой ортосферической ротации (по физической терминологии *буста*) неточечных объектов, в том числе координатного базиса, возникающей при неколлинеарном (негеодезическом) движении. Частный случай её описывает известная скалярная формула Зоммерфельда для прецессии Томаса при ортогональном суммировании двух скоростей. Доказана тождественность угла ортосферической ротации и сферической угловой девиации Гаусса - Бонне для двумерных замкнутых геометрических фигур, образуемых суммируемыми геодезическими отрезками на гиперблоидах Минковского или на гиперсфероиде - поверхностях постоянного радиуса. Для геометрических объектов квазиевклидова или псевдоевклидова пространства с индексом «1» возможно бесконечное множество разнообразных проективных преобразований. Показано, что любые тригонометрические проективные отображения гиперсфероида и гиперблоидов Минковского I и II на проективную гиперплоскость или на проективный гиперцилиндр дают модели сферической и двух сопутствующих гиперболических геометрий. Для отображения движений в модели Клейна (внутри и вне абсолюта) тригонометрическим

методом вычислены все коэффициенты искажения неевклидовых расстояний и углов. (Главы 7А и 8А.)

Последние две главы Приложения имеют дискуссионный характер и приводятся для завершённости рассматриваемого здесь тригонометрического представления движений в теории относительности. Известно, что ОТО в изначальной *геометрической* интерпретации А. Эйнштейна в силу своих многочисленных противоречий принимается далеко не всеми специалистами в области теории гравитации и небесной механики. Иные точки зрения отображены в известных книгах, например: Бриллюэн Л. «Новый взгляд на теорию относительности» — М.: Мир, 1972; Боулер М. «Гравитация и относительность» — М.: Мир, 1979, а также в фундаментальных публикациях в научных журналах, например: Дикке Р. «Гравитация без принципа эквивалентности» *Rev. Mod. Phys.*, v. 29, p. 363 (1957); Тирринг В. «Альтернативный подход к теории тяготения» *Annals of Physics* v. 16, p. 96 (1961). Поэтому рассмотрение любых обобщений СТО в поле тяготения до сих пор имеет гипотетический характер и подлежит свободному непредвзятому научному обсуждению. Автор А.С. Никул исходит из принципа максимальной простоты и непротиворечивости теории общепринятым фундаментальным законам Природы и данным наблюдений.

Показано, что все основные и достаточно хорошо изученные *общерелятивистские* эффекты, наблюдаемые в Солнечной системе, интерпретируются элементарным образом в базовом пространстве-времени Минковского, связанном с априори инерциальной системой Маха. Последнее отвечает, например, полевой (*негеометрической*) релятивистской теории гравитации (РТГ). Эта физическая теория как фундаментально обоснованная концепция впервые была изложена М. Боулером (1976 г) в вышеуказанной известной учебной монографии. Аналогичная, но более развёрнутая по содержанию концепция РТГ и именно, как отрицающая ОТО, была развита позднее в публикациях А. А. Логунова с рядом коллег-соавторов. Данные исследования были подытожены в фундаментальной монографии: Логунов А. А. «Теория гравитационного поля» -М.: Наука, 2001. В связи с этим здесь показаны дополнительные возможности для применения тензорной тригонометрии в теории относительности. (Глава 9А.)

С использованием изоморфного отображения координат материальной точки и её мировой линии из эффективного псевдориманова пространства-времени в базовое



псевдоевклидово пространство-время (оба в РТГ имеют топологию аффинного пространства) рассмотрена гравитационно-неискажённая тензорная тригонометрическая модель абсолютного движения в гравитационном поле, в том числе при дополнительном воздействии сил иной природы. Развита четырёхмерный псевдоаналог классической теории Френе - Серре применительно к мировым линиям в пространстве-времени Минковского. Даны четыре абсолютные локальные скалярные и векторные дифференциально-геометрические характеристики искривлённой мировой линии, которые полностью определяют её конфигурацию, а также кинематику и динамику материальной точки в окрестности каждой собственной мировой точки. Вычислены все три абсолютные кривизны, связанные с мировыми тригонометрическими ротациями (от первого до третьего порядка), и их направления. (Глава 10А.)

## Дополнительные обозначения

$\mathbf{b}$  - единичный 4-вектор бинормали,  
 $c$  — скорость света в вакууме (пустоте),  
 $\mathbf{c}$  - 4-вектор псевдоскорости абсолютного движения материи,  
 $\overline{\mathbf{c}}_1$  - стрела координатного времени в относительно неподвижном (универсальном) базисе  $\check{\mathbf{E}}_1$ ,  
 $\overline{\mathbf{c}}_m$  - стрела собственного времени в мгновенном относительно подвижном базисе  $\check{\mathbf{E}}_m$ ,  
 $\mathbf{e}$  - единичный пространствуподобный вектор,  
 $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  - единичный вектор 1-го движения,  
 $\mathbf{e}_\beta = \{\cos \beta_k\}$  - единичный пространствуподобный вектор 2-го движения,  
 $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  - единичный пространствуподобный вектор суммарного движения,  
 $\mathbf{e}_{\overline{\sigma}} = \{\cos \overline{\sigma}_k\}$  - единичный пространствуподобный вектор суммарного движения с обратной последовательностью частных движений,  
 $E$  - полная энергия,  
 $F$  — собственная сила в мгновенном базисе  $\check{\mathbf{E}}_m$ ,  
 $\mathbf{g}, \overline{\mathbf{g}}$  и  $\perp \overline{\mathbf{g}}$  - внутреннее ускорение, его тангенциальная и нормальная проекции,

**h** — единичный 4-вектор тринормали,  
**i** - единичный времениподобный 4-вектор в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе вектор касательной к мировой линии,  
**K** — абсолютная кривизна мировой линии (в данной её точке),  
**k**,  $\bar{\mathbf{k}}$  и  $\hat{\mathbf{k}}$  - 4-вектор абсолютной кривизны мировой линии, его тангенциальная и нормальная проекции,  
*l* и  $\hat{l}$  - евклидово и псевдоевклидово расстояние (длина),  
*m* и *m*<sub>0</sub> - масса движущейся и покоящейся материальной точки,  
**n** - единичный (n + 1)-вектор нормали,  
**p**,  $\bar{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\mathbf{p}}$  - единичные 4-векторы псевдонормали, её тангенциальной и нормальной проекций,  
**q**,  $\bar{\mathbf{q}}$  и  $\hat{\mathbf{q}}$  - единичные 4-векторы квазинормали, её тангенциальной и нормальной проекций,  
**P** - полный импульс,  
*p* — импульс (количество движения),  
**R** — радиус абсолютной кривизны мировой линии или радиус пространства с постоянной кривизной,  
*t*<sup>(i)</sup> - координатное время в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ ,  
**T** и **t** - кручение и 4-вектор кручения,  
**u** - 4-радиус-вектор мировой точки в  $\langle P^{n+1} \rangle$ ,  
**v**, *v* — векторная и скалярная координатная скорость физического движения,  
**v**<sup>\*</sup>, *v*<sup>\*</sup> - векторная и скалярная собственная скорость физического движения,  
*w* - сферическая угловая скалярная скорость,  
*x*<sup>(i)</sup> — пространственная проекция мировой точки в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ ,  
*x*<sup>(i)</sup><sub>k</sub> - пространственная координата мировой точки или материальной точки в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ ,  
*γ*,  $\gamma$  — основной гиперболический угол движения в каком-либо базисе  $\tilde{\mathbf{E}}$  в векторной и скалярной формах,  
*ε* - скалярный угол между направляющими векторами 1-го и 2-го движения,  
*η* — гиперболическая угловая скалярная скорость,  
**Π(γ)** — сферический угол параллельности Лобачевского в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ ,  
*χ*<sub>k</sub> = *x*<sub>k</sub><sup>(1)</sup> - собственная пространственная координата мировой точки, выражаемая в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ .

## Глава 1А. Пространство-время Лагранжа и пространство-время Минковского как математические абстракции и физическая реальность

Вначале обратимся к четырёхмерному пространству-времени Лагранжа  $\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle$  и рассмотрим в нём условно тригонометрическую модель кинематики физического движения материальной точки. Как исходную единичную систему координат выберем какой-либо универсальный базис  $\vec{E}_1 = \{1\}$ . В нём, по определению (в данном случае), все четыре координатные оси  $(x_1, x_2, x_3, \vec{t})$  как бы евклидово ортонормированы. Три пространственные оси составляют евклидову пространствуподобную часть базиса  $\vec{E}^{(3)}$  (то есть декартов суббазис). Стрела времени  $\vec{t}$  есть одномерная направленная времениподобная аффинная составляющая базиса. При допустимых преобразованиях базиса пространственные оси  $(x_1, x_2, x_3)$  всегда ортонормированы и образуют в  $\vec{E}^{(3)}$  правую тройку. Поэтому в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  действует трёхмерная сферическая тригонометрия с безразмерными функциями. Отношение между тремя пространственными координатами и стрелой времени характеризует направленный вектор тангенса, тождественный вектору скорости материальной точки с соответствующей размерностью:

$$\operatorname{tg} \alpha = x/t \equiv v. \quad \operatorname{tg} \alpha_k = x_k/t \equiv v_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

(1А)

Допустимые линейные преобразования в пространстве-времени Лагранжа образуют группу однородных преобразований Галилея  $\langle V_G \rangle$ . Это математически обуславливает принцип относительности Галилея. (Условие их непрерывности  $\det V_G = +1$  обеспечивает сохранение ориентации базиса.) В конкретном декартово-аффинном базисе пространство-время Лагранжа может рассматриваться как линейное. В частности, в каком-либо  $\vec{E}$  оно представляется прямой суммой

$$\langle \mathcal{E}^3 \oplus \vec{t} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{t} \equiv \text{CONST.}$$

(2А)

где, в свою очередь,

$$\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \text{CONST}' + \mathbf{p}, \tag{3A}$$

где  $\mathbf{p}$  — произвольный вектор параллельного переноса. (Тут в некоторой степени имеется аналогия с бинарными пространствами, отображающая здесь "параболическую" геометрию Клейна).

В векторной трактовке стрелы времени составляют полное множество осей  $\langle \vec{t} \rangle$ , включающее только времениподобные элементы. С другой стороны,  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  включает только пространствуподобные элементы. В данном случае все они вещественные. Преобразования Галилея сохраняют данное статус-кво, вследствие того что они сводятся к трём возможным простейшим типам:

- 1) автоморфная сферическая ротация  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 2) параллельная ротация  $\vec{t}$  относительно евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ,
- 3) параллельный перенос  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и  $\vec{t}$ .

В общем случае базис линейно преобразуется следующим образом:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline V_G \\ \hline \mathbf{R} & \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{o}' & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \check{\mathbf{E}}_0 \\ \hline \mathbf{R}_0 & \mathbf{a}_0 \\ \hline \mathbf{o}' & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \check{\mathbf{E}} \\ \hline \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}_0 & \mathbf{R} \mathbf{a}_0 + \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{o}' & \mathbf{1} \\ \hline \end{array} \quad (\mathbf{R} \in \langle \text{rot } \Theta_{3,3} \rangle). \tag{4A}$$

Первые 3 столбца матрицы базиса задают постоянное  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , 4-й столбец задаёт переменную стрелу времени  $\vec{t}$ . При  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{o}; \check{\mathbf{E}}_0 \in \langle \check{\mathbf{E}}_{10} \rangle$  (универсальный базис). При этом, если  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$ , то  $\check{\mathbf{E}}_0 = \check{\mathbf{E}}_1 = \{ \check{\mathbf{1}} \}$ . Тогда обратная матрица  $V_G^{-1}$  (с той же структурой) приводит какой-либо бинарный декартово-аффинный базис к простейшей единичной форме, то есть к исходному базису. Кроме того, она осуществляет пассивное модальное преобразование координат линейного элемента из  $\check{\mathbf{E}}_1$  в  $\check{\mathbf{E}}$ . В любом бинарном базисе  $\check{\mathbf{E}}$  линейный элемент пространства представляется прямой суммой:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \oplus \vec{t} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{x} \\ \hline \vec{t} \\ \hline \end{array}.$$

Исходя из вышеизложенного однородные преобразования Галилея в тригонометрической форме представляются как произведение автоморфной сферической и параллельной ротаций:

$$V_G = F(\Theta, \text{tg } \alpha) = f(\text{tg } \alpha) \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot f(\text{tg } \vec{\alpha}), \quad (5A)$$

rot $\Theta_{3 \times 3}$	tg $\alpha$	=	$I_{3 \times 3}$	tg $\alpha$	\cdot	rot $\Theta_{3 \times 3}$	0	=	rot $\Theta$	\cdot	f(tg $\vec{\alpha}$ )
0'	1		0'	1		0'	1		0'		1

где

$\det V_G = \det f(\text{tg } \alpha) = \det \text{rot } \Theta = +1$ ;  $\text{tg } \vec{\alpha} = \text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot \text{tg } \alpha$ . Обратное однородное преобразование Галилея представляется в виде:

$$V_G^{-1} = \text{rot}(-\Theta) \cdot f(-\text{tg } \alpha) = f(-\text{tg } \vec{\alpha}) \cdot \text{rot}(-\Theta), \quad (6A)$$

rot $(-\Theta_{3 \times 3})$	rot $(-\Theta_{3 \times 3})$	=	rot $(-\Theta_{3 \times 3})$	0	\cdot	$I_{3 \times 3}$	-tg $\alpha$	=	f(-tg $\vec{\alpha})$	\cdot	rot $(-\Theta)$
0'	tg $\alpha$		0'	1		0'	1		0'		1

Формула (5A) является аналогом полярного представления (474), (475). Сам базис преобразуется аналогично (480):

$$\vec{E} = V_G \cdot \vec{E}_1 = f(\text{tg } \alpha) \cdot \text{rot } \Theta \cdot \vec{E}_1 = f(\text{tg } \alpha) \cdot \vec{E}_{1u}. \quad (7A)$$

С физической точки зрения суббазис  $\vec{E}^{(3)}$  движется относительно суббазиса  $\vec{E}_1^{(3)}$  со скоростью  $v$ . Матрица (6A) преобразует координаты элемента пространства-времени Лагранжа следующим образом:

$$\mathbf{u} = V_G^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(1)} = F^{-1}(\Theta, \text{tg } \alpha) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \frac{\text{rot}(-\Theta_{3 \times 3}) \cdot (\mathbf{x}^{(1)} - \text{tg } \alpha \cdot t)}{t}. \quad (8A)$$

Если  $\Theta = Z$ , то имеем чисто параллельные ротации, выраженные в условно тригонометрической форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}^{(1)} - \text{tg } \alpha \cdot t = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot t, \\ t &= t^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (9A)$$

Заметим, что параллельная ротация, применяемая здесь для стрелы времени, геометрически промежуточна между

сферической и гиперболической ротациями. Такой вид ротации обусловлен тем, что скалярное время является её инвариантом и, в принципе, может отсчитываться только на исходной оси  $\vec{t}^{(1)}$ . Многоступенчатые параллельные ротации дают нерелятивистский коммутативный закон сложения тангенсов или скоростей в матричной и векторной формах в евклидовом подпространстве (3А):

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{tg} \alpha_{12}) \cdot f(\mathbf{tg} \alpha_{23}) &= f(\mathbf{tg} \alpha_{23}) \cdot f(\mathbf{tg} \alpha_{12}) = f(\mathbf{tg} \alpha_{12} + \mathbf{tg} \alpha_{23}), \\ \prod f(\mathbf{tg} \alpha_{ij}) &= f(\sum \mathbf{tg} \alpha_{ij}). \end{aligned} \right\} \quad (10A)$$

Множество  $\langle f(\mathbf{tg} \alpha) \rangle$ - кинематическая коммутативная подгруппа группы Галилея.

Пространство-время Лагранжа однородно в силу равнозначности всех его составляющих точечных элементов. (Выбор какого-либо элемента за начало координат никак не влияет на характер допустимых преобразований.) Если же его рассматривать иерархически более сложно, а именно как четырёхмерное векторное пространство, то тогда, согласно (2А), оно распадается на две составляющие: изотропное неориентированное евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и ориентированное подпространство  $\langle \vec{t} \rangle$ . Последнее ориентировано по собственной стреле времени всегда из прошлого в будущее. В целом оно неизотропно в силу хотя бы того, что временная и пространственные координаты его элементов имеют различные размерности. Отсюда вытекает аффинный характер их взаимоотношений и условность тождества (1 А).

Пространство-время Лагранжа широко применяется в классической нерелятивистской физике. Однако ещё в конце XIX века выяснилось, что излагаемые в нём уравнения электродинамики Максвелла при переходе от одной инерциальной системы Галилея к другой изменяют свою форму. В связи с этим Лоренц (1892г.) предложил специальные преобразования координат пространства и времени, устраняющие этот существенный недостаток. (Ещё ранее в 1877г. их установил Фойгт исходя из упругой теории света.). В 1904г. Лоренц с учётом *физического принципа относительности Пуанкаре* (для всех физических явлений) показал, что эти преобразования непосредственно следуют из условия форминвариантности волнового уравнения. Последнее, согласно

теории Максвелла, объясняет и описывает распространение света.

\* \* \*

Далее обратимся к пространству-времени Минковского. В ходе происшедшей в начале XX века революционной трансформации пространства-времени в его более совершенную - релятивистскую концепцию в СТО с *математической точки зрения* были введены два принципиально новых постулата.

*Постулат №1* устанавливает, что реальное пространство-время изотропно (наряду с его однородностью). Это достигается использованием для временной координаты некоторого постоянного масштабного коэффициента «с», имеющего размерность скорости.

*Постулат №2* устанавливает, что реальное пространство-время представляется как ориентированное бинарное комплексное квазиевклидово пространство с индексом  $q = 1$ . Его мнимая координата  $i \cdot \vec{ct}$  — стрела времени, направленная из прошлого в будущее. Принятие этих двух постулатов позволило в новой концепции полностью уйти от вышеотмеченных недостатков нерелятивистского пространства-времени. Например, согласно первому постулату, в (8А):

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow ct, \\ \operatorname{tg} \alpha &\rightarrow \operatorname{tg} \varphi_R = v/c. \end{aligned} \right\}$$

(11А)

Это даёт безразмерную, *чисто тригонометрическую* форму описания физического движения. В свою очередь, второй постулат сводит описание движения к *гиперболической* (псевдосферической) тригонометрии. Причём в базисе  $\vec{E}_1$  естественным образом реализуется сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного и конкретного типа:

$$\left. \begin{aligned} t &\rightarrow i \cdot ct, \\ \operatorname{tg} \varphi &= -x/i \cdot ct = i \cdot v/c = \operatorname{tg} (i\gamma) = i \operatorname{th} \gamma. \end{aligned} \right\}$$

(12А)

Здесь или  $\varphi = i\gamma$ , что соответствует (323), или  $\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \operatorname{th} \gamma$ ,

что соответствует (354).

Переход к новой концепции формально осуществляется в два этапа: сначала к пространству  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , затем к его вещественному изоморфизму  $\langle P^{3+1} \rangle$  с вводом метрического тензора  $I^{\oplus}$ . Таким образом, пространство-время Лагранжа преобразуется в пространство-время Минковского. Преобразования Галилея автоматически заменяются на преобразования Лоренца. Евклидово векторное пространство тангенсов или скоростей преобразуется в гиперболическое векторное пространство - модель Клейна внутри абсолюта.

Эта революционная трансформация концепции пространства-времени, как известно, была последовательно осуществлена более 100-летия назад в классических трудах создателей СТО: Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского. Причём в работах Пуанкаре и Минковского был реализован вышеуказанный фундаментальный математический подход к проблеме. (Приоритет в главном безусловно принадлежит Пуанкаре). Но ввиду приложения новой теории к физике принцип относительности трактуется до сих пор почему-то только в физическом смысле. Хотя, как было показано ними, он имеет свой математический эквивалент. Любое пространство-время, прежде всего, есть некая математическая абстракция, используемая в тех или иных координатных формах записи объективных законов движения материи. В *координатной трактовке этих законов* и проявляется подлинная физическая реальность пространства-времени.

Пространство-время Минковского в целом однородно. Если же его рассматривают иерархически более сложно - с учётом допустимых направлений, а именно как четырёхмерное векторное пространство, то тогда по отношению к псевдоевклидовой метрике оно распадается на три изотропные составляющие: множество элементов вне светового конуса  $\langle \langle \mathcal{E}^{3(k)} \rangle \rangle$ , множество элементов внутри светового конуса  $\langle \overrightarrow{ct}^{(k)} \rangle$  и множество элементов на конусе. Соответственно первое множество включает пространствуподобные (вещественные) элементы, второе множество включает времениподобные (мнимые) элементы, а конус включает элементы с нулевой метрикой. В силу того что эти составляющие изотропны, линейные преобразования в нём, связанные с ротациями и деформациями, описываются четырёхмерными тензорными тригонометрическими моделями. Впервые



тригонометрические функции в псевдосферической форме в  $\langle \mathcal{E}^{1+1} \rangle$  применил Пуанкаре. Впоследствии Минковский аналогично использовал тригонометрические гиперболические функции в  $\langle P^{1+1} \rangle$ . Скалярная тригонометрия привлекалась ими для моделирования *ротационных* гиперболических преобразований на псевдоплоскости.

Тензорные тригонометрические модели преобразований в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изложенные частично ранее, позволяют придать чисто **тригонометрическую четырёхмерную тензорную форму кинематике СТО**. Исходные *постулаты и следствия из них*, фигурирующие в физической трактовке СТО, имеют изоморфные тригонометрические прототипы (*физико-математический изоморфизм*).

Однородным непрерывным преобразованиям Лоренца соответствуют псевдоевклидовы тригонометрические ротации. Эйнштейнову замедлению времени соответствуют тригонометрические гиперболические ротации с псевдоевклидовым инвариантом:  $l = \text{ch}^2 \gamma - \text{sh}^2 \gamma$ , где  $\text{ch} \gamma > 1$ . Лоренцеву сокращению протяжённости соответствуют тригонометрические гиперболические деформации с перекрёстным квазиевклидовым инвариантом:  $l = \text{sch}^2 \gamma + \text{th}^2 \gamma$ , где  $\text{sch} \gamma < 1$ . При рассмотрении этих двух явлении на псевдоплоскости, соответствующей углу  $\Gamma$ , в обоих случаях формально осуществляется решение гиперболически прямоугольного треугольника. Специальному *физическому* принципу относительности Пуанкаре соответствует специальный *математический* принцип относительности применительно к  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Закон Пуанкаре - Эйнштейна о взаимозависимости пространства и времени и об их относительности объясняется тем, что одноиндексные евклидово подпространство и релятивистская стрела времени всегда являются гиперболически ортогональными дополнениями друг к другу, изменяясь только вместе при гиперболических ротациях:

$$\langle P^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{\alpha} \equiv \text{CONST.}$$

(13A)

**Это пространство-время есть единый четырёхмерный геометрический континуум.**

Постулат Эйнштейна о максимуме и постоянстве скорости света в любых галилеевски инерциальных системах отсчёта

непосредственно трактуется как факты псевдоевклидовой тригонометрии:

$$\|\mathbf{v}\|/c = \|\mathbf{th} \boldsymbol{\gamma}\| < 1, \tag{14A}$$

$$\infty \pm \gamma = \infty. \quad (\text{в любой псевдодекартовой системе координат}) \tag{15A}$$

Релятивистские законы сложения физических скоростей определяются законами суммирования гиперболических ротаций (485), (491). Так, последние в виде законов сложения гиперболических отрезков (гл.7А) трактуют и независимость скорости света от движения его источника.

Аналогичные тригонометрические интерпретации имеют место для ряда специальных релятивистских эффектов, относящихся первично ко времени и евклидову подпространству и обусловленных гиперболическим характером их совместных преобразований. То, что масштабный коэффициент, принятый впервые Пуанкаре для координаты времени, равен скорости света в вакууме, следует в результате изложения электродинамики Максвелла - Лоренца или волновой квантовой механики Шрёдингера — Дирака в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  или в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в ковариантной релятивистской форме.

Выберем в качестве исходного единичного базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\mathbf{I}\}$ , в котором пространствуподобная составляющая  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  находится в состоянии покоя относительно наблюдателя  $N_1$ . Наблюдатель имеет собственный хронометр и априори инерциален. С ним связано *полное множество универсальных базисов* относительно  $N_1$ , определяемое условиями:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{1u} &= \text{rot} \ominus \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \{\text{rot} \ominus\}, \\ \text{rot}' \ominus \cdot \mathbf{I} \oplus \cdot \text{rot} \ominus &= \mathbf{I} \oplus = \text{rot} \ominus \cdot \mathbf{I} \oplus \cdot \text{rot}' \ominus; \end{aligned} \right\} \tag{16A}$$

где рефлектор-тензор имеет вид

$$\mathbf{I} \oplus = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} .$$

$$\tag{17A}$$

В базисе  $\check{E}_1$  и в других универсальных базисах явления описываются с точки зрения относительно неподвижного наблюдателя  $N_1$ . В них все координатные оси изначально совместно евклидово и псевдоевклидово ортонормированы. Напротив, прочие базисы ортонормированы только псевдоевклидово, а именно следующим образом:

$$\check{E}'_1 \otimes \check{E} = I \otimes = (\sqrt{I \otimes \check{E}})' (\sqrt{I \otimes \check{E}}), \tag{18A}$$

где  $\sqrt{I \otimes}$  - арифметический квадратный корень типа (443). Это соотношение также означает, что для бинарного декартова базиса в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  все пространственные оси с мнимой четвёртой координатой всегда сферически ортонормированы, а временная ось с мнимой четвёртой координатой всегда сферически антиортонормирована.

В декартовой графике псевдоевклидовы базисы отображаются в четырёхмерном евклидовом пространстве в координатах исходного единичного базиса  $\check{E}_1$ . Последний как универсальный базис является декартовым. Выраженные в нём вектор-столбцы матриц новых базисов определяют расположение координатных осей, сферические углы между ними и евклидовы масштабы по осям.

Базис  $\check{E}_{1u}$ , согласно (16 A), смещён относительно  $\check{E}_1$  на сферический тензорный угол  $\Theta$ . Ротация на угол  $\Theta$  элементарна и осуществляется в некоторой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Евклидово подпространство и стрела времени остаются теми же, что и в  $\check{E}_1$ .

Пусть новый базис получается чисто гиперболической ротацией

$$\check{E}_{1h} = \text{roth } \Gamma \cdot \check{E}_1 = \{ \text{roth } \Gamma \}. \tag{19A}$$

Тогда новые координатные оси, согласно (363), полно сферически не ортогональны друг другу и имеют масштабные искажения в евклидовой метрике (хотя бы две из них, включая стрелу времени). Новая единица времени растянута с коэффициентом  $q_4 = \sqrt{\text{ch}^2 \gamma + \text{sh}^2 \gamma} = \sqrt{\text{ch } 2\gamma}$ . Новые единицы пространственных осей растянуты с коэффициентами

$q_k = \sqrt{\text{ch } 2\gamma \cdot \cos^2 \alpha_k + \sin^2 \alpha_k}$ . Новые сферические углы между осями (в интервале  $0 < \beta < \pi$ ) определяются по их косинусам:

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_{kj} &= 2 \text{sh}^2 \gamma \cdot \cos \alpha_k \cdot \cos \alpha_j / q_k \cdot q_j, \\ \cos \beta_{k4} &= \text{sh } 2\gamma / q_k \cdot q_4. \end{aligned} \right\}$$

Если  $\cos \alpha_3 = 0$ , то  $\cos \alpha_2 = \pm \sin \alpha_1$  и искажается только угол между  $x_1$  и  $x_2$ . Если  $\cos \alpha_3 = \cos \alpha_2 = 0$ , то  $\cos \alpha_1 = \pm 1$  и углы между пространственными осями остаются прямыми (двумерный классический вариант Лоренца). В общем случае новый базис, согласно полярному представлению (480), получается последовательно сферической и гиперболической ротациями в элементарной форме:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{tu}. \tag{20A}$$

(Здесь все матрицы согласованы с рефлектор-тензором.)

Чисто гиперболическая ротация базиса (19А) физически соответствует равномерному прямолинейному (поступательному) движению суббазиса  $\tilde{\mathbf{E}}_{th}^{(3)}$  относительно суббазиса  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \text{th } \gamma$ . Гиперболическая ротация элементарна и осуществляется в псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle \subset \langle P^{3-1} \rangle$ , задаваемой стрелой времени  $\vec{ct}^{(1)}$  и направлением вектора тангенса  $\text{th } \gamma$  или вектора скорости  $\mathbf{v}$  в  $\langle \mathcal{E}^{3(1)} \rangle$ . В двумерном варианте имеем:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{th} = \{\text{roth } \Gamma\}^{2 \cdot 2} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma & \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \quad (\cos \alpha = \pm 1).$$

(21 A)

Графически это преобразование сводится к гиперболической ротации обеих осей  $x^{(1)}$  и  $\vec{ct}^{(1)}$  на угол  $\gamma$  (в сторону биссектрисы первого квадранта при  $\cos \alpha = +1$  и в обратную сторону при  $\cos \alpha = -1$ ). Физически это преобразование сводится к движению оси  $x^{(2)}$  вдоль оси  $x^{(1)}$  со скоростью  $v$  (в направлении оси  $x^{(1)}$  при  $\cos \alpha = +1$  и в обратную сторону при  $\cos \alpha = -1$ ).

Пусть некоторая материальная точка движется (физически) равномерно и прямолинейно так, что в нулевой момент времени  $t = 0$  она проходит через начало координат  $O$  (общее для всех одноцентровых базисов  $\tilde{\mathbf{E}}$ ). Тогда её мировая линия есть центральная прямая внутри изотропного конуса. Сам изотропный конус - геометрическое место всех центральных световых мировых линий. Какой-то псевдодекартов базис  $\tilde{\mathbf{E}}$ , в

котором вышеуказанная материальная точка физически неподвижна, имеет стрелу времени  $\vec{ct}$ , совпадающую с её прямой мировой линией. (Вообще же, все новые координатные оси задаются вектор-столбцами матрицы нового базиса  $\vec{E}_i$ .) Данная прямая мировая линия или она же - новая стрела времени  $\vec{ct}$  взаимно-однозначно определяется в  $\vec{E}_i$  углом  $\gamma$  и направляющими косинусами вектора  $\text{th } \gamma \in \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  или также взаимно-однозначно определяется ротационной матрицей  $\text{roth } \Gamma$  с канонической структурой (363).

Заметим, что во всех формулах и законах, связанных с описанием материальных явлений во времени (процессов), как известно,  $\Delta t > 0$  ( $dt > 0$ ). Соответственно и гиперболический угол движения в любом псевдодекартовом базисе может только увеличиваться ( $d\gamma > 0$ ). Это выражает общий принцип возможности физического движения только из прошлого в будущее, то есть по мгновенной стреле собственного времени. Он же тождествен *принципу детерминизма* для материальных явлений. В СТО этот принцип не противоречит тому, что материальные объекты, имеющие одни и те же начальную и конечную мировые точки, но различные мировые линии между ними, затрачивают в общем случае различное собственное время на всё путешествие, то есть время по собственным хронометрам ("парадокс близнецов"). Следовательно, в тригонометрической форме кинематики теории относительности при активных преобразованиях координат в тензоре движения (21 А) перед углами  $\Gamma$  и  $\gamma$  применяется только знак «+». (Отрицательный знак перед данными углами возможен только при *мысленных* движениях в прошлое, когда применяется *антиподная* гиперболическая геометрия). Это в определённой степени отличает гиперболическую кинематику СТО от правил движения в геометрии Лобачевского - Больяи.

Одна и та же стрела времени  $\vec{ct}$  или прямая мировая линия как в верхней, так и в нижней полости изотропного конуса определяется одной и той же матрицей  $\text{roth } \Gamma$ . Это физически соответствует одному и тому же вектору скорости, а геометрически выражается как движение:

$$\text{roth } \Gamma = F(\gamma, \mathbf{e}_a) \equiv F(-\gamma, -\mathbf{e}_a), \tag{22A}$$

(Последнее выражение дано для антиподной гиперболической геометрии.) С другой стороны, симметричная ей относительно  $\vec{ct}^{(1)}$  стрела времени или прямая мировая линия определяется обратной матрицей. Это физически соответствует аддитивно противоположному вектору скорости, а геометрически выражается как движение:

$$\text{roth}^{-1} \Gamma = F(\gamma, -\mathbf{e}_\alpha) = \text{roth}(-\Gamma) \equiv F(-\gamma, \mathbf{e}_\alpha). \quad (23 A)$$

(Последнее выражение дано для антиподной гиперболической геометрии.) Обратим внимание на то, что в обоих равенствах формально значение  $\gamma$  положительно для направления *материального* движения по стреле времени и отрицательно для направления *мысленного* движения против стрелы времени (то есть в данном случае реперной оси для отсчёта угла ротации). Из (21 A) следует, что в  $\langle P^{1+1} \rangle$  координатная скорость физического движения в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  выражается тригонометрическим способом через соотношение:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c \cdot \Delta t} = \frac{x}{ct} = \frac{\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha}{\text{ch } \gamma} = \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha, \quad (24A)$$

где  $\cos \alpha = \pm 1$ . В самом же общем случае вектор скорости характеризуется модулем  $\|\mathbf{v}\|$  и направляющими косинусами:  $\cos \alpha_1$ ,  $\cos \alpha_2$  и  $\cos \alpha_3$ . Его три ортопроекции в тригонометрической форме имеют вид:

$$\frac{v_k}{c} = \frac{\Delta x_k}{c \cdot \Delta t} = \frac{x_k}{ct} = \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad (25A)$$

где  $-1 \leq \cos \alpha_k \leq +1$ ;  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

При описании физического движения со скоростью  $v$  в псевдоплоскости ротации  $\langle P^{1+1} \rangle$  в координатах  $\langle x^{(1)}, \vec{ct}^{(1)} \rangle$ , новые координатные оси  $x$  и  $\vec{ct}$  отклоняются на один и тот же гиперболический угол  $\gamma = \text{Arth } v/c$ . В универсальном базисе имеет место сферическо-гиперболическая аналогия конкретного типа, например тангенс-тангенсная или синус-тангенсная:

$$x^{(1)}/ct^{(1)} = \text{th } \gamma \equiv \text{tg } \varphi_R \equiv \sin \varphi = v/c \quad (\cos \alpha = +1).$$

То есть при указанной формализации простых физических движений относительно неподвижного наблюдателя, в принципе, безразлично какую тригонометрию применять для

описания — гиперболическую или сферическую. Но при формализации комбинированных физических движений, например, таковых относительно подвижного наблюдателя, многоступенчатых и интегральных движений применяется только первая. То же относится к основным движениям в гиперболической геометрии - простым и многоступенчатым.

Так, например, *сферический угол параллельности Лобачевского*  $\Pi(a/R)$ , широко используемый в гиперболической неевклидовой геометрии как угловой аргумент, имеет геометрический смысл исключительно в универсальном базисе и для простых движений в отличие от гиперболического угла-аргумента  $\gamma = a/R$ , определяемого корректно внешним образом в любом псевдодекартовом базисе:

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\gamma) &= \pi/2 - \varphi(\gamma) = \pi/2 - \arcsin(\operatorname{th} \gamma) = 2 \operatorname{arctg}[\exp(-\gamma)], \\ d\Pi(\gamma) &= -\sec \gamma d\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (26A)$$

где  $\sin \varphi \equiv \operatorname{th} \gamma \leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi/2 \equiv \operatorname{th} \gamma/2$ , согласно (331), (356). При движении по геодезической (гиперболе) из центра гиперболоида  $\Pi$  угол параллельности Лобачевского, выраженный в универсальном базисе, уменьшается от  $\pi/2$  до  $\Pi(\gamma)$ .

В заключение данной вводной главы отметим, что изначальный *математический подход* Пуанкаре является исчерпывающим для логически безупречного построения СТО. С другой стороны, изначальный *физический подход* Эйнштейна к этому на основе известных двух постулатов таким свойством не обладает - равно как только из экстремума  $\operatorname{th} \gamma_{\max} = 1$  в любых системах отсчёта и математического принципа относительности невозможно построить гиперболическую тригонометрию. Исходя только из последних двух положений (эквивалентных постулатам Эйнштейна), в принципе, можно построить логически безупречным образом бесконечное множество тригонометрий (геометрий постоянного радиуса  $R$ ) и их квазифизических изоморфизмов с псевдогёльдеровой (неквадратичной при  $p \neq 2$ ) метрикой:

$$|da|^p = |dx_1|^p + |dx_2|^p + |dx_3|^p - |dx_4|^p \quad (1 \leq p \leq \infty).$$

Задание именно псевдоевклидовой метрики ( $p = 2$ ) было осуществлено Эйнштейном неявным образом при *аксиоматическом* определении им же понятия одновременности.

(Определение одновременности по Эйнштейну есть теорема геометрии Минковского - см. в гл. 4А .)

## Глава 2А. Тензорная тригонометрическая модель однородных преобразований Лоренца

В пространстве-времени Минковского исходные и новые координаты мировой точки в инерциальных системах  $\tilde{E}_I$  и  $\tilde{E}_{II}$ , согласно (21 А), или в четырёхмерной форме как в  $\tilde{E}_I$  и  $\tilde{E}_V$  той же псевдоплоскости ротации связаны пассивным модальным ротационным преобразованием гиперболического типа:

$$\begin{array}{c}
 \text{roth } (-\Gamma) \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \text{ch } \gamma & 0 & 0 & -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \\
 \hline
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 -\text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha & 0 & 0 & \text{ch } \gamma \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \mathbf{u}\{\tilde{E}_I\} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 x_1^{(1)} \\
 \hline
 x_2^{(1)} \\
 \hline
 x_3^{(1)} \\
 \hline
 x_4^{(1)} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \mathbf{u}\{\tilde{E}_V\} \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cos \alpha \cdot ct^{(1)} \\
 \hline
 x_2^{(1)} \\
 \hline
 x_3^{(1)} \\
 \hline
 \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 ;$$

$$\left. \begin{array}{l}
 x_1 = \text{ch } \gamma \cdot x_1^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot ct^{(1)} = [x_1^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot ct^{(1)}] / \text{sch } \gamma, \\
 x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}, \\
 ct = \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)} = [ct^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \cos \alpha \cdot x_1^{(1)}] / \text{sch } \gamma.
 \end{array} \right\}$$

(27А)

(Тригонометрические однородные преобразования координат пространства и времени Пуанкаре — Минковского.) Здесь дополнительно используется множитель  $\cos \alpha = \pm 1$ , определяющий направление вектора тангенса. С учётом (24А) они же приобретают физическую форму однородных преобразований координат Лоренца:

$$\left. \begin{array}{l}
 x_1 = [x_1^{(1)} - v \cdot t^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \\
 x_2 = x_2^{(1)}, \quad x_3 = x_3^{(1)}, \\
 ct = [ct^{(1)} - v/c \cdot x_1^{(1)}] / \sqrt{1 - v^2/c^2}.
 \end{array} \right\}$$



Используя гиперболическую ротационную модальную матрицу с общей канонической структурой (363) в  $\tilde{E}_1$ , получаем генеральные тригонометрические преобразования координат в четырёхмерной форме ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{cases} x_k = \cos \alpha_k \cdot [\text{ch } \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}) - \text{sh } \gamma \cdot ct^{(1)}] + \\ + [x_k^{(1)} - \cos \alpha_k \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)})]. \\ ct = \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot (\cos \alpha_1 \cdot x_1^{(1)} + \cos \alpha_2 \cdot x_2^{(1)} + \cos \alpha_3 \cdot x_3^{(1)}). \end{cases} \quad (28A)$$

Те же тригонометрические преобразования в векторной форме:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [\text{ch } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] + (1 - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha') \cdot \mathbf{x}^{(1)} = \\ = [\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot ct^{(1)}] / \text{sch } \gamma + \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)}. \\ ct = \text{ch } \gamma \cdot ct^{(1)} - \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)} = [ct^{(1)} - \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)}] / \text{sch } \gamma, \end{cases} \quad (29A)$$

где  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}$  - вектор направляющих косинусов скорости движения или вектора тангенса;

$$\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' = \overleftarrow{\mathbf{v}} \mathbf{v}' = \mathbf{v} \mathbf{v}' / \|\mathbf{v}\|^2;$$

$$1 - \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' = \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' = \overrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{v}' - \text{ортопроекторы (§ 2.5) на } \langle \text{im } \mathbf{v} \rangle \text{ и } \langle \text{im } \mathbf{v}' \rangle^\perp.$$

Генеральные тригонометрические преобразования координат (29A), если использовать сравнение с (27A), трактуются так. Во первых, пространственная проекция  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  представляется прямой суммой из релятивистской и нерелятивистской составляющей — параллельной и сферически ортогональной вектору  $\mathbf{v} \in \langle \mathcal{L}^3 \rangle^{(1)}$ . Во вторых, при гиперболической ротации базиса  $\tilde{E}_1$  в псевдоплоскости  $\langle \mathbf{v}, \overrightarrow{ct}^{(1)} \rangle$  пассивному модальному преобразованию подвергаются только временная проекция  $ct^{(1)}$  и релятивистская составляющая пространственной проекции  $\overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)}$ . Ортогональная составляющая  $\overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)}$  есть инвариант преобразований Лоренца и Галилея. Далее,

$$\|\text{th } \gamma\| = \text{th } \gamma = \|\mathbf{v}\|/c = + \sqrt{\text{th}^2 \gamma_1 + \text{th}^2 \gamma_2 + \text{th}^2 \gamma_3}$$

(при физическом движении  $\gamma > 0$ ),

$$\text{th } \gamma_k = \cos \alpha_k \cdot \text{th } \gamma = v_k/c \quad (\text{th } \gamma = \text{th } \gamma \mathbf{e}_\alpha),$$

(30A)

где  $\gamma_k$  - частный гиперболический угол между  $\vec{ct}^{(1)}$  и проекцией  $\vec{ct}$  на координатную псевдоплоскость  $\langle x_k^{(1)}, \vec{ct}^{(1)} \rangle$ . Заметим тут же, что любые тензоры с нулевой четвёртой координатой в псевдодекартовых базисах в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , в том числе векторы тангенса и скорости физического движения, подчиняются формулам евклидовой геометрии в собственном  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ ; в частности, их модули и проекции удовлетворяют теореме Пифагора. Аналогичные генеральные преобразования координат пространства-времени в физической форме имеют вид:

$$\mathbf{x} = [\vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha \cdot \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^{(1)}] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2} + \vec{e}_\alpha \vec{e}_\alpha' \cdot \mathbf{x}^{(1)},$$

$$ct = [ct^{(1)} - \mathbf{v}' \cdot \mathbf{x}^{(1)}/c] / \sqrt{1 - \|\mathbf{v}\|^2/c^2}.$$

Преобразования координат в четырёхмерной физической форме вывел Герглотц, используя разложение  $\mathbf{x}^{(1)}$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  на релятивистскую и нерелятивистскую ортопроекции (*принцип Герглотца*).

Во всех вышеуказанных преобразованиях координат мировой точки применяется два вида базиса:  $\tilde{E}_1 = \{1\}$  и  $\tilde{E} = \text{roth } \Gamma \cdot \tilde{E}_1 = \{\text{roth } \Gamma\}$ . Первый из них входит во множество универсальных базисов (16А). Понятие *универсальный оазис*, очевидно, относительно. Оно привязано к конкретному наблюдателю, например, к  $N_1$  в системе  $\tilde{E}_1$ .

Напомним, что именно в  $\tilde{E}_1$ , как правило, выражаются матрицы других псевдодекартовых базисов. Концепция универсального базиса позволяет установить отношение наблюдателя  $N_1$  к любому другому псевдодекартову базису  $\tilde{E}_i = T_{ii} \cdot \tilde{E}_1$ . При этом возможны 3 варианта:

- 1)  $T_{ii}' \cdot T_{ii} = I \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle \text{rot } \Theta \rangle$  - другой универсальный базис, то есть с тем же наблюдателем  $N_1$ ;
- 2)  $T_{ii} = T_{ii}' \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle \text{roth } \Gamma \rangle$  - гиперболически связанный базис с наблюдателем  $N_1$ ;
- 3)  $T_{ii} = \text{roth } \Gamma_{ii} \cdot \text{rot } \Theta_{ii} \rightarrow \tilde{E}_i \in \langle T \rangle$  - общий псевдодекартов базис с наблюдателем  $N_1$ .

В первом варианте суббазис  $\tilde{E}_i^{(3)}$  неподвижен относительно  $N_1$  и сферически сдвинут относительно суббазиса  $\tilde{E}_1^{(3)}$  на угол  $\Theta_{ii}$ . Во втором варианте  $\tilde{E}_i^{(3)}$  движется со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \text{th } \gamma$  относительно  $N_1$ . В третьем варианте оба эти движения

реализуются формально последовательно. В двух последних вариантах, в принципе, возможно перейти к новому собственному универсальному базису, если выполнить модальное преобразование  $T_{i_1}^{-1} \cdot \check{E}_i = \{I\}$ . В этом новом единичном базисе относительно неподвижен наблюдатель  $N_1$ . Но тогда и все матрицы других базисов нужно выразить именно в нём.

Специальный физико-математический принцип относительности здесь проявляется в том, что общие формулы преобразований координат в инерциальных системах ковариантны. Применяя формулы многоступенчатых преобразований (485) - (488), получаем:

$$\begin{aligned} \check{E}_j &= T_{ij} \cdot \check{E}_i, & \check{E}_k &= T_{ik} \cdot \check{E}_i = T_{ij} \cdot T_{jk} \cdot \check{E}_i = \{T_{ij} \cdot T_{jk} \cdot T_{ij}^{-1}\} \cdot T_{ij} \cdot \check{E}_i; \\ \mathbf{u}^{(j)} &= T_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)}, \\ \mathbf{u}^{(k)} &= T_{ik}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)} = T_{jk}^{-1} \cdot T_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(i)}, \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \check{E}_j \\ \mathbf{u}^{(j)} \\ \mathbf{u}^{(k)} \end{aligned}} \right\} \text{ -- в координатах } \check{E}_i$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = T_{jk}^{-1} \cdot \mathbf{u}^{(j)} \text{ -- в координатах } \check{E}_j.$$

Отсюда видно, что преобразование  $\mathbf{u}^{(j)} \Rightarrow \mathbf{u}^{(k)}$  выражается ковариантно наблюдателям  $N_i$  и  $N_j$  в базисах  $\check{E}_i$  и  $\check{E}_j$ . В частности,  $\check{E}_i = \check{E}_i, T \in \langle \text{roth } \Gamma \rangle$ .

В СТО преобразования Лоренца в *активной форме* трансформируют исходный псевдодекартов базис. В силу однородности и изотропности пространства-времени Минковского они имеют чисто тригонометрическую природу. В скалярной тригонометрии, в зависимости от смысла решаемой задачи, вычисляют проективные характеристики двух принципиально различных видов - либо синусно-косинусные, либо тангенсно-секансные. Аналогично, в тензорной тригонометрии применяются либо ротационные, либо деформационные тригонометрические матрицы. Причём в исходном  $\check{E}_1$  они выражены в канонических формах (363), (365). В сокращённой *векторной* форме записи эти матрицы представляются в виде:

$$\begin{array}{c}
 \text{roth } \Gamma \qquad \qquad \qquad \text{defh } \Gamma \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{e}_\alpha \cdot \overrightarrow{e}'_\alpha + \overrightarrow{e}_\alpha \cdot \overleftarrow{e}'_\alpha & \text{sh } \gamma \cdot \overrightarrow{e}_\alpha \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \overrightarrow{e}'_\alpha & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \qquad \qquad \qquad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{sch } \gamma \cdot \overleftarrow{e}_0 \cdot \overrightarrow{e}'_\alpha + \overrightarrow{e}_0 \cdot \overleftarrow{e}'_\alpha & -\text{th } \gamma \cdot \overrightarrow{e}_\alpha \\ \hline -\text{th } \gamma \cdot \overrightarrow{e}'_\alpha & \text{sch } \gamma \\ \hline \end{array} \qquad (31 \text{ A})
 \end{array}$$

Отметим, что термин *группа преобразований Лоренца* ввёл в научную терминологию (математическую и физическую) именно Пуанкаре в своих изначальных публикациях по теории относительности. Преобразования Лоренца составляют существенную часть выдвинутого им ранее физического принципа относительности, как дальнейшего развития принципа относительности Галилея.

В следующих двух главах рассматривается тригонометрическая трактовка релятивистских эффектов во внутренней и во внешней полостях изотропного конуса.

### Глава 3А. Эйнштейново замедление времени как следствие ротационного гиперболического преобразования

Понятие "изотропный световой конус" геометрически связано с мировой линией, так как его *мгновенный центр* есть точка мировой линии. В ней он всегда отделяет прошлое от будущего. Мировые точки укладываются на одну и ту же мировую линию тогда и только тогда, когда все интервалы между ними мнимые, или времениподобные. Во внутренней полости конкретного изотропного конуса описываются мировые линии материальных точек, совершающих равномерное прямолинейное физическое движение, после их прохождения через общее начало координат O (рис. 1А).

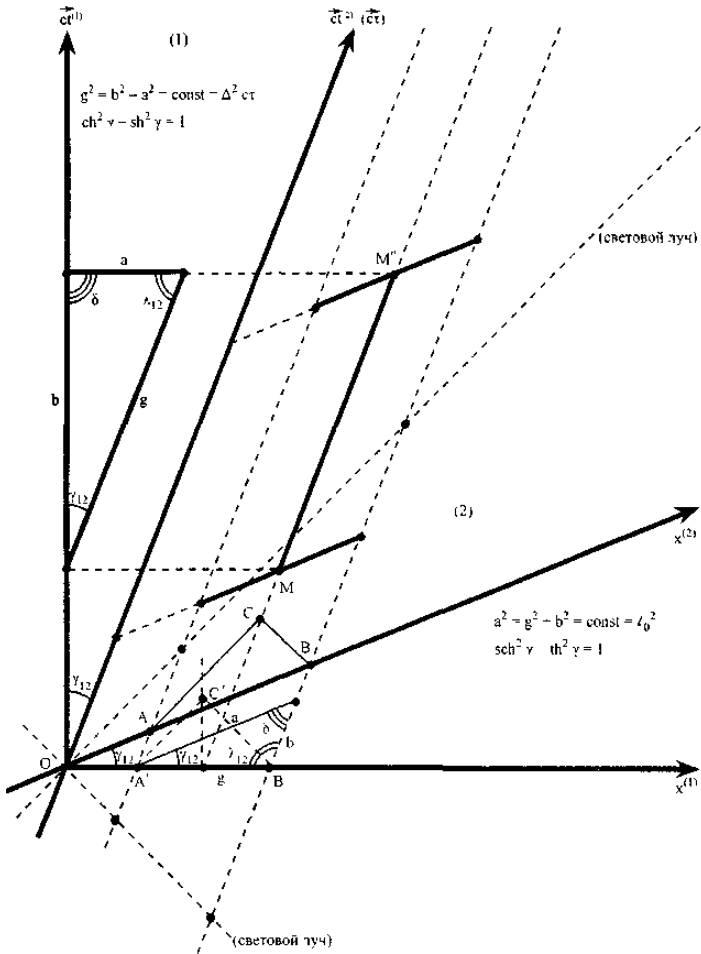


Рис. 1А. Скалярные тригонометрические интерпретации основных релятивистских эффектов внутри и вне изотропного конуса в псевдоплоскости гиперболической ротации:

- (1) - эйнштейново замедление времени в движущемся объекте ( $g < b$ , или  $\Delta\tau < \Delta t^{(1)}$ , или  $1 < \text{ch } \gamma$ );
- (2) - лоренцево сокращение протяжённости движущегося объекта ( $g < a$ , или  $\Delta x^{(1)} < \hat{l}_0$ , или  $\text{sch } \gamma < 1$ ).

Эти линии образуют семейство центральных прямых внутри конуса. В качестве таковой материальной точки для протяжённого объекта выбирают его центр инерции, тождественный центру массы. Материальная точка М находится в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в состоянии относительного физического покоя в некоторой системе отсчёта  $\vec{E}_2$  и в состоянии относительного физического движения в  $\vec{E}_1$  (рис.1 А). Мировая линия точки М тождественна стреле времени  $\vec{ct}^{(2)}$  с точностью до параллельного переноса. Пусть оба вышеуказанных базиса связаны гиперболической ротацией:

$$\vec{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \vec{E}_1.$$

С точки зрения наблюдателя  $N_1$  материальная точка М физически движется в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  со скоростью  $v_{12} = c \cdot \text{th } \gamma_{12}$ . В окрестности данной точки может протекать какой-либо процесс. По хронометру наблюдателя  $N_2$  этот процесс длится некоторый интервал времени  $\Delta t^{(2)}$ , определяемый отрезком М'М" с учётом масштаба по стреле времени  $\vec{ct}^{(2)}$ . Это, согласно СТО, есть собственное время данного процесса  $\Delta \tau = \Delta t^{(2)}$ , так как оно измеряется относительно неподвижным хронометром. Собственное время в движущемся объекте — абсолютная характеристика, или псевдоевклидов метрический инвариант внутри изотропного конуса. В системе  $\vec{E}_2$  оно же тождественно координатному времени  $\Delta t^{(2)}$ . Но в системе  $\vec{E}_1$  координатное время того же процесса, измеряемое наблюдателем  $N_1$ , определяется проекцией отрезка М'М" на стрелу времени  $\vec{ct}^{(1)}$  с учётом её масштаба и составляет величину  $\Delta t^{(1)}$ . Координатное время в движущемся объекте есть относительная характеристика. Например, в системе  $\vec{E}_1$  оно вычисляется через ротационное модальное преобразование следующим образом:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}^{(2)} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \Delta ct \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \Delta ct \\ \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_2 \cdot \Delta ct \\ \hline \text{sh } \gamma_{12} \cdot \cos \alpha_3 \cdot \Delta ct \\ \hline \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta ct \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1 \\ \hline \Delta x_2 \\ \hline \Delta x_3 \\ \hline \Delta ct \\ \hline \end{array}^{(1)}, \quad (32A)$$

$$\Delta ct^{(1)} = \text{ch } \gamma_{12} \cdot \Delta ct > \Delta ct.$$

$$(33A)$$

В рассматриваемом частном случае отрезок прямой мировой линии, соответствующий данному процессу, есть линейный тензорный элемент в форме 4-вектора  $\mathbf{u}$ . Его квадратичный псевдоевклидов инвариант выражается в виде:

$$\Delta^2 c\tau = \Delta^2 ct - (\Delta^2 x_1 + \Delta^2 x_2 + \Delta^2 x_3) = \text{const.} \tag{34A}$$

Этот инвариант приводится к тригонометрической форме:

$$1 = \text{ch}^2 \gamma - (\text{sh}^2 \gamma_1' + \text{sh}^2 \gamma_2' + \text{sh}^2 \gamma_3') = \text{ch}^2 \gamma - \|\mathbf{sh} \boldsymbol{\gamma}\|^2 = \text{ch}^2 \gamma - \text{sh}^2 \gamma, \tag{35A}$$

где  $\gamma_k'$  - гиперболический угол между  $\vec{ct}$  и её ортопроекцией на координатную псевдоплоскость  $\langle x_k, \vec{ct} \rangle$ :  $\text{sh} \gamma_k' = \cos \alpha_k \cdot \text{sh} \gamma$ . Это есть инвариант преобразований Лоренца для единичного времениподобного линейного элемента. Инвариантное собственное время в каком-либо псевдодекартовом базисе выражается тригонометрически в виде:

$$\Delta\tau = \Delta t / \text{ch} \gamma = \min \langle \Delta t^{(1)} \rangle. \tag{36A}$$

Для криволинейной мировой линии то же, но мгновенное ротационное преобразование применяется к её дифференциалу как к линейному элементу:

$$d\mathbf{u}^{(1)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} d\mathbf{u}^{(m)} = \{\text{roth } \Gamma\}^{(m)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ dct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ dct \end{pmatrix}^{(1)}. \tag{37A}$$

Элемент  $d\mathbf{u}^{(m)}$  выражен в координатах *мгновенной системы*  $\vec{E}_m$ , которая на дифференциальном уровне в СТО всегда инерциальна (с точки зрения наблюдателя  $N_1$  в  $\vec{E}_1$ ), а их перевод осуществляется в *априори инерциальную систему*  $\vec{E}_1$ . В дифференциальной форме

$$d\tau^{(1)} = dt^{(1)} / \text{ch} \gamma = d\hat{l} / ic = \min \langle dt^{(1)} \rangle, \tag{38A}$$

В результате интегрирования (38A) имеем соотношение  $\Delta\tau = \Delta\hat{l} / ic$ , где  $\Delta\hat{l}$  - псевдоевклидова длина отрезка мировой линии. Формулы (36A), (38A) выражают тригонометрически

релятивистский эффект *эйнштейнова замедления времени процесса в движущемся объекте*. Это происходит с точки зрения наблюдателя  $N_1$  или любого другого инерциального наблюдателя, относительно которого движется данный объект. Указанный эффект, как и другие релятивистские эффекты в СТО, имеет чисто координатную природу. (В свою очередь, природа собственного времени требует отдельного обсуждения, что затрагивается в последней главе.) Отметим, что эффект сокращения времени в движущемся объекте исторически впервые установил Фойгт (1887 г.) и затем независимо от него Лоренц (1892 г.).

Рассматриваемый времениподобный феномен — отрезок мировой линии, согласно (32А) и (37А), в базисе  $\vec{E}_1$  имеет ещё проекцию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  - пространственный путь объекта, выражаемый как через координатное, так и через собственное время:

$$\Delta t^{(1)} = \sqrt{\Delta x_1^2{}^{(1)} + \Delta x_2^2{}^{(1)} + \Delta x_3^2{}^{(1)}} = \text{th } \gamma \cdot \Delta ct^{(1)} = v \cdot \Delta t^{(1)} = \text{sh } \gamma \cdot \Delta ct = v^* \cdot \Delta t.$$

Кинематическая характеристика  $v^*$  определяется здесь как *собственная скорость* физического движения

$$v^* = c \cdot \text{sh } \gamma = \frac{dx^{(1)}}{dt}; \quad v_k^* = c \cdot \text{sh } \gamma_k' = c \cdot \cos \alpha_k \cdot \text{sh } \gamma.$$

(39А)

Все четыре вектора:  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}^*$ ,  $\text{th } \gamma$  и  $\text{sh } \gamma$  — коллинеарны. Связь между проекциями гиперболического угла  $\gamma_k$  из (30А) и  $\gamma_k'$  из (35А) видна из соотношений:

$$v_k / c = \Delta x_k^{(1)} / \Delta ct^{(1)} = \text{th } \gamma_k = \text{sh } \gamma_k / \text{ch } \gamma_k = \text{sh } \gamma_k' / \text{ch } \gamma.$$

В псевдоплоскости гиперболической ротации рассматриваемая задача сводится к решению плоского "внутреннего" гиперболически прямоугольного треугольника, в котором  $\Delta ct$  - гипотенуза «g»,  $\Delta t^{(1)}$  - катет «a» и  $\Delta ct^{(1)}$  - катет «b» (см. рис. 1 А).

Заметим, что в произведениях (32А), (37А) ротационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своей нижней строкой. Вызвано это тем, что исходный линейный элемент параллелен собственной стреле времени. Очевидно, что для использования матрицы в полном виде исходный линейный элемент должен образовывать некоторый угол  $\gamma$  со стрелой времени  $\vec{ct}^{(2)}$ . Это может иметь место, например, при анализе двух- и многоступенчатых



движений (см. далее в гл. 5А и 7А). Тем же тригонометрическим способом устанавливается ещё одна существенная теорема СТО и геометрии Минковского. Она формулируется так: "Из всех мировых линий, соединяющих непрерывно точки М' и М" в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , прямолинейный отрезок М'М" имеет максимально возможную псевдоевклидову длину (или собственное время)".

$$\hat{l} = \int_{t_1^{(2)}}^{t_2^{(2)}} \text{sch } \gamma_{2m} dct^{(2)} < \int_{t_1^{(2)}}^{t_2^{(2)}} dct^{(2)} = ct_2^{(2)} - ct_1^{(2)}.$$

С другой стороны, минимальная (нулевая) длина таковой непрерывной мировой линии имеет место при соединении точек М' и М" световыми отрезками (при условии  $\gamma = +\text{co}$ ). При этом всегда достаточно двух таких отрезков.

## Глава 4А. Лоренцево сокращение протяжённости как следствие деформационного гиперболического преобразования

Во внешней полости изотропного конуса (рис. 1 А) рассматриваются совокупности мировых точек, для которых все межточечные интервалы вещественные, или пространствуподобные. Это тождественно тому, что все мировые точки в данной совокупности принадлежат некоторому евклидову подпространству  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . В соответствующем ему базисе  $\vec{E}$ , все эти точки имеют одну и ту же временную координату на стреле времени  $\vec{ct}^{(1)}$ . Этот пространствуподобный феномен есть *мировая фиксация* некоторого геометрического объекта (как множества точек евклидова подпространства) в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Мировая фиксация графическим способом задаёт понятие одновременности множества мировых точек в конкретном базисе  $\vec{E}$ , с условием возможности её реализации для них. С другой стороны, все мировые точки из данной совокупности принадлежат своим мировым линиям в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Для геометрического объекта евклидова подпространства, совершающего поступательное физическое движение, мировые линии всех его точек параллельны, что соответствует по направлению собственной стреле времени  $\vec{ct}^{(1)}$ .

Подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$  и  $\vec{ct}^{(j)}$  гиперболически ортогональны тогда и только тогда, когда геометрический объект находится в состоянии физического покоя в первом из них. В этом случае вышеуказанные индексы совпадают, а мировая фиксация объекта определяется как *собственная*.

С математической точки зрения эйнштейново (физическое) определение одновременности, применительно к пространству событий Минковского, является изящной геометрической теоремой в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В двумерной трактовке: "В треугольнике ABC (рис.1 А), образованном пространствуподобным отрезком АВ и парой встречных световых отрезков АС и ВС, медиана и высота, опущенные из вершины С, тождественны". *Следствие*: "В вышеуказанном треугольнике ABC основание и медиана принадлежат к двум одноиндексным собственным направлениям данной псевдоплоскости, то есть они гиперболически ортогональны". В более общей четырёхмерной трактовке: "В конусе, получаемом любым эллиптическим сечением изотропного конуса, медиана, опущенная из вершины С, и её трёхмерное основание гиперболически ортогональны. И обратно: высота, опущенная из вершины С, есть медиана". Одновременность мировой фиксации как относительное понятие определяется по отношению или к какому-либо  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(k)}$  (параллельность ему), или к какой-либо  $\vec{ct}^{(k)}$  (гиперболическая ортогональность ей).

Собственная мировая фиксация тождественна самому геометрическому объекту в состоянии физического покоя. Произвольная мировая фиксация, по определению, есть одновременный срез мировой траектории геометрического объекта в некотором заданном псевдодекартовом базисе  $\vec{E}_1$ . Если геометрический объект физически покоится в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ , его мировая траектория в пространстве Минковского параллельна стреле времени  $\vec{ct}^{(j)}$ . Тогда нахождение мировой фиксации объекта в  $\vec{E}_1$  сводится к его аффинному проецированию на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(j)}$ , то есть к его проецированию в перекрёстном базисе  $\vec{E}_{1j} \equiv \{x_k^{(j)}, \vec{ct}^{(j)}\}$ . Перекрёстное проецирование в данном случае описывается формально гиперболическим деформационным преобразованием, действующим в той же псевдоплоскости, что и ротация. Но теперь она имеет свойства *квазиевклидовой* плоскости, так как при данном деформационном преобразовании в ней действует *квазиевклидов*

инвариант, или перекрёстный евклидов инвариант. Геометрический объём мировой фиксации объекта имеет максимальное значение именно для собственной характеристики:

$$V = v^{(i,1)} / \text{sch } \gamma = \max \langle v^{(i,j)} \rangle. \quad (40A)$$

В зависимости от размерности геометрического объекта, как хорошо известно, возможны четыре варианта его мировой траектории: *линия* для объекта размерности 0 (точка); *полоса* для объекта размерности 1 (стержень); трёх- или четырёхмерный *брус* для объектов размерности 2 (треугольник, параллелограмм) или 3 (тетраэдр, параллелепипед). Здесь используются простейшие геометрические объекты, сводимые математически к линеорам. Множество всех мировых фиксаций данного объекта тождественно множеству всех пространствуподобных сечений его мировой траектории. В частности, относительно неподвижный наблюдатель  $N_1$  фиксирует стержень одновременно как проекцию на  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(2)}$  (рис.1A).

Мировые фиксации, как и мировые линии, или траектории, - тензорные понятия валентности 1. Для вышеуказанных простейших геометрических объектов мировая фиксация выражается либо как  $4 \times 1$ -вектор, либо как  $4 \times 2$ -линеор, либо как  $4 \times 3$ -линеор в зависимости от размерности. Если объект физически покоится в  $\langle E^3 \rangle^{(j)}$ , то в  $\check{E}_j$  определяется его собственная мировая фиксация. В базисе  $\check{E}_j$  объекты размерности 1, 2 и 3, приложенные в некоторой мировой точке, выражаются как элементы линейного пространства Минковского.

$$\mathbf{a}^{(j)} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1 \\ \hline \Delta x_2 \\ \hline \Delta x_3 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}^{(j)}; \quad \mathbf{A}_{4 \times 2}^{(j)} = \begin{array}{|c|c|} \hline \Delta x_{11} & \Delta x_{12} \\ \hline \Delta x_{21} & \Delta x_{22} \\ \hline \Delta x_{31} & \Delta x_{32} \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}^{(j)}; \quad \mathbf{A}_{4 \times 3}^{(j)} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \Delta x_{11} & \Delta x_{12} & \Delta x_{13} \\ \hline \Delta x_{21} & \Delta x_{22} & \Delta x_{23} \\ \hline \Delta x_{31} & \Delta x_{32} & \Delta x_{33} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}^{(j)} \quad (41A)$$

В комбинированном перекрёстном базисе  $\check{E}_{j,1}$  они те же:

$$\mathbf{a}^{(j,1)} = \mathbf{a}^{(j)}; \quad \mathbf{A}_{4 \times 2}^{(j,1)} = \mathbf{A}_{4 \times 2}^{(j)}; \quad \mathbf{A}_{4 \times 3}^{(j,1)} = \mathbf{A}_{4 \times 3}^{(j)}. \quad (42A)$$

При деформационных модальных преобразованиях координат этих тензоров в другой перекрёстный базис  $\vec{E}_{i,j}$  действует квазиевклидов метрический инвариант:

$$[\mathbf{a}^{(j)}]^\top \cdot \mathbf{a}^{(j)} = [\mathbf{a}^{(i,j)}]^\top \cdot \mathbf{a}^{(i,j)} = \iota_0^2 = \text{const} > 0, \quad (43A)$$

$$[\mathbf{A}^{(j)}]^\top \cdot \mathbf{A}^{(j)} = [\mathbf{A}^{(i,j)}]^\top \cdot \mathbf{A}^{(i,j)} = |\mathbf{A}|^2 = \text{Const} \quad (44A)$$

Этот инвариант схож с евклидовым ввиду имеющейся в  $\vec{E}_{i,j}$  сферическо-гиперболической аналогии конкретного типа:

$$\text{defn } \Gamma_{ij} \equiv \text{rot } \Phi(\Gamma_{ij}). \quad (45A)$$

Поскольку при определении мировой фиксации применяется перекрёстное проецирование, то для нахождения новых координат тензоров используется деформационная матрица с тем же гиперболическим углом, но обратная по отношению к модальной матрице, связывающей перекрёстные базисы:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \text{defn } \Gamma_{ij} \mathbf{a}^{(j,i)} = \begin{matrix} \Delta x_1^{(i,j)} \\ \Delta x_2^{(i,j)} \\ \Delta x_3^{(i,j)} \\ \Delta ct^{(j,i)} \end{matrix}, \quad (46A)$$

$$\mathbf{A}_{4 \times 2}^{(i,j)} = \text{defn } \Gamma_{ij} \cdot \mathbf{A}_{4 \times 2}^{(j,i)} = \begin{matrix} \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} \\ \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} \\ \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} \\ \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} \end{matrix}, \quad (47A)$$

$$\mathbf{A}_{4 \times 3}^{(i,j)} = \text{defn } \Gamma_{ij} \cdot \mathbf{A}_{4 \times 3}^{(j,i)} = \begin{matrix} \Delta x_{11}^{(i,j)} & \Delta x_{12}^{(i,j)} & \Delta x_{13}^{(i,j)} \\ \Delta x_{21}^{(i,j)} & \Delta x_{22}^{(i,j)} & \Delta x_{23}^{(i,j)} \\ \Delta x_{31}^{(i,j)} & \Delta x_{32}^{(i,j)} & \Delta x_{33}^{(i,j)} \\ \Delta ct_1^{(j,i)} & \Delta ct_2^{(j,i)} & \Delta ct_3^{(j,i)} \end{matrix}, \quad (48A)$$

Первые три строки тензоров в новом перекрёстном базисе определяют новые евклидовы характеристики (координаты)

объекта в конкретной мировой фиксации. Используя каноническую структуру (365), выразим новые координаты стержня (46А) через исходные:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline \Delta x_1^{(j)} - \cos \alpha_1 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \hline \Delta x_2^{(j)} - \cos \alpha_2 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \hline \Delta x_3^{(j)} - \cos \alpha_3 \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma) \\ \hline \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \operatorname{th} \gamma \\ \hline \end{array}, \quad (49A)$$

где:  $l_0 = \|\mathbf{a}^{(j)}\|$  - длина стержня в состоянии покоя;  $\varepsilon$  - угол между стержнем в состоянии покоя и вектором антискорости  $(-\mathbf{v}_\mu) = (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{v}_{ij})^{(j)}$  с направляющими косинусами в суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_j^{(3)}$ , что и у вектора  $\mathbf{v}_{ij}$  в суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_i^{(3)}$ . Причём имеем соотношение:

$$\cos \alpha_1 \cdot \Delta x_1^{(j)} + \cos \alpha_2 \cdot \Delta x_2^{(j)} + \cos \alpha_3 \cdot \Delta x_3^{(j)} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{a}^{(j)} = \cos \varepsilon \cdot l_0 = \|\overline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{a}^{(j)}\|. \quad (50A)$$

Изложенное выражает тригонометрическим образом лоренцево сокращение линейных объектов с точки зрения преобразования их псевдодекартовых координат в состоянии относительного покоя.

Отметим еще один релятивистский эффект: *векторы скорости и антискорости образуют гиперболический угол  $\gamma_{ij}$ , а не тождественны*. Если направление скорости совпадает с осью  $x_1$ , то  $\cos \alpha_1 = +1$ ,  $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0$ ; и новые координаты стержня определяются в виде:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{array}{|c|} \hline 0 + \operatorname{sch} \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \\ \hline \Delta x_2^{(j)} + 0 \\ \hline \Delta x_3^{(j)} + 0 \\ \hline 0 + \operatorname{th} \gamma \cdot \Delta x_1^{(j)} \\ \hline \end{array}. \quad (51 A)$$

где дана разбивка на нерелятивистскую и релятивистскую части. Если же при этом ориентация стержня и вектора антискорости одинакова ( $\cos \varepsilon = +1$ ), то имеем:

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{pmatrix} \text{sch } \gamma \cdot l_0 \\ 0 \\ 0 \\ \text{th } \gamma \cdot l_0 \end{pmatrix}. \quad (52A)$$

Первая евклидова координата здесь определяется по формуле лоренцева сокращения протяжённости:

$$l^{(i,j)} = \text{sch } \gamma_{ij} \cdot l_0 = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot l_0 < l_0. \quad (53A)$$

Нормальные относительно вектора антискорости координаты стержня не изменяются. Новые и исходные координаты стержня в (49A) и в частных случаях (51A), (52A) подчиняются квазиевклидову инварианту (43A). Просуммировав квадраты пространственных координат в (49A), получаем квадрат евклидовой длины движущегося стержня. В самом общем случае для ориентированного стержня лоренцево сокращение его евклидовой проекции-фиксации равно

$$\begin{aligned} l^{(i,j)} &= \|\Delta \mathbf{x}^{(i,j)}\| = l_0 \sqrt{\cos^2 \varepsilon \text{sch}^2 \gamma_{ij} + \sin^2 \varepsilon} = l_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot \text{th}^2 \gamma_{ij}} = \\ &= l_0 \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon \cdot (v/c)^2} < l_0. \end{aligned} \quad (54A)$$

В соответствии с принципом Герглотца выйдем её релятивистскую и нерелятивистскую составляющие. Часть стержня-фиксации, нормальная вектору антискорости в  $\tilde{E}_j^3$ , инвариантна и является нерелятивистской составляющей

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{inv}} = \mathbf{a}^{(i)} - \cos \varepsilon \cdot l_0 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\Delta \mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{e}_\alpha \cdot \cos \varepsilon \cdot l_0}{0}. \quad (55A)$$

Вычитая из (49A) вектор (55A), получаем релятивистскую часть

$$[\mathbf{a}^{(i,j)}]_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{e}_\alpha \cdot \cos \varepsilon \cdot \text{sch } \gamma \cdot l_0}{\cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma \cdot l_0} = \cos \varepsilon \cdot \text{sch } \gamma \cdot l_0 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\alpha \\ \text{sh } \gamma \end{pmatrix}. \quad (56A)$$

Применяя к данной евклидовой части теорему Пифагора, получаем релятивистскую составляющую квадрата евклидовой длины движущегося стержня  $(\cos \varepsilon \cdot \text{sch } \gamma \cdot l_0)^2$ . Аналогичным образом из (55A) и (50A) получаем нерелятивистскую составляющую  $(\sin \varepsilon \cdot l_0)^2$ . Это алгебраически объясняет

структуру (54А). (Она же может быть получена графическим способом.) Итак, евклидова длина движущегося стержня складывается, согласно (54А), в ортогональной сумме Герглотца в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  из нерелятивистской проекции « $\sin \varepsilon \cdot l_0$ » и релятивистской проекции « $\cos \varepsilon \cdot \text{sch } \gamma \cdot l_0$ ». *Первая из них* есть нормальная проекция стержня относительно вектора антискорости  $(-\mathbf{v}_{ij})$ . При перекрёстном проецировании (гиперболической деформации) она инвариантна. Поэтому данная составляющая сферически ортогональна обоим векторам скоростей:  $\mathbf{v}_j$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$  и  $(-\mathbf{v}_i)$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(j)}$ . *Вторая из них* получается из параллельной проекции стержня перекрёстным проецированием параллельно  $\vec{ct}^{(j)}$  на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(i)}$ , конкретно на направление  $\mathbf{v}_{ij}$ . Квадрат квазиевклидовой длины стержня как в целом, так и только в его релятивистской проекции, согласно (43А), есть квадратичный метрический инвариант вне изотропного конуса, или квазиевклидов инвариант:

$$l_0^2 = [l^{(i,j)}]^2 = \|\Delta x^{(i,j)}\|^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = [l^{(i,j)}]^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = \text{const}, \quad (57A)$$

$$[l_0]_{\text{ref}}^2 = l_0^2 \cdot \cos^2 \varepsilon = \|\Delta x^{(i,j)}\|_{\text{ref}}^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = [l^{(i,j)}]_{\text{ref}}^2 + \Delta^2 ct^{(j,i)} = \text{const}. \quad (58A)$$

Инвариант (58А) приводится к тригонометрической форме

$$(\text{sch}^2 \gamma_1'' + \text{sch}^2 \gamma_2'' + \text{sch}^2 \gamma_3'') + \text{th}^2 \gamma = \|\text{sch}^2 \gamma\| + \text{th}^2 \gamma = \text{sch}^2 \gamma + \text{th}^2 \gamma = 1. \quad (59A)$$

где  $\gamma_k''$  — гиперболический угол между вектором антискорости  $(-\mathbf{v}_{ij})$  и осью  $x_k$  в суббазисе  $\tilde{E}_i^3$ ;  $\text{sch } \gamma_k'' = \cos \alpha_k \cdot \text{sch } \gamma$ . Это инвариант деформационных гиперболических преобразований для единичного пространствуподобного линейного элемента. Собственная длина стержня, то есть его евклидова длина в состоянии покоя, - квазиевклидов метрический инвариант в любых других перекрёстных базисах  $\tilde{E}_{k,j}$ , в частности, и в  $\tilde{E}_{i,j}$ :

$$l_0 = \frac{l^{(i,j)}}{\sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \text{sch}^2 \gamma + \sin^2 \varepsilon}} = \max < l^{(i,j)}. \quad (60A)$$

Родственная формула (54А) выражает тригонометрически релятивистский эффект *лоренцева сокращения евклидовой протяжённости движущегося стержня вдоль направления его физического движения*. Данный эффект также имеет чисто координатную природу. Отметим, что эффект сокращения

движущегося объекта исторически впервые установил Фитцджеральд (1892 г.).

Множество всех мировых фиксаций движущегося стержня по сути полуоткрытое, так как оно не содержит крайних сечений его мировой траектории гиперповерхностью изотропного конуса (рис. 1А). Указанные крайние сечения имеют нулевую евклидову длину релятивистской ортопроекции, а для объектов ранга  $> 1$  имеют нулевые евклидовы нормы порядка 1 и 2 для релятивистской составляющей проекции и порядка 3 — для их объёмной фиксации в целом. Они соответствуют объектам, движущимся как бы со скоростью света.

Рассматриваемый пространствуподобный феномен в новом перекрёстном базисе  $\vec{E}_{i,j}$ , согласно (49А), имеет и временную проекцию. Но эта проекция относится к стреле времени  $\vec{ct}^{(j)}$ . Следовательно, она трактуется в системе  $\vec{E}_j$  и объясняется так. Наблюдатель  $N_j$  воспринимает другой равноценный стержень, покоящийся на оси  $x^{(i)}$ , как укороченный с евклидовой длиной, тождественно равной (53А). Когда в процессе движения оба стержня сойдутся, их отдельно левые и отдельно правые концы встретятся с эксцессом времени в системе  $\vec{E}_j$ :

$$\Delta ct^{(j)} = l_0 \cdot \text{th } \gamma_{ij}. \tag{61 А}$$

В классической кинематике его бы не было. Конечно, в обоих случаях одновременность трактуется по Эйнштейну, чтобы не учитывать время распространения света от одного конца стержня к другому. Это *релятивистский эффект неодновременности встречи начала и конца двух равноценных стержней* (коллинеарных и соосных направлению движения). Он обусловлен тем, что движущееся евклидово пространство претерпевает гиперболическую ротацию (как и стрела времени), а вместе с ним и стержень. Формула (61А) выражает эксцесс времени для случая, когда один из стержней покоится, а другой движется. Если сопоставить друг против друга равноценные точки этих стержней, то контакт пар точек при встрече стержней распространяется в системе  $\vec{E}_j$  вдоль оси  $x^{(i)}$  слева направо со сверхсветовой скоростью:

$$w = l_0 / \Delta t^{(j)} = c \cdot \text{cth } \gamma_{ij} = c^2/v > c.$$



(62A)

Понятно, что в классической кинематике все эти пары точек встречаются одновременно.

В квазиплоскости гиперболической деформации, тождественной псевдоплоскости гиперболической ротации, рассматриваемая задача сводится к решению плоского "внешнего" гиперболически прямоугольного треугольника, в котором  $l^{(ij)}$  — гипотенуза «g»,  $l_0$  - катет «a» и  $\Delta ct^{(i,j)}$  - катет «b» (см. рис. 1 A).

Заметим, что в произведениях (46A)-(48A) деформационная гиперболическая матрица действует формально в усечённом виде, а именно только своими тремя верхними строками. (Сравним это с аналогичным замечанием в гл. 5A для ротационного преобразования координат.) Вызвано это тем, что исходные линейные элементы (линеоры) параллельны собственному евклидову подпространству.

Результат лоренцева сокращения движущегося векторного элемента выражается в векторном виде формулой (49A), а в скалярном виде формулой (54A). В перекрёстном базисе  $\tilde{E}_{1,1}$  для двух векторов имеем:

$$\cos \beta_{12}^{(1,1)} = [\mathbf{g}_1^{(1,1)}]' \cdot \mathbf{g}_2^{(1,1)} / \|\mathbf{g}_1^{(1,1)}\| \cdot \|\mathbf{g}_2^{(1,1)}\| = [\mathbf{e}_1^{(1,1)}]' \cdot \mathbf{e}_2^{(1,1)}.$$

Здесь используется обычное выражение для косинуса скалярного угла между векторами-фиксациями в евклидовом подпространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Применив к этому выражению ранее полученное соотношение (54A), в итоге получаем релятивистский вариант формулы для косинуса угла между двумя вместе движущимися векторными элементами:

$$-1 < \cos \beta_{12}^{(1,1)} = \frac{\cos \beta_{12}^{(1,1)} - \cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \cdot \text{th}^2 \gamma} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \cdot \text{th}^2 \gamma}} < +1$$

$$(0 < \beta_{12}^{(1,1)} < +\pi),$$

(63A)

где  $\beta_{12}^{(1,1)}$  - скалярный угол между данными векторами, измеряемый наблюдателем  $N_1$ . Заметим, что исходная пара векторов и вектор антискорости составляют некоторую тройку векторов в евклидовом пространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . Согласно неравенству Адамара, для определителя Грама имеем:

$$0 \leq \det \{[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]' \cdot [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\} = s_{123}^2 \leq 1.$$

(64A)

Отсюда следует тригонометрическое неравенство

$$2\cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23} \leq \cos^2 \alpha_{12} + \cos^2 \alpha_{13} + \cos^2 \alpha_{23} \leq \\ \leq 1 + 2\cos \alpha_{12} \cdot \cos \alpha_{13} \cdot \cos \alpha_{23}.$$

В данном случае  $\alpha_{13} = \varepsilon_1$ ,  $\alpha_{23} = \varepsilon_2$ ,  $\alpha_{12} = \beta_{12}$ . С учётом этого и дополнительного условия  $\text{th}^2 \gamma < 1$  неравенство (63A) получает строгое обоснование. Если исходный угол между векторами прямой ( $\cos \beta_{12}^{(j)} = 0$ ), то новый угол либо острый ( $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 < 0$ ), либо тупой ( $\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 > 0$ ). Если же  $\beta_{12}^{(j)} = 0$ , то  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и  $\beta_{12}^{(j)} = 0$ .

Если оба вектора ортогональны вектору антискорости, а следовательно, и сам угол тоже, то в таком случае, конечно, релятивистский эффект изменения угла отсутствует:  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0 \rightarrow \beta_{12}^{(i,j)} = \beta_{12}^{(j)}$ . Если же один из векторов коллинеарен вектору антискорости, то тогда  $|\cos \beta_{12}|$  уменьшается. При этом тупой угол уменьшается, а острый увеличивается:

$$0 < \cos \beta_{12}^{(i,j)} = \cos \beta_{12}^{(j)} \cdot \sqrt{\frac{1 - \text{th}^2 \gamma}{1 - \cos^2 \beta_{12}^{(j)} \cdot \text{th}^2 \gamma}} < \cos \beta_{12}^{(j)}. \quad (65A)$$

Релятивистская площадь параллелограмма, образуемого движущимися векторами, составляет

$$S_{12}^{(i,j)} = l_1^{(i,j)} \cdot l_2^{(i,j)} \sin \beta_{12}^{(i,j)} = \\ = \frac{S_{12}^{(j)}}{\sin \beta_{12}^{(j)}} \cdot \sqrt{\sin^2 \beta_{12}^{(j)} - (\cos^2 \varepsilon_1 + \cos^2 \varepsilon_2 - 2\cos \beta_{12}^{(j)} \cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2) \cdot \text{th}^2 \gamma}. \quad (66A)$$

Диагонали движущегося параллелограмма подвержены лоренцеву сокращению, если при этом они не ортогональны вектору антискорости. В общем случае имеем следующие релятивистские значения для длин диагоналей (первой и второй)-

$$[L^{(i,j)}]_{1,2}^2 = \{[L^{(j)}]_{1,2}^2 - [l_1^{(j)} \cos \varepsilon_1 \pm l_2^{(j)} \cos \varepsilon_2]^2 \text{th}^2 \gamma} \quad (67A)$$

Объем параллелепипеда, как и любого другого тела, уменьшается прямо пропорционально секансу гиперболического

угла движения. Учтя дополнительно (64А) и (54А), вычисляем синусную норму движущегося трёхмерного линейного угла:

$$0 < s_{123}^{(1)} = \frac{s_{123}^{(1)} \operatorname{sch} \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_1 \operatorname{th}^2 \gamma} \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_2 \operatorname{th}^2 \gamma} \sqrt{1 - \cos^2 \varepsilon_3 \operatorname{th}^2 \gamma}} < 1 \quad (68A)$$

Неравенство нетрудно доказать, выразив ту же синусную норму через (63А) и (64А)

$$[s_{123}^{(1)}]^2 = 1 + 2 \cdot \cos \beta_{12}^{(1)} \cdot \cos \beta_{13}^{(1)} \cdot \cos \beta_{23}^{(1)} - \cos^2 \beta_{12}^{(1)} - \cos^2 \beta_{13}^{(1)} - \cos^2 \beta_{23}^{(1)}.$$

## Глава 5А. Тригонометрические модели коллинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Рассмотрим тригонометрическую интерпретацию суммирования коллинеарных физических движений. В этой главе, как правило, скорости и ускорения фигурируют в скалярной форме. Релятивистский закон сложения скоростей Пуанкаре - Эйнштейна для случая их коллинеарности имеет простую гиперболическую интерпретацию в форме *согласованной двухступенчатой ротации* (486):

$$\operatorname{roth} l_{13} = \operatorname{roth} l_{12} \cdot \operatorname{roth} l_{23} = \operatorname{roth} (l_{12} + l_{23});$$

$$\cos \alpha_{(13)} \gamma_{13} = \cos \alpha_{(12)} \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \gamma_{23} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \quad (69A)$$

$$\operatorname{th} [\cos \alpha_{(13)} \gamma_{13}] = \operatorname{th} [\cos \alpha_{(12)} \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \gamma_{23}],$$

$$v_{13} = c \cdot \operatorname{th} [\operatorname{Arth} v_{12}/c + \operatorname{Arth} v_{23}/c] = (v_{12} + v_{23}) / (1 + v_{12} \cdot v_{23} / c^2)$$

$$(v_{12} \cdot v_{23} > 0 \leftrightarrow |v_{13}| < |v_{12}| + |v_{23}|, \quad v_{12} \cdot v_{23} < 0 \leftrightarrow |v_{13}| > ||v_{12}| - |v_{23}||).$$

(70A)

Гиперболическая форма данного закона впервые была установлена Зоммерфельдом с геометрической интерпретацией на *сфере мнимого радиуса*. В свете вышеизложенного последняя

есть гиперboloид II Минковского. По существу это есть правило суммирования тангенсных проекций согласованных гиперболических отрезков. Релятивистский закон сложения нескольких коллинеарных скоростей в тригонометрической форме выражается в многоступенчатой интерпретации в виде:

$$\cos \alpha \cdot \gamma = \sum_{i=1}^m \cos \alpha_{(i)} \cdot \gamma_{(i)} \quad (\cos \alpha = \pm 1, \gamma > 0), \tag{71A}$$

$$v = c \cdot \text{th} \sum_{i=1}^m \text{Arth } v_i / c. \tag{72A}$$

Термин "коллинеарность" здесь довольно условен и означает только то, что векторы частных скоростей всегда коллинеарны собственной оси  $\vec{x}^{(1)}$  в пределах одной и той же псевдоплоскости  $\langle \vec{x}, \vec{ct} \rangle$ . При этом безразлично, в каких конкретных точках мировой траектории осуществляются элементарные акты суммирования скоростей. Но обязательно то, чтобы сама мировая линия оставалась всегда в пределах этой псевдоплоскости. В частности, скорости могут суммироваться интегрально вдоль мировой линии при движении с ускорением.

Аналогично, в пространстве-времени Минковского или Лагранжа прямолинейное физическое движение определяется такой мировой линией, которая располагается в пределах одной и той же псевдоплоскости. Отсюда видна условность термина "прямолинейное движение" для этих пространств событий. Проекция такой криволинейной мировой траектории параллельно любой мгновенной оси собственного времени на собственное евклидово подпространство есть прямая линия со своим направляющим вектором. (В частности, последнее может относиться к универсальному базису  $\vec{E}_1$ .)

В тригонометрической версии СТО определяется *характеристический гиперболический угол* движения  $\gamma$  как угол наклона мировой линии к стреле времени (рис. 2А). Он относителен, как и последняя. Если особо не оговорено, то  $\gamma$  отсчитывается в универсальном базисе относительно  $\vec{ct}^{(1)}$ . Угол движения  $\gamma$  и любые его функции есть *относительные инварианты*. Для прямой мировой линии относительная скорость между наблюдателями  $N_1$  и  $N_2$  определяется гиперболическим тангенсом угла движения с двух противоположных точек зрения [рис. 2А (1)]:

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{12} &= v_{12}/c = \Delta x^{(1)}/\Delta ct^{(1)} = (\Delta x^{(1)} \text{sch } \gamma)/(\Delta ct^{(1)} \cdot \text{sch } \gamma) = \\ &= -\Delta x^{(2)}/\Delta ct^{(2)} = -\text{th } \gamma_{21} \end{aligned} \quad (73A)$$

( $x^{(1)} = \chi$ ,  $ct^{(2)} = ct$  – собственные координаты).

То же имеет место при прямолинейном физическом движении с ускорением (замедлением). С каждой точкой его мировой линии связан *мгновенный псевдодекартов базис* с учётом вектора параллельного переноса центра координат в эту точку:

$$\tilde{\mathbf{E}}_m = \text{roth } \Gamma \tilde{\mathbf{E}}_1 = F_1(\gamma, \mathbf{e}_\alpha) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1. \quad (74A)$$

Гиперболический тангенс, определяющий скорость физического движения, выражается двойко - с точек зрения наблюдателей  $N_1$  и  $N_m$ :

$$\text{th } \gamma = \frac{v}{c} = \frac{d\chi}{dct^{(1)}} = \frac{dx^{(1)}}{dct^{(1)}} = \frac{dx^{(1)} \cdot \text{sch } \gamma}{dct^{(1)} \cdot \text{sch } \gamma} = -\frac{dx^{(m)}}{dct^{(m)}} = -\frac{dx^{(m)}}{dct}. \quad (75A)$$

За собственное (истинное) расстояние  $\chi$  здесь принимается координата  $x^{(1)}$ , то есть неподвижная в исходном универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ .

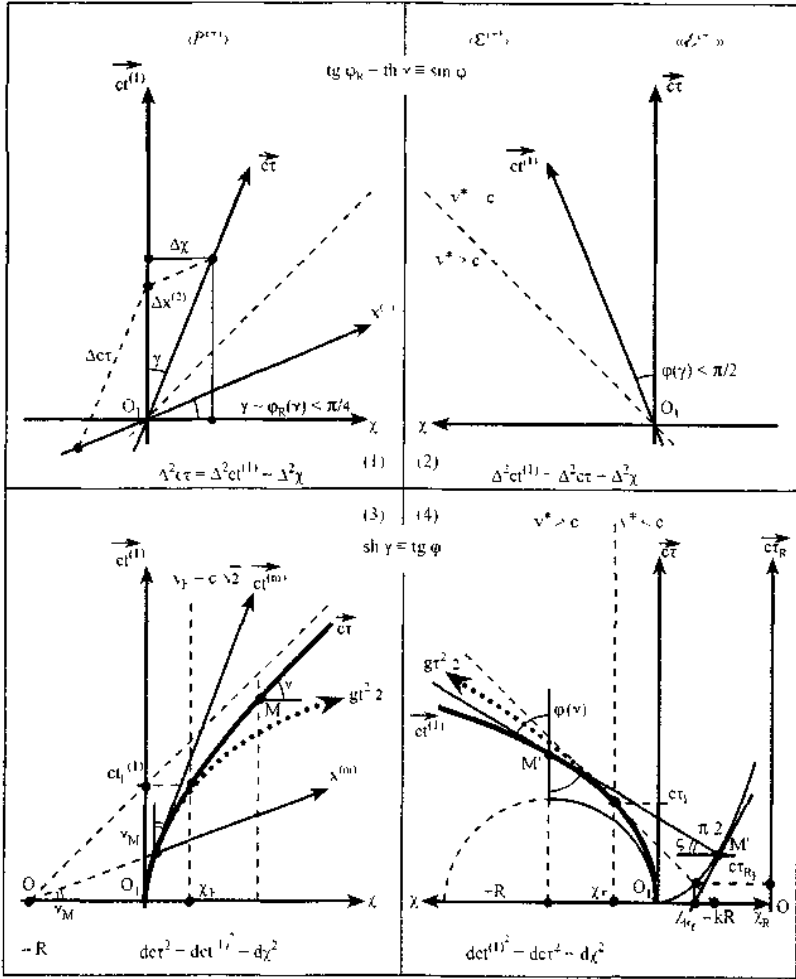


Рис. 2А. Мировые линии материальной точки М для простейших прямолинейных физических движений — равномерного (1, 2) и равномерно ускоренного (3, 4) в универсальном, собственном и сжатом базисах (.....) — кинематические параболы).

За собственное время здесь принимается величина

$\tau = \int_0^{\tau} dt^{(m)} = \int_0^t \text{sch } \gamma dt^{(1)}$ , то есть время, измеренное по хронометру в

движущемся объекте или суббазисе  $\vec{E}_m^{(3)}$ .

Криволинейная мировая траектория тождественна криволинейной стреле собственного времени  $\int_0^{\tau} d\vec{ct}^{(m)} \equiv \vec{ct}$  [рис. 2А (3)] для движущегося объекта. Её направленная касательная  $\vec{ct}^{(m)}$ , вместе с тем, есть мгновенная стрела собственного времени. В формулах (73А), (75А) при вычислении относительной скорости наблюдателей  $N_2$  или  $N_m$  используется движущаяся координата  $x^{(2)}$  или  $x^{(m)}$ , которая в  $\vec{E}_1^{(1)}$  релятивистски сокращена в сравнении с собственной координатой  $\chi = x^{(1)}$ . Аналогично, при измерении той же скорости  $v$  наблюдателем  $N_1$  используется координатное время  $t^{(1)}$ , которое здесь релятивистски увеличено в сравнении со временем  $\tau$ . Поэтому вычисляемая скорость  $v$  по существу координатная. С другой стороны, *собственная скорость* физического движения (39А) определяется с использованием только собственных координат, а тригонометрически - через соответствующий относительный синусный инвариант:

$$\frac{v^*}{c} = \frac{dx^{(1)}}{dct^{(m)}} = \frac{d\chi}{dct} = \text{ch } \gamma \cdot \text{th } \gamma = \text{sh } \gamma > \frac{v}{c}. \tag{76A}$$

Закон сложения коллинеарных собственных скоростей имеет синусную интерпретацию (хотя гиперболические углы суммируются точно также, как и ранее):

$$v_{13}^* = c \cdot \text{sh} [\cos \alpha_{(13), \gamma_{13}}] = c \cdot \text{sh} [\cos \alpha_{(12), \gamma_{12}} - \cos \alpha_{(23), \gamma_{23}}] = \\ = v_{12}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{23}^*/c)^2} + v_{23}^* \cdot \sqrt{1 + (v_{12}^*/c)^2}$$

$$(v_{12}^* \cdot v_{23}^* > 0 \leftrightarrow |v_{13}^*| > |v_{12}^*| + |v_{23}^*|);$$

$$v^* = v/\sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad v = v^*/\sqrt{1 + (v^*/c)^2} \quad (1/v^2 = 1/v^{*2} + 1/c^2), \tag{77A}$$

что эквивалентно соотношению  $\text{cth}^2 \gamma = \text{cosh}^2 \gamma + 1$ .

Векторы  $\mathbf{v}^*$ ,  $\mathbf{sh } \gamma$  имеют те же направляющие косинусы, что и векторы  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{th } \gamma$ , так как они получаются из одного и того же векторного параметра  $d\mathbf{x}$  в числителе дроби

Заметим также, что в формуле (75А) производная  $\frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\mathbf{ct}}$  задаёт скорость удаления  $N_1$  от  $N_m$ , где  $d\mathbf{x}^{(m)} < 0$ . Совершенно другой смысл имеет производная  $\frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\mathbf{ct}}$ , когда ускорение движения рассматривается с точки зрения мгновенной системы  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ . Тогда в её мгновенном начале координат  $M$  скорость (производная) нулевая. Поэтому определим в окрестности точки  $M$  криволинейной *плоской* мировой траектории два гиперболических угла, а именно  $\gamma^{(1)} = \gamma$  - общий угол движения в системе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  и  $\delta\gamma^{(m)}$  - дополнительный угол движения в системе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ , вызванный *внутренним ускорением (или замедлением) движения*. Дифференциалы координатных скоростей в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  и в  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  в окрестности точки  $M$  выражаются в тригонометрической форме:

$$d \frac{d\mathbf{x}^{(1)}}{d\mathbf{ct}^{(1)}} = d \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{ct}^{(1)}} = d \operatorname{th} \gamma = \operatorname{sch}^2 \gamma d\gamma, \tag{78A}$$

$$d \frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\mathbf{ct}^{(m)}} = d \frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\mathbf{ct}} = d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)} = \operatorname{sch}^2 \delta\gamma^{(m)} d\delta\gamma^{(m)} = d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma^{(m)} = d\gamma. \tag{79A}$$

Причём в точке  $M$ :  $\delta\gamma^{(m)} \rightarrow 0$ , а  $d\gamma$  выражается в том же мгновенном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  вдоль мировой линии с постоянным  $e_\alpha$  и поэтому  $d\delta\gamma^{(m)} = d\gamma$ . Тогда внутреннее ускорение в системе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  с учётом (79А) вычисляется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}^{(m)}}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \delta\gamma^{(m)}}{d\tau} = c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} = g(\tau). \tag{80A}$$

Для мгновенных систем отсчёта  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  в пространстве-времени Минковского СТО используется на дифференциальном уровне (с последующим интегрированием получаемых выражений). Поэтому логично, что  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  принимается мгновенно инерциальной.

Одновременность трактуется здесь именно в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ .

Ввиду того что внутренняя скорость  $\frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau}$  окрестности точки  $M$



исчезающе мала, объект в системе  $\tilde{E}_m$  имеет инертную массу, равную массе покоя  $m_0$ . Следовательно, при действии на материальный объект в момент времени  $\tau$  некоторой *собственной силы*  $F$  в направлении оси  $x^{(m)}$  он получает в системе  $\tilde{E}_m$  внутреннее ускорение, согласно 2-му закону механики Ньютона:

$$g(\tau) = F(\tau)/m_0. \tag{81 A}$$

Собственная сила  $F$ , действующая в  $\tilde{E}_m$ , тождественна во всех системах отсчёта (например, для силы инерции это есть число по шкале динамометра в  $\tilde{E}_m^{(3)}$ ). Точно также и масса покоя  $m_0$  не зависит от системы отсчёта. Ввиду этого внутреннее ускорение, определяемое формулами (80A), (81 A), есть *абсолютный инвариант*. В отличие от соответствующих *относительных инвариантов* эта характеристика непосредственно от  $\gamma$  (или от скорости движения) не зависит. Значение внутреннего ускорения первично определяется каким-либо абсолютным законом, вызывающим действие собственной силы именно в точке её приложения. В силу принципа относительности для его значения безразлично: движется расчётная координата  $x^{(m)}$  или покоится. С учётом этого обстоятельства именно  $g(\tau)$  является базовым ускорением в теории относительности. Оно же однозначно определяет *гиперболическую кривизну* мировой линии в пространстве-времени Минковского. Причём при *тангенциальном* ускорении мировая линия вместе с векторными параметрами движения остаётся в пределах одной и той же псевдоплоскости и  $\bar{g}(\tau) \parallel x^{(m)}$ . В частности, постоянное тангенциальное внутреннее ускорение  $g = \bar{g}$  задаёт равномерно ускоренное (замедленное) движение по псевдоокружности (гиперболе). Заметим, что кинематическая гипербола всегда принадлежит собственному гиперболоиду I Минковского с общим их центром. Впервые такой простейший тип неравномерного релятивистского движения в СТО был изучен Минковским, а затем - в работах Борна и Зоммерфельда.

Представляют интерес ещё два типа тангенциального ускорения. *Собственное ускорение* в  $\tilde{E}_m$  с учётом (76A). (80A) вычисляется следующим образом:

$$\bar{g}^*(\tau) = \frac{d v^*}{d \tau} = \frac{d^2 \chi}{d \tau^2} = c \cdot \frac{d \operatorname{sh} \gamma}{d \tau} = c \cdot \operatorname{ch} \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \tau} = \operatorname{ch} \gamma \cdot \bar{g}(\tau) > \bar{g}(\tau). \quad (82A)$$

Оно больше внутреннего ускорения, ввиду того что в (80A) дифференциал  $d^2 x^{(m)}$  (как  $x^{(m)}$  и  $dx^{(m)}$ ) релятивистски сокращён в сравнении с собственной величиной  $d^2 x^{(1)}$ .

Координатное ускорением  $\bar{E}_1$  с учётом (78A), (80A) наоборот меньше внутреннего:

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(1)}(t^{(1)}) &= \frac{d v}{d t^{(1)}} = \frac{d^2 \chi}{d t^{(1)2}} = c \cdot \frac{d \operatorname{th} \gamma}{d t^{(1)}} = c \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d t^{(1)}} = \\ &= c \cdot \operatorname{sch}^3 \gamma \cdot \frac{d \gamma}{d \tau} = \operatorname{sch}^3 \gamma \bar{g}[\tau(t)^{(1)}] < \bar{g}[\tau(t)^{(1)}]. \end{aligned} \quad (83A)$$

В изучаемых инвариантах движения в качестве временных параметров используются  $ct^{(1)}$  и  $ct$ . Инварианты движения синхронны в универсальном базисе  $\bar{E}_1$ , если они фиксируются в нём одновременно по обоим хронометрам. Соотношения одновременности исходя из проецирования времени параллельно  $(\mathcal{E}^3)^{(1)}$  в дифференциальной и интегральной формах в  $\bar{E}_1$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} d ct &= \operatorname{sch} \gamma \, d ct^{(1)}, \\ ct &= \int_0^{ct^{(1)}} \operatorname{sch} \gamma \, d ct^{(1)}; \end{aligned} \right\} \quad (84A)$$

$$\left. \begin{aligned} d ct^{(1)} &= \operatorname{ch} \gamma \, d ct, \\ ct^{(1)} &= \int_0^{ct} \operatorname{ch} \gamma \, d ct. \end{aligned} \right\} \quad (85A)$$

Они получаются срезом параллельно оси  $x^{(1)} = \chi$ . Собственное время  $ct$ , согласно (84A), есть псевдоевклидова длина дуги мировой линии. При *интегральном движении* (также коллинеарном) угол  $\gamma$  и скорость  $v$  изменяются непрерывно. В частности, при равномерно ускоренном движении  $\bar{g}(\tau) = \bar{g} = \text{const}$ . С учётом (80A), (84A) имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \gamma &= \bar{g}/c \, d \tau \rightarrow \bar{R} \, d \gamma = d c \tau, \\ \gamma &= \bar{g}/c \cdot \tau \rightarrow \bar{R} \cdot \bar{g} = c \tau \quad (\bar{g} = \text{const}); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{sh} \gamma &= \bar{g}/c \, dt^{(1)} \rightarrow R \, d \operatorname{sh} \gamma = d ct^{(1)}, \\ \operatorname{sh} \gamma &= \bar{g}/c \cdot t^{(1)} \rightarrow \bar{R} \cdot \operatorname{sh} \gamma = ct^{(1)} \quad (\bar{g} = \operatorname{const}). \end{aligned} \right\} \quad (86A)$$

Причём  $\frac{d \gamma}{dt} = 1/c \cdot \bar{g}(\tau)$  - *гиперболическая* *угловая*

*псевдоскорость*,  $\bar{R} = c^2/\bar{g}$  - радиус гиперболической кривизны (в том числе как мгновенные характеристики). Теперь указанные соотношения одновременности для равномерно ускоренного движения в  $\tilde{E}_1$  можно выразить через временные аргументы:

$$\left. \begin{aligned} d ct &= d ct^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{g} \cdot t^{(1)}/c]^2} = d ct^{(1)}/\sqrt{1 + [c \cdot t^{(1)}/\bar{R}]^2}, \\ ct &= c^2/\bar{g} \cdot \operatorname{Arsh} (\bar{g} \cdot t^{(1)}/c) = \bar{R} \cdot \operatorname{Arsh} (c \cdot t^{(1)}/\bar{R}); \end{aligned} \right\} \quad (88A)$$

$$\left. \begin{aligned} d ct^{(1)} &= \operatorname{ch} (\bar{g} \cdot \tau/c) \, d c \tau = \operatorname{ch} (c \cdot \tau/\bar{R}) \, d c \tau, \\ ct^{(1)} &= c^2/\bar{g} \cdot \operatorname{sh} (\bar{g} \cdot \tau/c) = \bar{R} \cdot \operatorname{sh} (c \cdot \tau/\bar{R}); \\ (t^{(1)})/\tau &= \operatorname{sh} \gamma/\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (89A)$$

Продолжим изучение прямолинейного равномерно ускоренного движения. Координатная и собственная скорости такого движения — функции координатного времени, но они выражаются синхронно в  $\tilde{E}_1$  и через собственное время:

$$v = v_t(t^{(1)}) = c \cdot \operatorname{th} \gamma = \bar{g} \cdot t^{(1)}/\sqrt{1 + [\bar{g} \cdot t^{(1)}/c]^2} \equiv v_t(\tau) = c \cdot \operatorname{th} (\bar{g} \cdot \tau/c) < \bar{g} \cdot \tau < \bar{g} \cdot t^{(1)}. \quad (90A)$$

$$v^* = v_\tau^*(\tau) = c \cdot \operatorname{sh} \gamma = c \cdot \operatorname{sh} (\bar{g} \cdot \tau/c) \equiv v_\tau^*(t^{(1)}) = \bar{g} \cdot t^{(1)} > \bar{g} \cdot \tau. \quad (91A)$$

Эти неравенства имеют тригонометрическую природу:  $\operatorname{th} \gamma < \gamma < \operatorname{sh} \gamma$ .

*Собственное расстояние* как функция времени по хронометру наблюдателя  $N_1$  имеет вид:

$$\chi = \chi_t(t^{(1)}) = \int_0^{t^{(1)}} v_t(t^{(1)}) dt^{(1)} = \bar{R} \cdot (\operatorname{ch} \gamma - 1) = \bar{R} \cdot (\sqrt{1 + [ct^{(1)}/\bar{R}]^2} - 1). \quad (92A)$$

Неявным образом функциональная связь между  $\chi$  и  $ct^{(1)}$  устанавливается через соотношения:

$$\left. \begin{aligned} ct^{(1)} &= \bar{R} \cdot \text{sh } \gamma, \\ \chi &= \bar{R} \cdot (\text{ch } \gamma - 1). \end{aligned} \right\} \quad (93A)$$

Как из (92A), так и из (93A) выводится гиперболическое кинематическое уравнение для описания равномерно ускоренного движения в координатах  $\vec{E}_1 = \langle \chi, \vec{ct}^{(1)} \rangle$ :

$$(\chi + \bar{R})^2 - (ct^{(1)})^2 = \bar{R}^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} \chi + \bar{R} &= \text{ch } \gamma \cdot \bar{R} \\ ct^{(1)} &= \text{sh } \gamma \cdot \bar{R} \end{aligned} \right\} \rightarrow \bar{R} = \frac{\chi}{\text{ch } \gamma - 1} = \frac{ct^{(1)}}{\text{sh } \gamma} = \text{const.} \quad (94A)$$

С точки зрения геометрии Минковского это уравнение задаёт псевдоокружность вещественного радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{g}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , а в аффинном смысле — гиперболу. Её траектория имеет постоянную гиперболическую кривизну  $\bar{K} = 1/\bar{R}$ . В СТО данный тип движения поэтому именуется как гиперболическое. Это простейший тип коллинеарного интегрального движения. Кинематическая гипербола занимает промежуточное положение между нерелятивистской кинематической параболой от  $t^{(1)}$  и изотропной прямой светового луча, исходящей из точки О [рис. 2A (3)]:

$$\bar{R} + ct^{(1)} < \chi = \chi_\tau(t^{(1)}) < \bar{g} \cdot t^{(1)^2}/2 \quad (\text{sh } \gamma < \text{ch } \gamma < \text{ch}^2 \gamma). \quad (95A)$$

То же собственное расстояние как функция времени по хронометру наблюдателя  $N_m$  имеет вид:

$$\chi = \chi_\tau(\tau) = \int_0^\tau v_\tau^*(\tau) d\tau = \bar{R} \cdot (\text{ch } \gamma - 1) = \bar{R} \cdot [\text{ch}(c \cdot \tau/\bar{R}) - 1]. \quad (96A)$$

Это уравнение гиперболической косинусоиды (цепной линии), представленное в специальных собственных квазидекартовых координатах  $\vec{E} = \langle \chi, \vec{ct} \rangle$  [(рис. 2A(4)]. Прямолинейная ось  $\vec{ct}$  здесь получается из гиперболической  $\vec{ct}$  в  $\vec{E}_1$  спрямлением и сферической ортогонализацией по отношению к собственному евклидову подпространству  $\langle \mathcal{E}^{3,(1)} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , то есть в данном случае к оси  $\chi$ .

Формально это осуществляется преобразованием мгновенных характеристических углов движения по сферическо-гиперболической аналогии конкретного синус-тангенсового типа:

$$\operatorname{tg} \varphi (\gamma) \equiv \operatorname{sh} \gamma, \quad \sin \varphi (\gamma) \equiv \operatorname{th} \gamma.$$

В таких квазидекартовых координатах тангенс угла наклона мировой линии (по отношению к стреле собственного времени) определяет тригонометрически собственную скорость объекта, согласно (76А). *Сферический угол движения* в базисе  $\vec{E}$  заключается в пределах от 0 до  $\pi/2$ . *Специальное квазиевклидово пространство* определяется здесь как прямая сферически квазиортогональная сумма собственного евклидова подпространства  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и преобразованной по синус-тангенсной аналогии спрямлённой стрелы собственного времени  $\vec{\sigma\tau}$ :

$$\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle \oplus \vec{\sigma\tau}.$$

(97А)

На рис. 2 А (2) и (4) представлены варианты как для исходной прямолинейной, так и для исходной гиперболической стрелы собственного времени. В последнем случае  $\vec{E}$  есть неинерциальная система. Мировая линия в этом координатном пространстве описывает движение наблюдателя  $N_1$  в обратном направлении.

Ранее, когда формально использовалась эта аналогия, преобразование самого пространства не осуществлялось. Теперь же перекрёстные подпространства подвергнуты сферической квазиортогонализации; общий угол наклона стал истинным:  $\varphi_R (\gamma) \rightarrow \varphi (\gamma)$ , где  $\operatorname{tg} \varphi_R \equiv \sin \varphi$ . Но правило суммирования согласованных углов, по-прежнему, распространяется только на гиперболические углы:

$$\varphi [\cos \alpha_{(13)} \cdot \gamma_{13}] = \varphi [\cos \alpha_{(12)} \cdot \gamma_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \gamma_{23}]$$

$$(\cos \alpha_{(13)} \cdot \varphi_{13} \neq \cos \alpha_{(12)} \cdot \varphi_{12} + \cos \alpha_{(23)} \cdot \varphi_{23}),$$

(98А)

где  $\cos \alpha = \pm 1$ .

Мировая линия в специальном квазиевклидовом пространстве имеет квазиевклидову протяжённость - времениподобный инвариант преобразования  $\operatorname{defh} \Gamma = \operatorname{rot} \Phi (\Gamma)$ , аналогично пространствуподобному инварианту (57А):

$$d \operatorname{ct}^{(1)2} = d \operatorname{ct}^2 + d\chi^2 = (\cos \varphi d \operatorname{ct}^{(1)})^2 + (\sin \varphi d \operatorname{ct}^{(1)})^2 \equiv$$

$$\equiv (\operatorname{sch} \gamma d \operatorname{ct}^{(1)})^2 + (\operatorname{th} \gamma d \operatorname{ct}^{(1)})^2 = \operatorname{const}.$$

(99А)

Равномерное прямолинейное движение описывается прямой с углом наклона  $\varphi = \varphi(\gamma) = \text{const}$  как бы в обычном квазиевклидовом пространстве (гл.8А). Равномерно ускоренное прямолинейное движение описывается косинусоидой (96А). Для него при неуклонном возрастании времени собственное расстояние стремится сверху к функции

$$f(c\tau) = \bar{R} \cdot (1/2 \exp c\tau/\bar{R} - 1).$$

В собственном квазидекартовом базисе кинематическая косинусоида располагается ниже нерелятивистской кинематической параболы от  $\tau$  и фокальной касательной, но выше касательной окружности [рис. 2А (4)]:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{g} \cdot \tau/2 < \\ -k \cdot \bar{R} + c\tau \leq \end{array} \right\} \chi = \chi_{\tau}(\tau) < R - \sqrt{R^2 - (c\tau)^2}, \quad (100А)$$

где справа  $|c\tau| \leq |R|$ , причём

$$k = \omega + 1 - \sqrt{2} \approx 0,467; \quad \omega = \text{Arsh } 1 \approx 0,881.$$

Имеем тригонометрический эквивалент этого неравенства:

$$\gamma^2/2 < \text{ch } \gamma - 1 < 1 - \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad \text{где справа } |\gamma| \leq 1.$$

Отметим, что в псевдодекартовом и квазидекартовом базисах мировые линии равномерно ускоренного движения располагаются по разным сторонам относительно кинематической параболы. При угле движения  $\gamma_F = \omega$  ( $\varphi(\gamma_F) = \pi/4$ ) собственная скорость  $v^*$  достигает значения «с» и далее преодолевает его при  $\gamma > \omega$  ( $\varphi(\gamma) > \pi/4$ ). Для кинематической гиперболы этот угол соответствует фокусу. Фокальное значение координатной скорости составляет  $v_f = c \cdot \text{sch } \omega = c / \sqrt{2}$ . Координаты фокальной точки в обоих базисах (в псевдоплоскости и в квазиплоскости) выражаются через гиперболический радиус в виде:

$$\begin{aligned} \chi_F &= (\sqrt{2} - 1) \cdot \bar{R} \approx 0,41 \bar{R}; \\ c\tau^{(1)} &= \bar{R}, \quad c\tau_f = \omega \bar{R} \approx 0,881 \bar{R}. \end{aligned}$$

Гиперболическое движение характеризуется также постоянной гиперболической угловой псевдоскоростью:

$$\eta_k = \frac{d\gamma}{d\tau} = c/\bar{R} = \bar{g}/c. \quad (101А)$$

Ось гиперболической ротации в этом случае пространству подобна, псевдоевклидово ортогональна псевдоплоскости ротации и проходит через центр  $O$  [рис. 2А (3)]. Фокальные касательные соответствуют скоростям  $v_F$  и  $v_F^* = c$ , а также углам наклона  $\omega$  и  $\varphi(\omega) = \pi/4$ . Используемая в формулах СТО скорость света — координатная характеристика. Собственная скорость света в вакууме  $c^*$  бесконечна.

Классический *принцип соответствия* в математической трактовке здесь проявляется в том, что кинематические гипербола и парабола в точке  $O_1$  [рис 2А (3)] имеют одну и ту же касательную окружность радиуса  $R$ . Это тождественно тому, что три указанные кривые в точке  $O_1$  имеют одинаковые производные первого (в данном случае нулевые) и второго порядка. Следовательно, кинематическая парабола, аппроксимирующая гиперболу в окрестности начальной точки  $O_1$  (в нерелятивистской области), имеет тождественный "параболический радиус" в координатах Минковского исходя из соотношения:

$$\chi = g \cdot t^{(1)2} / 2 = [c \cdot t^{(1)}]^2 / 2\bar{R}.$$

\* \* \*

В тригонометрической форме представляются и динамические релятивистские характеристики. С использованием дифференциальных соотношений одновременности (84А), (85А) для общего случая поступательного физического движения материального тела устанавливаются тригонометрические скалярные, векторные и тензорные координатные отображения для его инерционной массы, импульса и энергии с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базиса  $\vec{E}_1$ . При математическом описании поступательного физического движения материального тела последнее сводится к таковому для его центра массы как некоторой абстрактной материальной точки. Согласно 2-му закону механики Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} = F_{\tau}(\tau) &= m_0 \cdot \frac{d\mathbf{v}^{(m)}}{d\tau} = \frac{d[m_0 \cdot \mathbf{v}^{(m)}]}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}^{(m)}}{d\tau} = m_0 \cdot \mathbf{g}(\tau) = m_0 c \cdot \frac{\mathbf{g}(\tau)}{c} = m_0 c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \equiv \\
 &\equiv m_0 c \cdot \frac{ch \gamma d\gamma}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c \cdot sh \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d[(ch \gamma \cdot m_0) \cdot (th \gamma \cdot c)]}{dt^{(1)}} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt^{(1)}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt^{(1)}} = F_{\tau}(t^{(1)}).
 \end{aligned}$$

(Причём в первой вышеуказанной форме только для мгновенного собственного псевдодекартового базиса, где  $m = m_0 = \text{const.}$ ) Это ковариантная форма 2-го закона Ньютона, где одна и та же собственная сила  $\mathbf{F}$  в системах  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{E}}_m$  определяется исходя из одновременности, согласно (84А), (85А), в одной и той же мировой точке массы  $M$ . Мощность от действия собственной силы также в форме механики Ньютона в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  выражается в виде:

$$N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m_0 c \cdot \mathbf{v} \cdot \frac{ch \gamma d\gamma}{dt^{(1)}} = \frac{d(m_0 c^2 \cdot ch \gamma)}{dt^{(1)}} = \frac{d(m c^2)}{dt^{(1)}} = \frac{dE}{dt^{(1)}}.$$

(Оба уравнения в физической форме впервые получены Пуанкаре.)

Отсюда далее в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  определяются скалярные значения релятивистских динамических характеристик: полной массы  $m = ch \gamma \cdot m_0$ , кинематического импульса  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_0 \mathbf{v}^* = sh \gamma \cdot m_0 c = sh \gamma \cdot \mathbf{P}_0$ , полного импульса  $\mathbf{P} = m\mathbf{c} = ch \gamma \cdot \mathbf{P}_0$  и полной энергии  $E = mc^2 = ch \gamma \cdot m_0 c^2 = ch \gamma \cdot E_0$ . Следовательно, скалярные значения полной массы, импульса и энергии суть косинусные гиперболические проекции собственных характеристик:

$$m = ch \gamma \cdot m_0 = \sqrt{m_0^2 + (\mathbf{p}/c)^2} \approx m_0 + m_0 v^{*2}/2c^2 \approx m_0 + m_0 v^2/2c^2,$$

$$mc = \mathbf{P} = ch \gamma \cdot \mathbf{P}_0 = \sqrt{\mathbf{P}_0^2 + \mathbf{p}^2} \approx \mathbf{P}_0 + m_0 v^{*2}/2c \approx \mathbf{P}_0 + m_0 v^2/2c,$$

$$mc^2 = E = ch \gamma \cdot E_0 = \sqrt{E_0^2 + (\mathbf{p}c)^2} \approx E_0 + m_0 v^{*2}/2 \approx E_0 + m_0 v^2/2.$$

Причём первые приближённые значения ограничивают характеристики сверху, а вторые - снизу, что следует из тригонометрического неравенства

$$1 + th^2 \gamma/2 < ch \gamma < 1 + sh^2 \gamma/2.$$

Указанные три релятивистские *полные* характеристики имеют одинаковое теоретическое значение, так как они прямо пропорциональны друг другу. В состоянии относительного



покоя (при  $p = 0$ ) любой материальный объект имеет собственный импульс  $P_0 = m_0c$  и собственную эйнштейнову энергию  $E_0 = m_0c^2$ . Происхождение этой пары динамических характеристик материального тела (в *состоянии относительного покоя*) может объяснить постулат, согласно которому все материальные объекты совершают перманентное движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  вдоль своих мировых линий с постоянной псевдоскоростью «с». (Подробнее это обсуждается в последней главе 10А.)

К вышеуказанным скалярным значениям динамических характеристик привели изначальные законы классической механики Ньютона, записанные с учётом релятивистского сложения скорости физического движения. В тригонометрической трактовке понятию "физическая скорость" отвечают гиперболический угол движения и его тригонометрические функции.

Но последние в релятивистском смысле имеют *тензорный* характер. Они представляются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  как двухвалентные тензоры в целом и как одновалентные тензоры — векторы в виде смешанных проекций. Следовательно, для тех же динамических характеристик в теории относительности наряду со скалярными существуют векторные и тензорные формы, получаемые соответствующей модификацией вышеприведённых уравнений механики Ньютона. Матрица гиперболического ротационного преобразования (364). (31 А) в  $\tilde{E}_1$  имеет вид:

roth  $\Gamma$

$\text{ch } \gamma \cdot \vec{e}'_\alpha + \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}'_\alpha$	$\text{sh } \gamma \cdot \vec{e}_\alpha$
$\text{sh } \gamma \cdot \vec{e}'_\alpha$	$\text{ch } \gamma$

Это *гиперболически ортогональный тригонометрический тензор движения*. Если вышеуказанный материальный объект с точки зрения наблюдателя в исходном универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  совершает поступательное физическое движение с мгновенной скоростью  $\mathbf{v} = v \cdot \vec{e}_\alpha = c \cdot \text{th } \gamma = c \cdot \text{th } \gamma \cdot \vec{e}_\alpha$  или  $\mathbf{v}^* = v^* \cdot \vec{e}'_\alpha = c \cdot \text{sh } \gamma = c \cdot \text{sh } \gamma \cdot \vec{e}'_\alpha$ , то в том же базисе определяются три мгновенных *сопутствующих тензора*: тензор полной инерционной массы, тензор полного импульса и тензор полной энергии (плюс их смешанные векторные проекции):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_m &= m_0 \cdot \text{roth } \Gamma, & \left\{ \begin{aligned} \mathbf{p}/c &= m_0 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \mathbf{p} &= m_0 c \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = m_0 \mathbf{v}^* = m \mathbf{v}. \end{aligned} \right. \\ \mathcal{E}_p &= m_0 c \cdot \text{roth } \Gamma, & \\ \mathcal{E}_E &= m_0 c^2 \cdot \text{roth } \Gamma, & \left\{ \begin{aligned} \mathbf{p}c &= m_0 c^2 \cdot \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

Например, последний из указанных известен как *тензор энергии-импульса*. В физической форме в  $\tilde{E}_1$  он определяется в виде

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{E} \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' + E_0 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha' & \mathbf{p} \cdot c \\ \hline \mathbf{p}' \cdot c & E \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline mc^2 \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' + m_0 c^2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha' & \mathbf{v}^* \cdot m_0 c^2 \\ \hline \mathbf{v}^* \cdot m_0 c^2 & mc^2 \\ \hline \end{array}.$$

В свою очередь, этот 4×4-тензор проективно расщепляется на 3×3-тензор (проекция на евклидово подпространство  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ ), скаляр (проекция на стрелу времени  $\overrightarrow{ct}^{(1)}$ ) и пару сопряжённых векторов (смешанные проекции). В мгновенном собственном базисе этот двухвалентный тензор является абсолютным инвариантом  $\tilde{E}_0 \cdot I = m_0 c^2 \cdot I$ .

С другой стороны, физические характеристики, подвергаемые лоренцеву сокращению, вычисляются в  $\tilde{E}_1$  через деформационную матрицу-тензор (365), (31 А), которая в нём имеет вид:

$$\text{defh } \Gamma \begin{array}{|c|c|} \hline \text{sch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_\alpha' + \overrightarrow{\mathbf{e}}_\alpha' & -\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \hline + \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' & \text{sch } \gamma \\ \hline \end{array}.$$

По существу это есть *сферически квазиортогональный тензор деформации* в  $\tilde{E}_1$ . Отметим, что релятивистское возрастание массы движущегося тела имеет также чисто *кажущуюся* - координатную природу. С учётом лоренцева сокращения объёма (40А) формальная *координатная плотность* тела возрастает ещё более. Но это вовсе не означает, что на тело в движении действуют какие-либо дополнительные сжимающие силы. Последние как собственные определялись бы одинаково в любых инерциальных системах отсчёта, в том числе в

мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$ . В тригонометрической трактовке СТО все релятивистские преобразования физических величин определяются операциями с вышеуказанными тензорами движения и деформации.

Заметим также, что через соотношения (80А), (81 А) устанавливается *релятивистский аналог формулы Циолковского* для ракеты, движущейся за счёт внутренней реактивной силы:

$$F = m_0(\tau) \cdot g(\tau) = u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{d\tau},$$

$$u \cdot \frac{dm_0(\tau)}{m_0(\tau)} = g(\tau) d\tau = c d\gamma(\tau),$$

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp\left[-\frac{c}{u} \cdot \gamma(\tau)\right],$$

где  $m_0$  и  $m_0(\tau)$  - начальная и мгновенная масса ракеты,  $u$  - скорость истечения реактивного топлива,  $\gamma(\tau) = \text{Arth}[v(\tau)/c]$ .

Для гипотетической фотонной ракеты ( $u = c$ ) имеем:

$$m_0(\tau) = m_0 \cdot \exp[-\gamma(\tau)].$$

В сравнении с классическим вариантом Циолковского, вышеуказанная релятивистская формула даёт остаточную массу ракеты меньше исходя из достигнутой координатной скорости и больше исходя из достигнутой собственной скорости:

$$m_0 \cdot \exp(-v^*/u) < m_0(\tau) < m_0 \cdot \exp(-v/u). \text{ или } \text{sh } \gamma > \gamma > \text{th } \gamma.$$

\* \* \*

В качестве конкретного примера для иллюстрации, в том числе и *парадокса близнецов*, рассмотрим тригонометрические выкладки для гиперболического движения ракеты с реверсом, схема которого приведена на рис. 3А. (Подобные примеры впервые рассматривал Ланжевен.)

$$\chi = L/2 = c^2/g (\text{ch } \gamma_{\max} - 1) \rightarrow \text{ch } \gamma_{\max} = g \chi/c^2 + 1 = \chi/R + 1;$$

$$\tau = (4c/g) \cdot \gamma_{\max}, \quad t^{(1)} = (4c/g) \cdot \text{sh } \gamma_{\max};$$

$$v_{\max} = c \cdot \text{th } \gamma_{\max}, \quad v_{\max}^* = c \cdot \text{sh } \gamma_{\max};$$

$$m_0(\tau)/m_0 = \exp[(-4c/u) \cdot \gamma_{\max}].$$

Полёт фотонной ракеты до окрестности ближайшей звезды "Проксима Центавра" и обратно в вышеуказанном идеальном режиме характеризуется следующими параметрами:

- расстояние в одну сторону  $L \approx 4,26$  световых лет  $\approx 40,3 \cdot 10^{15}$  м.

- внутреннее ускорение  $g = 10$  м/сек<sup>2</sup>,

- скорость истечения топлива  $u = c$ ;

— результаты вычислений

$$\chi \approx 20,15 \cdot 10^{15} \text{ м}, \quad R \approx 9 \cdot 10^{15} \text{ м}, \quad t_F \approx 305 \text{ суток};$$

$$\text{ch } \gamma_{\max} \approx 3,239; \quad \text{sh } \gamma_{\max} \approx 3,081; \quad \text{th } \gamma_{\max} \approx 0,951; \quad \gamma_{\max} \approx 1,8437;$$

$$v_{\max} \approx 0,951c, \quad v^*_{\max} \approx 3,061c,$$

$$\tau \approx 2,21 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 7 \text{ лет}, \quad t^{(1)} \approx 3,70 \cdot 10^8 \text{ сек} \approx 11,7 \text{ лет}.$$

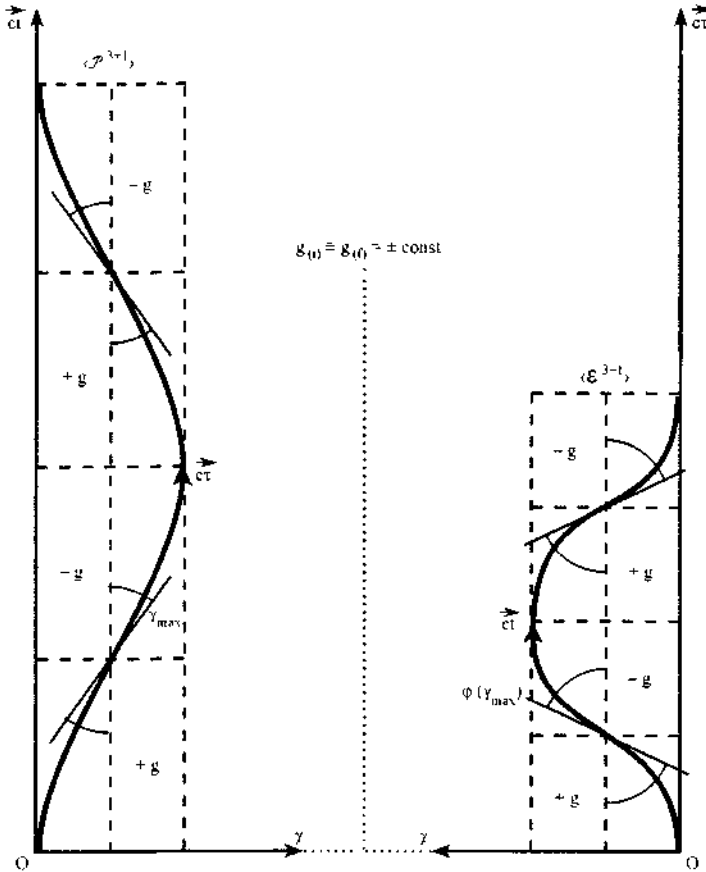


Рис. 3А. Реверсивное гиперболическое движение материальной точки в псевдодекартовых (слева) и в квазидекартовых (справа) координатах под действием постоянного внутреннего ускорения или эквивалентного гравитационного поля с постоянной напряжённостью.

В данном случае время в световых годах, выражающее в астрономическом масштабе покрытое расстояние туда и обратно, даже больше затрачиваемого собственного времени. Относительное снижение массы фотонной ракеты (только за счёт расхода топлива) по *релятивистской* формуле составляет:  $m_0(\tau)/m_0 = \exp(-4\gamma_{max}) \approx 1/1600$ .

Фотонная ракета с земным внутренним ускорением теоретически менее чем за год достигнет собственной скорости «с» и в конце разгона превысит её трёхкратно. Однако по завершении этой гипотетической экспедиции от первоначальной снаряжённой массы ракеты должна остаться совершенно ничтожная часть, что красноречиво свидетельствует об умозрачности путешествий даже к ближайшим звёздным системам за вышеуказанные порядки времён с использованием релятивистских эффектов СТО.

\* \* \*

В общем случае неравномерного, но опять-таки *прямолинейного* физического движения определяются мгновенные характеристики искривления мировой линии по касательным к ней гиперболе (в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ) или гиперболической косинусоиде (в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ ) в какой-либо точке М. При таком типе движения мировая линия в целом находится в объемлющей псевдоплоскости или квазиплоскости.

Как и в случае идентичной касательной *окружности* к каким-либо регулярным кривым (в одной точке), для идентичных касательных *гиперболы* и гиперболической *косинусоиды* справедливо одно общее утверждение. А именно кривые с такого рода идентичными касательными в точке М имеют в ней же тождественные производные первого и второго порядка, выраженные в соответствующей соприкасающейся плоскости, псевдоплоскости, квазиплоскости.

Радиус гиперболической кривизны в соприкасающейся  $\langle P^{1+1} \rangle$  направлен по вектору псевдонормали  $\vec{\bar{p}}$  от центра касательной гиперболы. Радиус сферической кривизны в соприкасающейся  $\langle \mathcal{E}^{1+1} \rangle$  направлен по вектору квазинормали  $\vec{\bar{q}}$  к центру касательной окружности. Вектор касательной  $\vec{e}$  псевдоортогонален  $\vec{\bar{p}}$  и квазиортогонален  $\vec{\bar{q}}$ . Все эти векторы суть единичные в своей метрике. Общий математический критерий плоского типа кривой, а следовательно, и вышеуказанного типа мировой линии есть нулевое кручение при ненулевой кривизне.

Пусть координаты точек мировой линии фиксируются в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в заданном универсальном базисе  $\vec{E}_i$ . Относительно него *простое* прямолинейное физическое движение материального

тела определяется тем, что характеристический угол движения  $\gamma$  имеет постоянный вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha$  именно в  $\tilde{\mathbb{E}}_1^{(3)}$ . Тогда объемлющая псевдоплоскость обязательно содержит в себе стрелу времени  $\vec{ct}^{(1)} = \vec{ct}$ . Ей отвечает пространственная ось  $\chi$ . Она, касательная  $\mathbf{e}$  и псевдонормаль  $\bar{\mathbf{p}}$  имеют одинаковый вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha$ . Собственная ось  $\chi$  образует угол  $\gamma$  с вектором  $\bar{\mathbf{p}}$  и угол  $\varphi(\gamma)$  с вектором  $\bar{\mathbf{q}}$ . Те же углы образует вектор  $\mathbf{e}$  с осью  $\vec{ct}$  в псевдоплоскости и с осью  $\vec{ct}$  в квазиплоскости. Из общих тригонометрических соображений вычисляем все определяющие характеристики касательных кривых.

Для касательной гиперболы в объемлющей псевдоплоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \frac{|d\gamma|}{dct} = \frac{d \operatorname{Arth} \left| \frac{d\chi}{dct} \right|}{\sqrt{dct^2 - d\chi^2}} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{dct^2} \right|}{\left[ 1 - \left( \frac{d\chi}{dct} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{d^2\chi^{(m)}}{dct^2}, \\ \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{R}, \\ ct_R = ct - \operatorname{sh} \gamma \cdot \bar{R}, \end{array} \right. \quad \left| \operatorname{th} \gamma = \frac{d\chi}{dct} \right. \quad (102A)$$

Для касательных косинусоиды и окружности в объемлющей квазиплоскости

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/\bar{R} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot 1/\bar{r} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{d\varphi(\gamma)}{dct} = \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot \frac{d \operatorname{arctg} \left| \frac{d\chi}{dct} \right|}{\sqrt{dct^2 + d\chi^2}} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{dct^2} \right|}{\sqrt{1 + \left( \frac{d\chi}{dct} \right)^2}}, \\ 1/\bar{r} = \frac{\left| \frac{d^2\chi}{dct^2} \right|}{\left[ 1 + \left( \frac{d\chi}{dct} \right)^2 \right]^{3/2}} = \left| \frac{d^2\chi^{(m)}}{dct^2} \right|, \\ \chi_R = \chi - \operatorname{ch} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \cdot \bar{R}, \quad \chi_t = \chi + \cos \varphi(\gamma) \cdot \bar{r}, \\ ct_R = ct - \gamma \cdot \bar{R}, \quad ct_t = ct - \sin \varphi(\gamma) \cdot \bar{r}, \end{array} \right. \quad \left| \operatorname{sh} \gamma = \frac{d\chi}{dct} = \operatorname{tg} \varphi(\gamma) \right. \quad (103A)$$

Аналогичным образом вычисляются касательные гиперболы и меридианные (большие) окружности к простым относительно  $\tilde{\mathbb{E}}_1$  плоским кривым в пространствах  $\langle P^{2+l} \rangle$  и

$\langle Q^{2+1} \rangle$  в гиперболической и в сферической неевклидовых геометриях.

Вообще же тригонометрические формулы

$$1/\bar{R} = \frac{d\gamma}{d\hat{t}}, \quad 1/\bar{r} = \frac{d\varphi}{d\hat{t}} \quad (104 A)$$

применимы и в частных дифференциалах для плоских и закрученных кривых, но с условием  $e_a = \text{const.}$  (См.: о разложении абсолютной кривизны на две взаимно-ортогональные компоненты в гл. 10А.)

## Глава 6А. Изоморфное отображение псевдоевклидова пространства в квазиевклидово и в сжатое квазиевклидово пространства

Пространство, само по себе, без движущейся в нём материи не имеет какого-либо физического смысла. Это всего лишь та или иная математическая абстракция, приспособленная для описания в удобной форме законов движения материи координатным способом. При наложении на формы этих законов каких-либо ограничений, например требования ковариантности, выбор допустимого координатного пространства становится более определённым. В предыдущей главе, согласно (97А), было введено *специальное* квазиевклидово пространство  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  относительно заданного  $\check{E}_1$ . Его гносеологическое значение может состоять в том, что в нём достаточно наглядно представляются разнообразные варианты релятивистских путешествий в объективной оценке самого путешественника N (но не его как простого наблюдателя). В такой объективной оценке евклидова составляющая пространства-времени в целом остаётся неизменной. В свою очередь, стрела текущего собственного времени путешественника N перманентно сферически ортонормируется по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ . При этом она же оказывает перманентное воздействие на  $\vec{ct} = \vec{ct}^{(1)}$ , что выражается в конкретной мировой линии наблюдателя  $N_1$  в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ . Следовательно, для каждого возможного варианта путешествия есть свой отклик в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$



виде мировой линии - стрелы времени  $\vec{ct}$ , в общем случае криволинейной. Квазидекартовы координаты точек этой мировой линии фиксируют затраченное собственное время  $st$  путешественника  $N$  и покрытое им собственное расстояние  $\chi$ , измеряемое синхронно с наблюдателем  $N_1$  в универсальном базисе. Условие синхронизации событий в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  всегда одно и то же: параллельность множества мировых точек постоянному подпространству  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , что отвечает соотношению (85А). Евклидова длина мировой линии равна здесь затраченному координатному времени  $ct$ .

В данном аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$  формально синтезируется только из времениподобной составляющей векторного пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Например, в координатах  $\langle \chi, \vec{ct} \rangle$  (рис. 2А) линия или вектор с любым наклоном отображает только временной процесс, то есть это всегда мировая линия. (Возможно аналогичное *всеобъемлющее* преобразование  $\langle P^{3-1} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$  совместно с конкретными геометрическими объектами.) В ином аспекте  $\langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$  синтезируется только из пространствуподобной составляющей векторного  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В этом специальном квазиевклидовом пространстве все линии и векторы пространствуподобны. Особый интерес представляют такие преобразования исходного пространства совместно с гиперboloидами I и II.

Гиперboloид I как геометрическое место времениподобных гиперболических кривых  $\vec{ct}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется в цилиндрическую поверхность в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , образующие которой - те же спрямлённые гиперболы  $\vec{ct}$ . С другой стороны, исходный цилиндр из кругового множества осей  $\vec{ct}$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется в *катеноид* I в  $\langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$  геометрическое место времениподобных косинусоидных кривых  $\vec{ct}$ . Катеноид 1-односвязная (*минимальная*) гиперповерхность, получаемая вращением времениподобной гиперболической косинусоиды вокруг централизованной оси  $\vec{ct}_R$ .

Аналогичное преобразование гиперboloида II как геометрического места пространствуподобных гиперболических кривых даёт *катеноид* II - двухсвязную гиперповерхность в  $\langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$ . Он получается вращением пространствуподобной гиперболической косинусоиды вокруг оси  $\vec{ct}$ . В данном случае стрела времени

остаётся неизменной, а преобразуются только пространственные оси с сохранением их вектора направляющих косинусов.

Между гиперboloидами I, II и катеноидами I, II устанавливается изоморфизм на основе равенства либо пространственных координат (в первом случае), либо временной координаты (во втором случае). Но более того, геометрию гиперboloида I возможно реализовать на изометричной ему гиперповерхности в некотором объемлющем специальном квазиевклидовом пространстве  $\{\langle \mathbb{E}^{n-1} \rangle\}$ . Для этого осуществим дальнейшее изоморфное преобразование катеноида I.

Как известно, эвольвента гиперболической косинусоиды  $\vec{ct}$  (цепной линии) есть *трактриса*. Причём при развёртке косинусоиды её евклидова длина  $\vec{ct}$  переносится на нормаль трактрисы. Вместе с тем, текущий нормальный вектор трактрисы тождествен текущему касательному вектору гиперболической косинусоиды как вектор-расстояние между двумя указанными кривыми [рис. 2А (4)]. Формально это означает спрямление криволинейной стрелы времени  $\vec{ct}$  в текущую нормаль  $\vec{ct}$  трактрисы с соответствующей ей длиной. В процессе вышеуказанного вращения времениподобной косинусоиды вокруг централизованной оси  $\vec{ct}_R$  вместе с сопутствующей времениподобной трактрисой внутри катеноида I дополнительно производится гиперпсевдосфера Бельтрами. (Заметим, что при этом трактриса считается непрерывной кривой.) Все четыре указанные поверхности вращения: гиперboloид I, цилиндр, катеноид I и гиперпсевдосфера - гомеоморфны и имеют один и тот же характеристический параметр R (радиус вращения). Но среди них только гиперboloид I и гиперпсевдосфера Бельтрами имеют одну и ту же - постоянную и отрицательную *гауссову кривизну*. Последнее обстоятельство, согласно *теореме Бельтрами*, определяет гиперболическую неевклидову метрику на таких поверхностях, или метрику Ламберта. Как известно, гомеоморфизм и изометричность в малом каких-либо поверхностей необходимы и достаточны для изометричности в большом, то есть для изоморфности их внутренних геометрий в целом.

Отсюда следует главный вывод. *Цилиндрическая гиперболическая неевклидова геометрия изоморфна в целом геометрии Бельтрами на вещественной непрерывной гиперпсевдосфере при одном и том же характеристическом радиусе R.*

В данном изометричном отображении  $(n - 1)$ -мерный центральный пояс (или *экватор*) гиперboloида  $I$  и гиперпсевдосферы суть автоморфизмы. Фигуры, проходящие в процессе движения через него на гиперпсевдосфере Бельтрами претерпевают излом под углом  $180^\circ$ , что не отражается на их метрических и топологических свойствах.

Далее установим, как преобразуются координаты в процессе трансформации гиперboloида  $I$  в гиперпсевдосферу Бельтрами. Асимптотическая ось  $\vec{ct}_R$  образующих трактрис (собственная ось вращения гиперпсевдосферы) параллельна  $\vec{ct}$  [рис. 2А (4)]. Ось  $\chi_R$  трактрис направлена противоположно оси  $\chi$  — к центру вращения  $O$  на оси  $\vec{ct}_R$ , но имеет тот же вектор направляющих косинусов. Точка *возврата* трактрисы  $O_1$  отображает центральную точку гиперболы и поэтому также принадлежит кривой. При  $\Delta ct > 0$ :  $\nu$  и  $\gamma > 0$  в верхней и нижней частях, а в точке возврата они нулевые ( $\vec{g} = \text{const} > 0$ ). Из тригонометрических соображений и с учётом (89А). (94А) текущие координаты ответной точки  $M'$  трактрисы выражаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \chi_R &= \sin \varphi (\gamma) \cdot ct - \chi \equiv \text{th } \gamma \cdot ct - \chi \equiv \text{sch } \gamma \cdot \chi, \\ ct_R &= ct - \cos \varphi (\gamma) \cdot ct \equiv ct - \text{sch } \gamma \cdot ct = [1 - (\text{th } \gamma) / \gamma] \cdot ct, \end{aligned} \right\} \quad (105 \text{ A})$$

где функции  $\text{sch } \gamma$  и  $\text{th } \gamma/\gamma$  при движении вдоль кривой монотонно убывают от 1 до 0. Они вносят соответствующие уменьшающие коэффициенты в непрерывные отображения  $\chi \div \chi_R, ct \div ct_R$ , в результате чего исходная гипербола преобразуется в трактрису. Поэтому  $\chi_R$  и  $ct_R$  определяются как *сжатые координаты* собственного расстояния и собственного времени;  $\{\mathcal{E}^{n+1}\}$  определяется как *специальное сжатое квазиевклидово пространство*, объёмлющее псевдосферу Бельтрами.

Применив далее формулы гиперболического движения (86А), (87А), приводим соотношения (105А) к полной тригонометрической форме и вместе с этим вычисляем евклидово расстояние  $l_R$  вдоль трактрисы:

$$\left. \begin{aligned} \chi_R &= R \cdot y = R \cdot (1 - \operatorname{sch} \gamma), \\ c\tau_R &= R \cdot z = R \cdot (\gamma - \operatorname{th} \gamma), \\ \ell_R &= R \cdot \ell = R \cdot \ln \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{d c\tau_R}{d\chi_R} = \frac{dz}{dy} &= \operatorname{sh} \gamma \equiv \operatorname{tg} \varphi(\gamma), \\ d\ell_R &= dx^{(m)} = R \operatorname{th} \gamma d\gamma = v d\tau \end{aligned} \right\} \quad (106A)$$

Из этих параметрических уравнений следует, что *все трактрисы подобны между собой*, аналогично окружностям и равнобочным гиперболам. Множитель «R» есть коэффициент подобия как для гипербол, так и для трактрис. Уравнения для единичной трактрисы в явной и параметрической формах выражаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} z &= \operatorname{Arch} 1/u - \sqrt{1-u^2}, \\ \ell &= -\ln u, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} u &= 1 - y = \operatorname{sch} \gamma \leq 1, \\ (u_R &= R \cdot \operatorname{sch} \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (107 A)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{sch} \gamma \equiv \cos \varphi(\gamma), \\ z &= \gamma - \operatorname{th} \gamma \equiv \operatorname{Arth} \sin \varphi(\gamma) - \sin \varphi(\gamma), \\ \ell &= \ln \operatorname{ch} \gamma \equiv \ln \sec \varphi(\gamma). \end{aligned} \right\} \quad (108A)$$

Для сравнения укажем параметрические уравнения *сферической циклоиды*:

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos \varphi, \\ z &= \varphi - \sin \varphi, \\ \ell &= 4 \cdot (1 - \cos \varphi/2), \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} u_R &= R \cdot u, \\ z_R &= R \cdot z, \\ \ell_R &= R \cdot \ell \end{aligned} \right\}$$

Циклоиды также подобны между собой. Следовательно, по сути *трактриса есть гиперболический аналог циклоиды, но с одним циклом*.

В "фокальной" точке трактрисы, отвечающей  $\gamma = \omega = \operatorname{Arsh} 1 \approx 0,881$ .

$$u_F = \sqrt{2}/2 \approx 0.707 \quad (y_F = 1 - \sqrt{2}/2), \quad z_R = \omega - \sqrt{2}/2 \approx 0.174, \quad l_F = \ln 2, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right)_F = 1.$$

Из этих же соотношений для неё вытекает *неравенство прямоугольного треугольника*:

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{sch} \gamma) + (\gamma - \operatorname{th} \gamma) &> \ln \operatorname{ch} \gamma > \sqrt{(1 - \operatorname{sch} \gamma)^2 + (\gamma - \operatorname{th} \gamma)^2}, \\ (dy + dz > d\ell > \sqrt{dy^2 + dz^2}) \end{aligned}$$

Формально скорость равноускоренного движения в сжатых координатах, согласно (106А), выражается соотношением:

$$\frac{d\chi_R}{d\tau_R} = c/\text{sh } \gamma = \text{cosch } \gamma \cdot c = c^2/v^*,$$

то есть в процессе движения она изменяется от  $\infty$  до 0.

Кроме того, из (106А) и (105А) получаются предельные формулы:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \chi_R = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} (c\tau - c\tau_R) = R; \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} (t_R - c\tau_R) = R \cdot (1 - \ln 2);$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (c\tau - t_R) = R \cdot \ln 2 \quad (c\tau > t_R > c\tau_R).$$

Отсюда, в частности, следует, что в процессе равноускоренного движения какой-либо материальной точки, согласно его описанию в сжатых координатах, её мировая точка асимптотически приближается коси  $\vec{c}\tau_R$  [рис. 2А(4)].

Ввиду того, что гиперпсевдосфера Бельтрами получается вращением радиуса R трактрисы относительно своей асимптоты — оси  $\vec{c}\tau_R$ , то ортогонально ей она имеет тот же коэффициент подобия «R». Следовательно, *все гиперпсевдосферы Бельтрами подобны между собой в объемлющем квазиевклидовом пространстве  $\{\langle \mathcal{E}^{n+1} \rangle\}$  аналогично гиперсферам в  $\langle \mathcal{E}^{n+1} \rangle$  и гиперблоидам Минковского в  $\langle P^{n+1} \rangle$ .*

Гиперпсевдосфера Бельтрами получается вращением трактрисы с числом степеней свободы (n - 1). Главные радиусы её сферической кривизны:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -R \cdot \text{sh } \gamma \equiv -R \cdot \text{tg } \varphi(\gamma) = -R \cdot \text{ctg } \xi = -R \cdot c/v^* \\ &\text{— по меридианам (трактрисам),} \\ R_2 &= +R/\text{sh } \gamma = u_R/\text{th } \gamma \equiv u_R/\sin \varphi(\gamma) = u_R/\cos \xi = R \cdot v^*/c \\ &\text{— по локальным параллелям (ортогональным дугам)} \end{aligned} \right\} \quad (109 \text{ A})$$

$$(R_{1\tau} = -R, \quad R_{2\tau} = +R; \quad \varphi_F = \pi/4).$$

Здесь  $\xi = (\pi/2 - \varphi)$  - угол между нормалью  $\vec{c}\tau$  к поверхности и локальным радиусом вращения  $u_R$ , согласно *теореме Менье*. Он же, согласно (26А), есть угол параллельности Лобачевского, но в геометрии Бельтрами. Меридианы и локальные параллели псевдосферы используются в качестве геодезических (нормальных) криволинейных координат в её внутренней геометрии. Гауссова кривизна псевдосферы выражается в виде:

$$K_G = 1/R_1 \cdot 1/R_2 = -1/R^2 = \text{const} < 0.$$

Это, согласно *теореме Бельтрами*, определяет на поверхности гиперпсевдосферы гиперболическую метрику Ламберта, или метрику геометрии Лобачевского - Больяи.

С другой стороны, главные радиусы псевдокривизны гиперboloида I Минковского (гиперболической и сферической) постоянны по всей его поверхности:

$R_1 = -R$  - по меридианам (гиперболам),

$R_2 = +R$  - по локальным параллелям (ортогональным дугам).

Соответственно эти меридианы и локальные параллели могут использоваться в качестве геодезических (псевдоортогональных) криволинейных координат в его внутренней геометрии.

В геометрии Лобачевского - Больяи «R» есть некий вселенский параметр, или константа *Гаусса—Швепкарта*. Он характеризует степень искривления пространства Лобачевского - Больяи по отношению к плоскому евклидову пространству. Он же есть радиус гипотетической мнимой сферы Ламберта - Тауринуса, воплощённой впоследствии в гиперboloиде II Минковского. Обратим внимание на то, что гиперboloид II (верхний) повсюду вогнут и его радиус псевдокривизны постоянен во всех точках, как для сферы. А именно он равен «+iR». Изначальная идея Ламберта и последующее её развитие Тауринусом исторически открывали наиболее простой и естественный путь к реализации полноценной гиперболической неевклидовой геометрии — таковой на *сфере мнимого радиуса*. Этот путь стал возможен к реализации в полном объёме после открытия Пуанкаре и Минковским псевдоевклидова пространства с целью его применения в теории относительности.

Зоммерфельд (1909 г.) впервые установил гиперболический характер закона сложения скоростей в СТО, рассмотрев его действие как бы на сфере мнимого радиуса для случаев двух коллинеарных и двух ортогональных скоростей. Варичак (1910 г.) сделал предположение о тождественности закона сложения скоростей и правила сложения отрезков в геометрии Лобачевского - Больяи. Теоретическое обоснование этому дал Клейн, доказав изоморфизм группы Лоренца и группы однородного движения в пространстве Лобачевского — Больяи. Он же дал трактовку гиперболической геометрии в псевдоевклидовом пространстве Минковского - на гиперboloиде II.

Сценарий дальнейшего развития событий в данной области исследований был предопределён. Решающую роль в понимании того, что различные способы построения одной и той же неевклидовой геометрии приводят к тождественным конечным результатам сыграли классические проективные модели Клейна и Пуанкаре. Отсюда на первый план выходит выбор наиболее простого и наглядного способа аналитического изучения неевклидовых геометрий вообще.

В данной работе для изучения движений и деформаций в гиперболической и в сферической неевклидовых геометриях применяются относительно простые средства *квадратичной тензорной тригонометрии*. Тригонометрический подход к данной проблеме (в скалярной форме) был применён впервые именно в изначальных классических работах Пуанкаре и Минковского по СТО. Неевклидовы геометрии рассматриваются здесь *внешним образом* — с позиции тензорных тригонометрий объемлющих линейных метрических пространств  $\langle P^{n+1} \rangle$  и  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . При этом используются соответствующие линейные тригонометрические преобразования ротационного (синусно-косинусного) и деформационного (тангенсно-секансного) типа в элементарных формах.

Кроме того, такая *внешняя* точка зрения позволяет, в принципе, изучать движения в любых многомерных геометриях с постоянной кривизной (в гиперболических - с отрицательной и в сферических - с положительной) в наиболее общем виде. Такого рода геометрии присущи собственному гиперboloиду в  $\langle P^{n+q} \rangle$  и собственному гиперсфероиду в  $\langle Q^{n+q} \rangle$  при  $q \geq 1$ . Для них ротационные и деформационные тригонометрические преобразования применяются в самых общих формах, изложенных в основной части этой работы. В частности, каждому рефлектор-тензору объемлющего пространства отвечают собственные множества псевдоевклидовых и квазиевклидовых тригонометрических ротаций (рефлексий), а также их общее подмножество ортосферических ротаций (рефлексий).

## Глава 7А. Тригонометрические модели неколлинеарных двух-, многоступенчатых и интегральных движений в СТО и в гиперболической геометрии

Продолжим изучение двух- и многоступенчатых гиперболических ротаций - движений, но уже не обязательно в пределах одной и той же псевдоплоскости. Как и ранее, для анализа многоступенчатых, но теперь *элементарных* ротаций применяется полярное разложение итогового преобразования типа (474), (475). Напомним, что в этом разложении одна и та же сферическая ротационная матрица всегда выражается в базисе своего действия. Согласно (497), она имеет общую структуру, отвечающую рефлектор-тензору псевдоевклидова пространства Минковского по следующей схеме:

$$\begin{array}{c}
 \text{rot } \Theta \qquad \qquad \qquad \text{I}^{\oplus} \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline \{ \text{rot } \Theta \}_{1,2,3} & \Theta \\ \hline \sigma' & 1 \\ \hline \end{array}
 \quad \text{---} \quad
 \begin{array}{|c|c|} \hline I_{1,2,3} & \Theta \\ \hline \sigma' & -1 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

(110A)

В свою очередь, гиперболическая ротационная матрица  $\text{rotH } \Gamma$  в базисе своего действия, как и в любом другом собственном универсальном базисе, имеет каноническую форму (363). Здесь фигурируют тензорные углы:  $\Gamma$  - угол гиперболической ротации;  $\Theta$  - угол ортосферической ротации (ортогональной по отношению к  $\Gamma$ ), согласно их определению в (349). Все они отвечают заданному рефлектор-тензору пространства. Вначале рассмотрим двухступенчатую элементарную гиперболическую ротацию с целью наиболее общего - *матричного* вывода закона суммирования двух движений (скоростей) в скалярной, векторной и тензорной формах. Новый псевдodeкартов базис представляется различными способами с учётом (486) и (491) в виде:



$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{E}}_3 &= \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}^{-1}\}_{\mathbf{F}_1} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \\
 &= \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \\
 &= \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1.
 \end{aligned}
 \tag{111A}$$

Матрицы  $\text{roth } \Gamma_{12}$  и  $\text{roth } \Gamma_{13}$  выражены и действуют в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Матрица  $\text{roth } \Gamma_{21}$  исходно выражена и действует в  $\tilde{\mathbf{E}}_{2h} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$ . Матрица  $\text{rot } \Theta_{13}$  в первом случае выражена и действует в гиперболически смещённом базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_{3h} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$ . Во втором случае она выражена и действует в исходном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ . Как было показано ранее при многоступенчатых движениях в формулах активных преобразований координат базисов или элементов пространства применяется *обратный* порядок следования исходно заданных частных матриц. В свою очередь, при пассивном преобразовании координат элемента имеет место *прямой* порядок. Для его полярного представления имеем:

$$\mathbf{u}^{(3)} = \text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } (-\Gamma_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)} = \text{roth } (-\tilde{\Gamma}_{13}) \cdot \text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \mathbf{u}^{(1)}.$$

*Итоговая гиперболическая ротация* выполняется в двух указанных вариантах — либо из  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  как  $\text{roth } \Gamma_{13}$ , либо из сферически смещённого базиса  $\tilde{\mathbf{E}}_{1u} = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \tilde{\mathbf{E}}_1$  как

$$\text{roth } \tilde{\Gamma}_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13}.
 \tag{112 A}$$

Вектор направляющих косинусов угла  $\tilde{\Gamma}_{13}$  смещён сферически в обратную сторону

$$\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}} = \text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \mathbf{e}_{\sigma}.
 \tag{113A}$$

Согласно формулам полярного представления (474), (475) и с учётом (111 A) имеем:

$$\text{roth } \Gamma_{13} = \sqrt{\mathbf{T}\mathbf{T}'} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2\Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}} = \sqrt{\text{roth } 2\Gamma_{13}}.
 \tag{114A}$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{roth } (-\Gamma_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \text{roth } (-\Gamma_{12}) \cdot \text{roth } (-\Gamma_{23}).
 \tag{115A}$$

В случае  $\check{\mathbb{E}}_1 = \{I\}$  при перемене порядка последовательности движений или скоростей на противоположный новый псевдодекартов базис задают вектор-строки той же матрицы  $\check{\mathbb{E}}_3$ :

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{E}}_3' &= \{\text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12}\} = \{\mathbf{T}'\} = \{\text{roth } \check{\Gamma}_{13} \cdot \text{rot}(-\Theta_{13})\} = \\ &= \{\text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13}\}. \end{aligned} \tag{116A}$$

Матрицы  $\text{roth } \Gamma_{23}$  и  $\text{roth } \check{\Gamma}_{13}$  выражены и действуют в  $\check{\mathbb{E}}_1 = \{I\}$  Матрица  $\text{roth } \Gamma_{12}$  исходно выражена и действует в  $\check{\mathbb{E}}_{21} = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \check{\mathbb{E}}_1$ . Итоговая гиперболическая ратация выполняется в двух вариантах — либо из  $\check{\mathbb{E}}_1$  как  $\text{roth } \check{\Gamma}_{13}$ , либо из сферически смещённого базиса  $\check{\mathbb{E}}_{10'} = \text{rot}(-\Theta_{13}) \cdot \check{\mathbb{E}}_1$  как  $\text{roth } \Gamma_{13}$ . В этом заключается двойственность во взгляде на матрицу  $\text{roth } \check{\Gamma}_{13}$ . Для обратного порядка имеем:

$$\text{roth } \check{\Gamma}_{13} = \sqrt{\check{\mathbf{T}}' \mathbf{T}} = \sqrt{\text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } 2 \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23}} = \sqrt{\text{roth } 2 \check{\Gamma}_{13}}, \tag{117A}$$

$$\text{rot}(-\Theta_{13}) = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth}(-\Gamma_{13}) = \text{roth}(-\Gamma_{23}) \cdot \text{roth}(-\Gamma_{12}) \cdot \text{roth } \Gamma_{13}. \tag{118A}$$

В СТО угол ортосферического сдвига  $\Theta_{13}$  имеет чисто релятивистскую природу. Реально из исходного базиса  $\check{\mathbb{E}}_1$  этот релятивистский эффект воспринимается таким образом, что неточечный объект в результате суммирования двух поступательных, но неколлинеарных скоростей воспринимается наблюдателем  $N_1$  сферически повернутым в плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$ . Этот геометрический эффект дополняет лоренцево сокращение того же объекта (в повернутом виде) в направлении вектора суммарной скорости  $\mathbf{v}_{13}$ . Аналогичный эффект ортосферического сдвига проявляется в гиперболической и в сферической геометриях для неколлинеарного суммарного поступательного движения неточечных объектов или координатного базиса.

Впервые угол ортосферического сдвига в *скалярной* форме был выявлен Зоммерфельдом (1931г.) для сложения двух ортогональных скоростей с трактовкой на сфере мнимого радиуса по формулам гиперболической геометрии. Это имело целью дать наглядную трактовку релятивистского коэффициента «1/2» в прецессии Томаса.

Тензорные углы  $\Gamma_{13}$  и  $\tilde{\Gamma}_{13}$  отличаются только векторами своих направляющих косинусов. Поэтому результат суммирования двух движений в векторной и в тензорной формах не зависит от порядка их последовательности тогда и только тогда, когда направляющие косинусы этих движений либо равны, либо аддитивно противоположны, то есть когда ротационные матрицы тригонометрически согласованы. Заметим, что итоговый результат *в скалярной форме* для двух движений от этого порядка не зависит.

Пусть  $\mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_{\overline{13}}\}$  - вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{12}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{12}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{v}_{12}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ ;  $\mathbf{e}_\beta = \{\cos \beta_{\overline{13}}\}$  - вектор направляющих косинусов для  $\Gamma_{23}$ ,  $\mathbf{sh} \gamma_{23}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_2^{(3)}$ . Определим *условную характеристику*  $\varepsilon$  - угол между  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , как если бы они находились в одном и том же  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , через формальное значение его косинуса:

$$\cos \varepsilon = \begin{vmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha \quad (0 \leq \varepsilon \leq \pi, \quad 0 \leq \sin \varepsilon \leq 1) \quad (119A)$$

$$(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1 = \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3).$$

Если частные косинусы попарно равны, то  $\cos \varepsilon = +1$ . Если они попарно аддитивно противоположны, то  $\cos \varepsilon = -1$ . Соответственно тогда  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно коллинеарны, но либо однонаправленно, либо разнонаправленно. Если же  $\cos \varepsilon = 0$ , то  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  условно сферически ортогональны. В общем случае эти векторы образуют условно угол  $\varepsilon$ .

Далее вычисляем элементы итоговой гиперболической матрицы  $\mathbf{goth} \Gamma_{13}$ , согласно (114A). Из них найдем значения характеристик суммарного движения, в том числе его направляющие косинусы  $\cos \sigma_1$ ,  $\cos \sigma_2$ ,  $\cos \sigma_3$  в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ . В свою очередь, для обратного порядка последовательности движений скалярный гиперболический угол итогового движения (в матрице  $\mathbf{roth} \tilde{\Gamma}_{13}$ ) есть тот же  $\gamma_{13}$ . В тензорной форме он имеет направляющие косинусы  $\cos \tilde{\sigma}_3$ . Из (113A) вытекает, что

$$\cos \theta_{13} = \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix}' \cdot \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma .$$

(120 А)

Связь между двумя вариантами двухступенчатого движения (прямым и обратным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\gamma_{12} \leftrightarrow \gamma_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k .$$

(121А)

Сначала найдём элементы матрицы-произведения в (114А):

$$\mathbf{B} = \{\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } 2\Gamma_{23}\} = \{b_{ij}\}.$$

При этом для дальнейших вычислений требуются только элементы её четвёртой строки. Гиперболические матрицы  $\text{roth } \Gamma$  здесь можно использовать в любой из канонических форм (363) или (364). Далее:

$$b_{41} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_1 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_1 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_1).$$

$$b_{42} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_2 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_2 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_2).$$

$$b_{43} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23}) \cdot \cos \beta_3 + \text{sh } \gamma_{12} \cdot (\cos \alpha_3 - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_3).$$

$$b_{44} = \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon + \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} .$$

Затем вычисляем нижний диагональный элемент (скаляр) матрицы  $\text{roth}^2 \Gamma_{13} = \text{roth } 2\Gamma_{13}$ , перемножая четвёртую строку  $\mathbf{B}$  на четвёртый столбец  $\text{roth } \Gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} s_{44} &= \text{ch } 2\gamma_{13} = 2\text{ch}^2 \gamma_{13} - 1 = \\ &= \text{ch } 2\gamma_{12} \cdot \text{ch } 2\gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } 2\gamma_{12} \cdot \text{sh } 2\gamma_{23} - 2\sin^2 \varepsilon \cdot \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sh}^2 \gamma_{23} = \\ &= 2 \cdot (\text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23})^2 - 1 . \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует известная скалярная косинусная формула гиперболической неевклидовой геометрии Лобачевского - Больяи:

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma_{13} &= \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23} = \\ &= \text{ch } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} - \cos (\pi - \varepsilon) \cdot \text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{sh } \gamma_{23} . \end{aligned}$$

(122 А)

В неевклидовой геометрии  $(n - \varepsilon) = A_{123}$  — *внутренний* угол треугольника между сторонами «12» и «23»; в СТО  $\varepsilon$  - соответствующий *внешний* угол. При реальном физическом

движении материи все  $\gamma > 0$  (на верхней и нижней частях гиперблоида Минковского), что в СТО соответствует  $\Delta t > 0$  (движение в будущее). С учётом этого из (122А) для положительных углов движения (и расстояний по метрике Ламберта) следует правило "параллелограмма", как в евклидовой геометрии:

$$|\gamma_{12} - \gamma_{23}| \leq \gamma_{13} \leq \gamma_{12} + \gamma_{23}. \quad (123A)$$

При этом направляющие косинусы углов движения или их тригонометрических проекций в евклидовых подпространствах изменяются в пределах от - 1 до + 1. Неравенства (123 А) и  $\gamma > 0$  относят расстояние в гиперболической геометрии в категорию норм.

Соответствующая формула для скалярного синуса получается из (122А) тригонометрическим способом в виде суммы двух квадратов:

$$\text{sh}^2 \gamma_{13} = (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23})^2. \quad (124 A)$$

Из (122 А) и (124А) находим формулу для скалярного тангенса в том же виде:

$$\begin{aligned} \text{th}^2 \gamma_{13} = & [(\text{th } \gamma_{12} + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12})]^2 + \\ & + [(\sin \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12}) / (1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12})]^2. \end{aligned} \quad (125A)$$

Последняя приводится к классическому варианту (здесь также в тригонометрической форме):

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} = v_{13}/c = & \sqrt{\text{th}^2 \gamma_{12} + \text{th}^2 \gamma_{23} + 2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12} - \sin^2 \varepsilon \cdot \text{th}^2 \gamma_{23} \cdot \text{th}^2 \gamma_{12} /} \\ & / (1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{th } \gamma_{23}). \end{aligned} \quad (126A)$$

В (122 А) и (126 А) непосредственно видна независимость суммарной скалярной скорости и угла движения от порядка последовательности двух складываемых скоростей или движений. Это тригонометрическая формулировка в скалярной форме классического закона сложения двух координатных скоростей Пуанкаре - Эйнштейна. Но, как следует из ранее изложенного, закон сложения скоростей или движений *в полном виде* должен содержать ещё информацию об ортосферическом сдвиге применительно к неточечным объектам. С другой стороны, из (124А) непосредственно следует родственный закон сложения двух *собственных* скоростей в скалярной синусной форме.

Ещё в одном варианте закон сложения двух скоростей выражается через *релятивистские факторы* (которым здесь отвечают секансы углов движения). Непосредственно из (122А) вытекает секансное соотношение:

$$\operatorname{sch} \gamma_{13} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \gamma_{13}} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} / (1 + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{th} \gamma_{12}). \quad (127A)$$

Кроме того, формулы (122А), (124А), (126А), (127А) позволяют трактовать тригонометрическим образом правило сложения двух гиперболических отрезков или углов гиперболического движения в скалярной форме со стороны различных гиперболических функций. Если  $\cos \varepsilon = \pm 1$ , то из них следует простейшее аддитивное правило (69А). Если  $\cos \varepsilon = 0$ , то для суммы двух условно ортогональных друг другу гиперболических отрезков или движений следуют частные тригонометрические формулы:

$$\operatorname{th}^2 \gamma_{13} = \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} - \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23}, \quad (128A)$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{13} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \quad (\operatorname{sch} \gamma_{13} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23}), \quad (129A)$$

$$\operatorname{sh}^2 \gamma_{13} = \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23}. \quad (130A)$$

Но в трёхмерном евклидовом пространстве взаимно ортогональными могут быть максимально три вектора. Выполнив последовательно два акта суммирования трёх условно ортогональных отрезков или движений, выводим соответствующие трёхступенчатые скалярные тригонометрические формулы. (В данном частном случае суммарный скалярный угол также не зависит от порядка последовательности частных движений.) Для суммы трёх ортогональных отрезков имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{th}^2 \gamma_{12} + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{34} - (\operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{th}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{th}^2 \gamma_{34}, \end{aligned} \quad (131A)$$

$$\operatorname{ch} \gamma_{14} = \operatorname{ch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{ch} \gamma_{34} \quad (\operatorname{sch} \gamma_{14} = \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{34}), \quad (132A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \gamma_{14} = & \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + (\operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34} + \\ & + \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}) + \operatorname{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \operatorname{sh}^2 \gamma_{34}. \end{aligned} \quad (133A)$$

Если здесь хотя бы один из частных углов бесконечен (то есть  $\gamma = \infty$ ,  $\text{th } \gamma = 1$ ,  $v = \pm c$ ), то аналогичное имеет место и для общего угла. Это соответствует скоростному постулату Эйнштейна (15 А). Условно ортогональное суммирование движений (например, в виде проекций в ортогональных криволинейных координатах Гаусса) естественным образом обобщается для  $n$ -мерной геометрии Лобачевского — Больяи, что весьма просто выражается в мультипликативной коммутативной косинусной интерпретации:

$$\text{ch } \gamma_{1t} = \prod_{\substack{i=1, \dots, t-1 \\ j=2, \dots, t}} \text{ch } \gamma_{ij} \quad (\varepsilon_{ij} = \pm \pi/2), \quad 3 \leq t \leq n.$$

Итоговый *скалярный* угол  $\gamma_{1t}$  (и соответственно расстояние  $a_{1t} = R \cdot \gamma_{1t}$ ) не зависит от порядка последовательности частных условно ортогональных движений. Например, протяжённость суммарного условно ортогонального движения по гиперboloиду в  $\langle P^{n+1} \rangle$  или в пространстве Лобачевского — Больяи определяется в виде:

$$a_{1t} = R \cdot \text{Arch} \prod_{\substack{i=1, \dots, t-1 \\ j=2, \dots, t}} \text{ch } a_{ij} / R.$$

Далее с точки зрения тензорной тригонометрии вычисляем направляющие косинусы итоговой двухступенчатой ротации  $\Gamma_{13}$  и соответственно векторов  $\text{th } \gamma_{13}$ ,  $\text{sh } \gamma_{13}$  и  $v_{13}$  в декартовом суббазисе  $\vec{E}_1^{(3)}$ . Воспользуемся тем фактом, что они тождественны для матриц  $\text{roth } \Gamma$  и  $\text{roth } 2\Gamma$ . Вслед за элементом  $s_{44}$  матрицы  $\text{roth}^2 \Gamma_{13} = \text{roth } 2\Gamma_{13}$  в (114А) вычисляем её остающиеся нижние элементы, перемножая четвёртую строку В на  $k$ -й столбец  $\text{roth } \Gamma_{12}$  ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$s_{4k} = s_{k4} = \text{sh } 2\gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \text{ch } \gamma_{13} \cdot \text{sh } \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k = 2 \cdot \text{ch } \gamma_{13} \cdot [(\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cdot \cos \alpha_k + \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k)]. \quad (134A)$$

Отсюда выводятся тригонометрические формулы двухступенчатого движения в векторной трактовке. Например, векторный синус в трёх тождественных вариантах записи имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } \gamma_{13} \cdot \cos \sigma_k &= (\text{sh } \gamma_{12} \text{ ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cos \alpha_k + \\ &+ \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k), \\ \text{sh } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= (\text{sh } \gamma_{12} \cdot \text{ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12}) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= [\text{sh } \gamma_{12} \text{ ch } \gamma_{23} + \cos \varepsilon \cdot \text{sh } \gamma_{23} \cdot (\text{ch } \gamma_{12} - 1)] \mathbf{e}_\alpha + \text{sh } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta, \end{aligned} \right\} \quad (135A)$$

где  $\mathbf{e}_\sigma = \{\cos \sigma_k\}$  — единичный вектор направляющих косинусов суммарного гиперболического движения;

$$\mathbf{e}_\eta = \{(\cos \beta_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \alpha_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\beta - \cos \varepsilon \mathbf{e}_\alpha) / \sin \varepsilon = \overline{\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{e}_\beta / \|\overline{\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha'} \cdot \mathbf{e}_\beta\| \quad (136A)$$

- единичный вектор направляющих косинусов условно ортогонального приращения общего движения по отношению к  $\mathbf{e}_\alpha$ , то есть к вектору первого движения. Имеем соотношение ортогональности:

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0 \quad (\mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\alpha). \quad (137A)$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_\eta$  в дальнейшем широко используется при биортогональных разложениях приращений движения, в том числе дифференциальных или связанных с физическим ускорением (общим, тангенциальным и нормальным). Естественным образом он выводится из биортогонального представления второго вектора в сумме:

$$\mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta.$$

Соответственно вектор  $\mathbf{e}_\eta$  применяется для обратного порядка суммирования движений (см. далее). Из векторных формул (135A) и скалярной формулы (122A) получаем родственные векторные соотношения для тангенсов (координатных скоростей):

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} &= \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = \frac{\text{th } \gamma_{12} + \cos \varepsilon \text{ th } \gamma_{23}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\sin \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\eta = \\ &= \frac{\text{sh } \gamma_{13}}{\text{ch } \gamma_{13}} = \frac{\text{th } \gamma_{12} + \cos \varepsilon \text{ th } \gamma_{23} \cdot (1 - \text{sch } \gamma_{12})}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{\text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \mathbf{e}_\beta. \end{aligned} \quad (138A)$$

Геометрическая интерпретация синусных формул (135A), (124A) сводится к следующему. Второй гиперболический отрезок  $\gamma_{23}$  совместно с его синусной ортопроекцией на  $\langle \mathbf{e}_\alpha \rangle^{3,(2)}$  разлагается на две проекции



- параллельно и перпендикулярно  $\gamma_{12}(\mathbf{sh} \gamma_{12})$ . Эти проекции, в свою очередь, проецируются на  $\langle \mathcal{E}^3, {}^{(1)} \rangle$  параллельно  $\overline{\mathbf{ct}}^{(1)}$ , именно:

$$\begin{aligned} \gamma_{23} = \overline{\gamma}_{23} + \overset{\perp}{\gamma}_{23} &\rightarrow \gamma_{13} = (\gamma_{12} + \overline{\gamma}_{23}) + \overset{\perp}{\gamma}_{23} \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{sh} \gamma_{13} = \mathbf{sh} (\gamma_{12} + \overline{\gamma}_{23}) + \mathbf{sh} \overset{\perp}{\gamma}_{23} \rightarrow (135A) \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{sh}^2 \gamma_{13} = \mathbf{sh}^2 (\gamma_{12} + \overline{\gamma}_{23}) + \mathbf{sh}^2 \overset{\perp}{\gamma}_{23} \rightarrow (124A), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{sh} \overline{\gamma}_{23} = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{sh} \gamma_{23}$ ,  $\mathbf{sh} \overset{\perp}{\gamma}_{23} = \sin \varepsilon \cdot \mathbf{sh} \gamma_{23}$ .

Тангенсные формулы (138A), (125A) получаются в результате того же разложения  $\gamma_{23}$  совместно с его тангенсной проекцией на  $\langle \mathcal{E}^3, {}^{(2)} \rangle$  с

последующим перекрёстным проецированием указанных проекций на  $\langle \mathcal{E}^3, {}^{(1)} \rangle$  параллельно  $\overline{\mathbf{ct}}^{(2)}$  с учётом поправки на изменение знаменателя - косинуса (или релятивистской поправки ко времени). В итоге исходные гиперболические отрезки  $\gamma_{12}$  и  $\gamma_{23}$  отображаются в *однородных координатах*  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$ . Это будет рассмотрено далее на модели Клейна.

Итак, векторы синуса и тангенса итогового двухступенчатого гиперболического движения в  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  разлагаются биортогонально на проекции — параллельные и условно перпендикулярные  $\mathbf{e}_\alpha$ . В связи с этим ортопроекции, согласно (124A) и (125A), подчиняются теореме Пифагора. Это важное свойство векторов общего движения  $\mathbf{sh} \gamma_{13}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{13}$  и  $\mathbf{v}_{13}$  объединяет в определённой степени евклидову и неевклидову гиперболическую и сферическую геометрии. Различие здесь состоит лишь в том, что в евклидовой геометрии (где частные векторы суммируются коммутативно) теореме Пифагора подчиняются ортопроекции векторов синуса и тангенса общего движения как на  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$ , так и на  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_{\overline{\eta}}$ , а в неевклидовой геометрии - только на  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\eta$  (при прямом порядке последовательности частных движений) и наоборот - на  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_{\overline{\eta}}$  (при обратном их порядке). Таким образом, установлена теорема о приведении произвольной суммы двух движений к биортогональной (квадратичной) форме — коммутативной для евклидовой геометрии и некоммутативной для неевклидовой геометрии. Кроме того, в неевклидовой геометрии указанная специальная теорема (для ортопроекции и модулей векторов синуса и тангенса) действует именно в  $\langle \mathcal{E}^3, {}^{(1)} \rangle$ , то есть в универсальном базисе.

Отмеченное геометрическое свойство формально позволило Пуанкаре и Эйнштейну вывести известным способом релятивистский закон суммирования двух неколлинеарных скоростей в векторной и скалярной формах, не нарушая общности выводов, при исходных

$\cos \alpha_1 = 1, \cos \alpha_2 = \cos \alpha_3 = 0 \rightarrow \cos \varepsilon = \cos \beta_1$ . Ортогональные проекции векторов двух скоростей (по оси  $x$ , и по осям  $x_2, x_3$ ) были приняты ими независимыми и просуммированы (что позволяет вышеуказанная теорема). Положим в векторной формуле (138А) значения параметров:

$$\text{th } \gamma_{12} = v/c \approx 10^{-4}, \quad \cos \alpha_1 = \pm 1 \rightarrow \cos \varepsilon = \pm \cos \beta_1;$$

$$\text{th } \gamma_{23} = c/c = 1 \rightarrow \text{th } \gamma_{13} = 1;$$

где  $v = 30$  км/сек - орбитальная скорость движения Земли. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma &= \frac{[\text{th } \gamma_{12} \pm \cos \beta_1 \cdot (1 - \text{sch } \gamma_{12})] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{sch } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\beta}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \text{th } \gamma_{12}} = \\ &= \frac{1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \text{th } \gamma_{12}} \cdot \begin{vmatrix} \pm \text{th } \gamma_{12} + \cos \beta_1 \\ \text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2 \\ \text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \sigma_1 \\ \cos \sigma_2 \\ \cos \sigma_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  и  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - истинные и кажущиеся углы наблюдения

какого-либо светила на небесной сфере. Отсюда следуют общие релятивистские формулы для *абerrации*:

$$\begin{aligned} \text{tg } A_{12} = \frac{\cos \sigma_2}{\cos \sigma_1} &= \frac{\text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_2}{\pm \text{th } \gamma_{12} + \cos \beta_1}, & \left( \begin{array}{l} \cos \alpha = (\mathbf{e}_\sigma^-)' \cdot \mathbf{e}_\sigma^- = \\ = \frac{\text{sch}^2 \gamma_{12} - \sin^2 \beta_1 \cdot \text{th}^2 \gamma_{12}}{1 - \cos^2 \beta_1 \cdot \text{th}^2 \gamma_{12}} \end{array} \right). \\ \text{tg } A_{13} = \frac{\cos \sigma_3}{\cos \sigma_1} &= \frac{\text{sch } \gamma_{12} \cdot \cos \beta_3}{\pm \text{th } \gamma_{12} + \cos \beta_1} \end{aligned}$$

В частности, при  $\beta_3 = \pi/2 \rightarrow \cos \beta_2 = \sin \beta_1$  отсюда следует формула Эйнштейна для абerrации. Данное планетарное явление, согласно СТО, тождественно трактуется с точек зрения крайних мгновенных инерциальных систем, связанных либо с Землёй, либо со светилом, так как результат сложения двух скоростей в них одинаков. Классическая трактовка Эйнштейна сводит суть абerrации к изменению направления вектора суммарной скорости при движении Земли в противоположных направлениях в Солнечной системе. Это отвечает

вышеуказанным общим формулам. Однако в ряде последующих работ аберрация стала трактоваться, на наш взгляд, неверно - исходя из сферического дефекта  $\theta$  в гиперболическом треугольнике скоростей, то есть аналогично прецессии Томаса. В данном случае ортосферический сдвиг  $\theta$  выражает соответствующую *прецессию звездного диска*, которая может только иногда совпадать по величине с аберрацией (то есть имеет иной смысл).

Из формул (135А), (136А) следует, что  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{e}_\eta$  - линейные комбинации  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . Поэтому все 4 вектора условно лежат в одной и той же евклидовой плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$ . Повторяя эти рассуждения для обратного порядка последовательности движений, получаем аналогичные соотношения и выводы, но уже с первым исходным вектором  $\mathbf{e}_\beta$  и со вторым исходным вектором  $\mathbf{e}_\alpha$ . Вектор ортогонального приращения общего движения определяется в форме, аналогичной (136А):

$$\mathbf{e}_{\tilde{\eta}} = \{(\cos \alpha_k - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta_k) / \sin \varepsilon\} = (\mathbf{e}_\alpha - \cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\beta) / \sin \varepsilon, \quad (139A)$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\eta}}' \cdot \mathbf{e}_\beta = \theta \quad (\mathbf{e}_{\tilde{\eta}} \perp \mathbf{e}_\beta). \quad (140A)$$

Новые векторы  $\text{th } \tilde{\gamma}_{13}$ ,  $\text{sh } \tilde{\gamma}_{13}$  и  $\tilde{\mathbf{v}}_{13}$  направлены в декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1^{(3)}$  по  $\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}}$ , но их модули остались прежними.

Векторы  $\mathbf{e}_{\tilde{\sigma}}$  и  $\mathbf{e}_{\tilde{\eta}}$  - также линейные комбинации  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ , и лежат в той же  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ . С другой стороны, ротация (113А) осуществляется в тригонометрической плоскости матрицы  $\text{got } \Theta_{13}$ . Следовательно, последняя тождественна  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ .

Матрицу  $\text{got } \Theta_{13}$  можно вычислить сразу же в канонической форме (497). Нормальная ось сферической ротации  $\mathbf{g}_N$  находится через векторное (синусное) произведение (499) применительно к любой паре из набора характеристических единичных векторов; например, для двухступенчатого движения — через  $\mathbf{e}_\alpha$  и  $\mathbf{e}_\beta$ . При изменении порядка последовательности движений на обратный каждый характеристический единичный вектор заменяется на свой спарринг-вектор. Все шесть характеристических векторов  $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_{\tilde{\sigma}}, \mathbf{e}_\eta$  и  $\mathbf{e}_{\tilde{\eta}}$  расположены в  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  в пределах угла  $\pi$ .

Из (136А) и (139А) следует, что

$$\mathbf{e}_{\tilde{\eta}}' \cdot \mathbf{e}_\eta = -\cos \varepsilon = \cos (\pi - \varepsilon), \quad (141A)$$

$$\mathbf{e}_{\tilde{\eta}}' \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\tilde{\eta}}' \cdot \mathbf{e}_\beta = \sin \varepsilon = \cos (\pi/2 - \varepsilon). \quad (142A)$$

Кроме того, векторы  $\mathbf{e}_{\sigma}$ ,  $\mathbf{e}_{\sigma}$  и  $\mathbf{r}_N$  должны образовывать правую тройку в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$ , чтобы соответствовать принятому направлению отсчёта угла  $\theta$  против часовой стрелки. В свою очередь, значение  $\cos \theta_{13}$  в структуре (497) вычисляется через соотношения (113А), (135А) и реверсивный аналог последнего. В итоге (релятивистский) сферический сдвиг относительно исходного  $\mathbf{E}_1$  в косинусном варианте составляет:

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}_{\sigma}' \cdot \mathbf{e}_{\sigma} = (\mathbf{A} + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{B} + \cos^2 \varepsilon \cdot \mathbf{C} + \cos^3 \varepsilon \cdot \mathbf{D}) / \text{sh}^2 \gamma_{13} > 0, \quad (143 \text{ A})$$

$$\mathbf{A} = \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + \text{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \text{ch} \gamma_{12} > 0,$$

$$\mathbf{B} = \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} + \text{ch} \gamma_{12} + \text{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$\mathbf{C} = \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{23} - 1) + \text{sh}^2 \gamma_{23} \cdot \text{ch} \gamma_{12} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} - 1) > 0,$$

$$\mathbf{D} = \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} \cdot (\text{ch} \gamma_{12} - 1) \cdot (\text{ch} \gamma_{23} - 1) > 0,$$

$$\begin{aligned} \text{sh}^2 \gamma_{13} = & \text{sh}^2 \gamma_{12} + \text{sh}^2 \gamma_{23} + \text{sh}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sh}^2 \gamma_{23} \cdot (1 + \cos^2 \varepsilon) + \\ & + 2 \cdot \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} \cdot \text{ch} \gamma_{23} \cdot \cos \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Для (143А) как функции от  $\cos \varepsilon$  имеют место три экстремума:  $\cos \theta_{13} = +1$  при  $\cos \varepsilon = \pm 1$  (максимумы) и  $\cos \theta_{13} = \mathbf{A} / \text{sh}^2 \gamma_{13}$  при  $\cos \varepsilon = 0$  (минимум).

При  $\cos \varepsilon = +1$  имеем:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} = \text{sh}^2 \gamma_{13} = \text{sh}^2 (\gamma_{12} + \gamma_{23})$ .

При  $\cos \varepsilon = -1$  имеем:  $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C} - \mathbf{D} = \text{sh}^2 \gamma_{13} = \text{sh}^2 (\gamma_{12} - \gamma_{23})$ .

Эти два случая тривиальны и отображают условно коллинеарные движения — однонаправленные и разнонаправленные. Минимум  $\cos \theta_{13}$  и соответственно максимум по абсолютной величине угла сферического сдвига  $\theta_{13}$  достигается при условной ортогональности  $\mathbf{e}_{\alpha}$  и  $\mathbf{e}_{\beta}$ . Тогда для суммы ортогональных движений (скоростей) имеем:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{13} = \mathbf{A} / \text{sh}^2 \gamma_{13} = & (\text{th}^2 \gamma_{12} \cdot \text{sch} \gamma_{23} + \text{th}^2 \gamma_{23} \cdot \text{sch} \gamma_{12}) / (\text{th}^2 \gamma_{12} + \text{th}^2 \gamma_{23} - \\ & - \text{th}^2 \gamma_{12} \cdot \text{th}^2 \gamma_{23}) > 0, \end{aligned}$$

$$\sin \theta_{13} = \mp \text{th} \gamma_{12} \cdot \text{th} \gamma_{23} / (1 + \text{sch} \gamma_{12} \cdot \text{sch} \gamma_{23}) = \mp \text{sh} \gamma_{12} \cdot \text{sh} \gamma_{23} / (1 + \text{ch} \gamma_{12} \cdot \text{ch} \gamma_{23}).$$

Эта частная синусная скалярная формула, установленная впервые Зоммерфельдом, как видно даёт релятивистский коэффициент «1/2» для прецессии Томаса. В свою очередь, в векторной форме имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma &= \text{th } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \text{th } \gamma_{23} \cdot \text{sch } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\beta, \\ \text{th } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\beta &= \text{th } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\beta + \text{th } \gamma_{12} \cdot \text{sch } \gamma_{23} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \end{aligned} \right\}$$

Если одна из скоростей равна скорости света, например  $\text{th } \gamma_{23} = \pm 1$ , то  $\cos \theta_{13} = \text{sch } \gamma_{12}$ ,  $\sin \theta_{13} = \mp \text{th } \gamma_{12}$  и  $\text{th } \gamma_{13} = 1$ . Теоретически максимальный релятивистский сферический сдвиг ( $\theta_{13} = \pm \pi/2$ ) имеет место при суммировании условно ортогональных световых скоростей. В гиперболической геометрии вращение  $\theta$  в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$  осуществляется против направления суммирования отрезков.

Применив для альтернативного вывода сферического сдвига специальную теорему о приведении суммы двух движений к биортогональной форме, получаем также общие формулы для  $\cos \theta_{13}$  и  $\sin \theta_{13}$ , подставив значения:  $\cos \epsilon = \pm i$ ,  $\gamma_{12} \rightarrow (\gamma_{12} + \sqrt{\gamma_{12}^2 - 1})$ ,  $\gamma_{23} \rightarrow \frac{1}{\gamma_{23}}$ .

Согласно ротационной формуле (113А), положительные значения угла  $\theta_{13}$  отсчитываются в тригонометрической плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  в направлении от  $\mathbf{e}_\beta$  к  $\mathbf{e}_\sigma$ . При этом, как указывалось ранее,  $\mathbf{e}_\beta$ ,  $\mathbf{e}_\sigma$  и  $\mathbf{r}_N$  составляют правую тройку, что однозначно определяет направление ортосферической ротации  $\text{rot } \Theta$  в структуре (497).

Особый случай отвечает ортогональной (и *теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения или их первых дифференциалов. Например, из синусных формул имеем:

$$\lim_{\substack{\gamma_{12} \rightarrow 0 \\ \gamma_{23} \rightarrow 0}} \gamma_{13} = \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2}; \quad \theta_{13} = -(\gamma_{12} \cdot \gamma_{23} / 2) \rightarrow 0.$$

Это, во-первых, выражает инфинитиземальную теорему Пифагора для прямоугольного треугольника на единичном гиперboloиде Минковского (двумерный вариант) и его площадь с точностью до знака. Во-вторых, отсюда же следует инфинитиземальная тождественность угла ортосферической ротации  $\theta_{13}$  и сферической угловой девиации Ламберта-Гаусса-Бонне для данного гиперболического треугольника. Это по сути есть *дефект*, или девиация со знаком «-». (Для сферического треугольника на единичном гиперсфереоиде в аналогичной формуле для углового эксцесса применялся бы знак «+».) *Интегральный угол ортосферической ротации также*

*тождествен дефекту гиперболического (геодезического) треугольника на гиперблоидах I и II.* (Утверждение устанавливается через интеграл по поверхности.) Это иллюстрирует хорошо известный факт неевклидовой геометрии, что угловая сферическая девиация любой геометрической фигуры, образуемой геодезическими отрезками на двумерной поверхности постоянной (в данном случае единичной) гауссовой кривизны с точностью до знака равна произведению площади на кривизну.

Инфинитиземальная теорема Пифагора может применяться для бесконечно малых гиперболических отрезков (углов) с их количеством  $k \leq n$ . Повторив, согласно (128 А)-(130 А), ортогональное суммирование для  $k$  бесконечно малых независимых частных углов, получаем:

$$\lim_{\gamma_{(j)} \rightarrow 0} \gamma = \sqrt{\sum_{j=1}^k \gamma_{(j)}^2}.$$

Как и при  $k = 2$ , имеет место коммутативность частных углов движения в векторной и скалярной формах суммирования. Это иллюстрирует хорошо известный факт, что неевклидова геометрия инфинити-земально евклидова. В частности, элемент площади  $ds = d\gamma_{(1)} d\gamma_{(2)} \cdot R^2$ ; элемент  $k$ -мерного объёма  $dv = d\gamma_{(1)} \dots d\gamma_{(k)} \cdot R^k$ . В свою очередь, первый дифференциал общего угла движения, согласно инфинитиземальной теореме Пифагора на гиперблоидах, выражается в двух вариантах:

$$(d\gamma)^2 = \sum_{j=1}^n [d\gamma_{(j)}]^2, \tag{144 А}$$

где  $d\gamma_{(j)}$  - ортопроекция  $d\gamma$  на  $j$ -ю ось ортогональных криволинейных координат Гаусса;

$$\left. \begin{aligned} d\gamma &= \overline{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overset{\perp}{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\eta = d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta \\ (d\gamma)^2 &= (\overline{d\gamma})^2 + (\overset{\perp}{d\gamma})^2, \end{aligned} \right\} \tag{145А}$$

где  $\overline{d\gamma}$  и  $\overset{\perp}{d\gamma}$  — ортопроекции  $d\gamma$  в характеристическом мгновенном декартовом суббазисе  $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{от}}^{(2)} \equiv \{\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\eta\}$ , задаваемом в точке  $M$  гиперблоида на касательной  $\langle \mathbf{e}^2 \rangle$ . С другой стороны, соотношения типа (129А), (132А) выражают неевклидов аналог

теоремы Пифагора в интегральной форме. Имеется изоморфизм между любыми родственными геометрическими объектами, в том числе особыми (прямые, окружности, предельные окружности и т. д.), в пространстве Лобачевского - Большиа и на псевдосфере Бельтрами, с одной стороны, и на гиперboloидах II и I Минковского, с другой стороны (как и на их моделях Клейна и Пуанкаре). Как показано выше, в неевклидовой гиперболической геометрии угол  $\theta$  есть также дефект геодезического треугольника или более сложной — составной двумерной геометрической фигуры. Он связан с тем, что на искривлённой поверхности параллельный перенос вектора зависит от пути.

В частности, для случая уже рассмотренной выше *аберрации*, для которой  $\mathbf{th} \gamma_{13} = \mathbf{e}_\sigma$ , вычислим дополнительно косинус угла орто-сферического сдвига по формуле (143 А):

$$\cos \theta_{13} = \mathbf{e}'_\sigma \cdot \mathbf{e}_\sigma = 1 - \frac{(1 - \operatorname{sch} \gamma_{12}) \cdot \sin^2 \beta_1}{1 \pm \cos \beta_1 \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}}.$$

Здесь  $\theta_{13}$  - угол ортосферической ротации и он же есть дефект гиперболического треугольника, образуемого на гиперboloиде I Минковского (радиуса  $R = c$ ) геодезическими отрезками, отвечающими их проекциям-скоростям  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{c}$  и релятивистской сумме последних. (Этот угол, как отмечалось выше, относится исключительно к прецессии звёздного диска.) В самом же треугольнике скоростей на проективной евклидовой гиперплоскости угловой дефект искажается, как и углы между скоростями, кроме централизованных. (Такого рода искажения рассмотрены далее на тангенсной проективной модели Клейна.)

Релятивистские формулы эффекта Допплера для частоты света имеют простые гиперболические аналоги. Их можно получить геометрически, используя тангенс-тангенсную аналогию:

$$v \cdot ct = v^{(1)} \cdot \Delta ct^{(1)} = v^{(1)} \cdot \{ct^{(1)} [1 - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \phi_R(\gamma)]\} \equiv v^{(1)} \cdot ct \cdot \operatorname{ch} \gamma (1 - \cos \alpha \cdot \mathbf{th} \gamma),$$

$$v^{(1)}/v = \operatorname{sch} \gamma / (1 - \cos \alpha \cdot \mathbf{th} \gamma) = 1 / (\operatorname{ch} \gamma - \cos \alpha \cdot \mathbf{sh} \gamma),$$

где  $v$  и  $v^{(1)}$  - частота света движущегося источника и его же частота, воспринимаемая наблюдателем  $N_1$ , в исходном универсальном базисе;  $ct$  и  $ct^{(1)}$  - одновременные интервалы времени с точки зрения  $N_1$ ;  $\Delta ct^{(1)}$  - продолжительность в  $\tilde{E}_1$  заданного интервала излучения  $ct$ ;  $\alpha$ -угол между направлением движения источника и лучом света.

Отметим частные случаи.

А) *Продольный встречный эффект*,  $\alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = +1$  (источник приближается):  $v^{(1)}/v = 1/(\text{ch } \gamma - \text{sh } \gamma) = \exp \gamma > 1$ . То есть здесь наблюдается "синее смещение" частоты света.

В) *Продольный обратный эффект*,  $\alpha = \pi$ ,  $\cos \alpha = -1$  (источник удаляется):  $v^{(1)}/v = 1/(\text{ch } \gamma + \text{sh } \gamma) = \exp(-\gamma) < 1$ . То есть здесь наблюдается "красное смещение" частоты света.

С) *Поперечный эффект*,  $\alpha = \pm \pi/2$ ,  $\cos \alpha = 0$ :  $v^{(1)}/v = \text{sch } \gamma$ . То есть здесь наблюдается меньшее "красное смещение" частоты света, вследствие обычного эйнштейнова замедления времени в относительно движущемся источнике света.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичных гиперboloидов Минковского ( $R = 1$ ).

\* \* \*

Гиперboloид II

$$\mathbf{i} = \frac{\text{sh } \gamma}{\text{ch } \gamma} = \frac{\text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_a}{\text{ch } \gamma} \quad (\text{при } \Delta \text{ct} > 0: \gamma > 0)$$

(146A)

-  $4 \times 1$  псевдоединичный радиус-вектор точки гиперboloида II. Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} = \text{sh}' \gamma \cdot \text{sh } \gamma - \text{ch}^2 \gamma = \text{sh}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{e}_a - \text{ch}^2 \gamma = -1 = \mathbf{i}^2.$$

(147A)

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $\mathbf{i}$  либо на  $\text{ch } \gamma$ , либо на  $\text{sh } \gamma$ . Далее,

$$\text{sch } \gamma = \text{sch } \gamma \cdot \mathbf{i} = \frac{\text{th } \gamma}{1} = \frac{\text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_a}{1} - 4 \times 1 \quad \text{радиус-вектор секанса,}$$

конец которого лежит на тангенсно-котангенсной евклидовой гиперплоскости (нулевому значению секанса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\text{sch}' \gamma \cdot \mathbf{i}' \cdot \text{sch } \gamma = \text{th}' \gamma \cdot \text{th } \gamma - 1 = \text{th}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{e}_a - 1 = (\mathbf{i} \cdot \text{sch } \gamma)^2;$$

$$\text{cosch } \gamma = \text{cosch } \gamma \cdot \mathbf{i} = \frac{\mathbf{e}_a}{\text{cth } \gamma} - 4 \times 1 \quad \text{радиус-вектор косеканса, конец}$$

которого лежит на тангенсно-котангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности (нулевому значению косеканса отвечает принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\text{cosch}' \gamma \cdot \mathbf{i}' \cdot \text{cosch } \gamma = \mathbf{e}_a' \cdot \mathbf{e}_a - \text{cth}^2 \gamma = (\mathbf{i} \cdot \text{cosch } \gamma)^2.$$

(Все эти векторы времениподобны.)



Гиперболическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  единичного гиперboloида  $\Pi$  в активной форме в  $\tilde{E}_1$  представляется в виде:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \mathbf{i}_3 \\ \text{sh } \gamma_{13} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ \text{ch } \gamma_{13} \end{matrix} &= \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \begin{matrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \begin{matrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix} = & (148A) \\ &= \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \begin{matrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix} = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \begin{matrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{matrix} = \\ &= \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot (\text{roth } \Gamma_{23})_{E_2} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}_{E_1} \cdot \begin{matrix} \mathbf{i}_2 \\ \text{sh } \gamma_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{ch } \gamma_{12} \end{matrix}. \end{aligned}$$

Траектория гиперболического (геодезического) движения  $\mathbf{i}_2 \rightarrow \mathbf{i}_3$  принадлежит сечению гиперboloида  $\Pi$  псевдоплоскостью ротации матрицы  $\{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{i} \rightarrow (\mathbf{i} + d\mathbf{i})$  путём изменения в матрице  $\text{roth } \Gamma_{23}$  значения скалярного угла от 0 до  $\gamma_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . В модели Клейна внутри абсолюта, или тангенсной модели (рис. 4) эта траектория отображается прямолинейным отрезком  $\text{th } \gamma_{23}$ . На гиперboloиде  $\Pi$  нетрудно реализовать гиперболический треугольник (и далее другие многоугольники) через полярное представление:

$$\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{roth } \Gamma_{13} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3,$$

$$\text{roth } \Gamma_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3.$$

Централизованный треугольник  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный треугольник путём активного преобразования координат в том же  $\tilde{E}_1$ .

Гиперboloид I

$$\mathbf{e} = \begin{matrix} \text{ch } \gamma \\ \text{sh } \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} \text{ch } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \text{sh } \gamma \end{matrix} \quad (\text{при } \Delta ct > 0: \gamma > 0) \tag{149 A}$$

-  $4 \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперboloида I. Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{1}^{\oplus} \cdot \mathbf{e} = \text{ch}' \gamma \cdot \text{ch } \gamma - \text{sh}^2 \gamma = \text{ch}^2 \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha' \cdot \mathbf{e}_\alpha - \text{sh}^2 \gamma = +1 = 1^2. \tag{150A}$$

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $e$  либо на  $\text{ch } \gamma$ , либо на  $\text{sh } \gamma$ . Далее,

$$\text{sch } \gamma = \text{sch } \gamma \cdot e = \frac{e_a}{\text{th } \gamma} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор секанса, конец}$$

которого лежит на тангенсно-катангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности (нулевому значению секанса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\text{sch}' \gamma \cdot I^{\oplus} \cdot \text{sch } \gamma = e_a' e_a - \text{th}^2 \gamma = (\text{sch } \gamma)^2;$$

$$\text{cosch } \gamma = \text{cosch } \gamma \cdot e = \frac{\text{cth } \gamma}{1} = \frac{\text{cth } \gamma \cdot e_a}{1} - 4 \times 1 \text{ радиус-вектор}$$

косеканса, конец которого лежит на тангенсно-котангенсной евклидовой гиперплоскости (нулевому значению косеканса соответствует принадлежность вектора изотропному конусу),

$$\text{cosch}' \gamma \cdot I^{\oplus} \cdot \text{cosch } \gamma = \text{cth}^2 \gamma \cdot e_a' e_a - 1 = (\text{cosch } \gamma)^2.$$

(Все эти векторы пространствуподобны.)

Допустимое гиперболическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $e_2 \rightarrow e_3$  единичного гиперблоида  $I$  в активной форме в  $\tilde{E}_1$  представляется в виде:

$$\frac{e_3}{\text{sh } \gamma_{13}} = \{ \text{roth } \Gamma_{12} \cdot (\text{roth } \Gamma_{2 \rightarrow 3}) e_2 \cdot \text{roth}^{-1} \Gamma_{12} \} \tilde{E}_1 \cdot \frac{e_2}{\text{sh } \gamma_{12}}.$$

(151A)

В силу топологии модели Клейна вне абсолюта, гомеоморфной гиперблоиду  $I$  и псевдосфере Бельтрами (рис. 4), понятно, что между произвольными элементами  $e_2$  и  $e_3$  не всегда может быть реализовано чисто гиперболическое движение. (В этом же особенность геометрии в большом для гиперблоида  $I$ .) Движение  $\text{roth } \Gamma_{2 \rightarrow 3}$  реализуется тогда и только тогда, когда котангенсные проекции элементов  $e_2$  и  $e_3$  в модели Клейна вне абсолюта можно соединить прямолинейным отрезком  $\text{cth } \gamma_{23}$ , не пересекая и не касаясь овалного абсолюта *внутри отрезка*, и при этом наоборот, пересекая овалный абсолют *вне отрезка*, то есть его прямолинейным продолжением.

В простейшем случае  $e_a = e_a \rightarrow \gamma_{12} = \gamma_{13}$ , согласно реверсивному аналогу (135A); при этом имеем:

$$\cos \varepsilon = - \text{sh } \gamma_{23} \cdot \text{ch } \gamma_{12} / (\text{ch } \gamma_{23} - 1) \cdot \text{sh } \gamma_{12}.$$

Исходя из преобразования  $e_3 = T \cdot e_2$  в общей комбинированной форме с учётом промежуточного приведения элементов к виду (149А), то есть к  $e_{2(1)}$  и  $e_{3(1)}$ , в базисе  $\tilde{E}_2$  имеем:

$$T_{2 \rightarrow 3} = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{rot } (-\Phi_{13}) \cdot \text{rot } \Phi_{\alpha \rightarrow \sigma} = \text{roth } \Gamma_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{\alpha \rightarrow \sigma}. \quad (152 \text{ A})$$

В частности, в указанном выше случае  $T = T' = \text{roth } \Gamma_{2 \rightarrow 3} = \text{roth } \Gamma_{23}$ .

Тогда заключаем, что матрица гиперболического движения  $e_2 \rightarrow e_3$ , по гиперболоиду I та же, что и для гиперболоида II при движении  $i_2 \rightarrow i_3$ .

\* \* \*

Используя аналогичным образом матричный подход ротационной тензорной тригонометрии, но уже в самом общем случае, определим далее основные итоговые характеристики (скалярные, векторные, тензорные) для многоступенчатого (суммарного) гиперболического движения. При этом установим также в самой общей форме закон суммирования частных движений в гиперболической геометрии и, что тождественно, - общий закон сложения скоростей в СТО. В этом случае матрица движения T, или она же — матрица непрерывного однородного преобразования Лоренца имеет общую тригонометрическую каноническую форму, выражаемую в  $\tilde{E}_1$  в виде:

$$\Gamma \approx \text{roth } \Gamma \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{roth } \tilde{\Gamma} = \quad (153A), (154A)$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \mathbf{e}_{\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{\sigma} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \mathbf{o} \\ \hline \mathbf{o}' & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ch } \gamma \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \mathbf{e}_{\sigma} \overrightarrow{\mathbf{e}}'_{\sigma} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|} \hline (\text{ch } \gamma - 1) \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma} + \text{rot } \Theta_{3 \times 3} & \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_{\sigma} \\ \hline (\mathbf{e}_{\sigma} \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} = \cos \varepsilon \cdot \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\sigma} \mathbf{e}'_{\sigma}) & \\ \hline \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}'_{\sigma} & \text{ch } \gamma \\ \hline \end{array}.$$

Матрица  $\text{roth } \Gamma$  вычисляется по формуле (114A). Матрица  $\text{rot } \Theta$  в целом выражается канонической формой (497). Здесь она вычисляется либо по формуле (115A), либо через представление (497) с использованием при этом значений  $\Gamma, \tilde{\Gamma}$  и формул (120A), (499). Далее имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ch } 2\gamma = s_{44}; \quad \text{ch } \gamma = + \sqrt{(s_{44} + 1)/2}, \quad \text{sh } \gamma = + \sqrt{(s_{44} - 1)/2}, \\ \text{th } \gamma = v/c = + \sqrt{(s_{44} - 1)/(s_{44} + 1)} = \text{sh } \gamma / \text{ch } \gamma; \\ \cos \sigma_k = s_{4k} / \sqrt{s_{44}^2 - 1}, \quad \text{th } \gamma_k = v_k/c = \cos \sigma_k \cdot \text{th } \gamma = s_{4k} / (s_{44} + 1); \\ \cos \theta = 0,5 \text{ tr rot } \Theta - 1 = (\text{tr rot } \Theta_{3 \times 3} - 1)/2 = \mathbf{e}_{\sigma}' \cdot \mathbf{e}_{\sigma}. \end{array} \right\} \quad (155A)$$

Вместе с полярным представлением (153 A) формулы (154A), (155A) дают в генеральной форме закон суммирования многоступенчатых движений в геометрии Лобачевского - Больяи и соответственно физических скоростей в СТО. Скалярные параметры движения не изменяются при зеркальной перестановке частных движений. Но зеркальная перестановка вызывает транспонирование общей матрицы тензора движения  $\Gamma$  при исходном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \{1\}$ .

Тензорная тригонометрия в рассматриваемом здесь варианте применима к решению разнообразных задач гиперболической геометрии и кинематики СТО. Она представляет особый интерес для геометрических объектов, задаваемых внешним образом в

псевдоевклидовом пространстве Минковского. Например, длины и расстояния вычисляются через  $\gamma$  и  $d\gamma$ ; площади фигур - через  $\theta$  и  $d\theta$ ; объёмы тел - через площади и ортогональные им высоты.

\* \* \*

Вернёмся к закону суммирования движений в скалярной и векторной тангенсных формах (125А) и (138А). С точки зрения модели Клейна внутри абсолюта (рис. 4) в универсальном базисе  $\tilde{E}_1$  суммирование тангенсных проекций начинается из центра проектирования  $O$  - общего центра всех псевдоевклидовых базисов  $\tilde{E}$ . Первая тангенсная проекция угла  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  евклидово не искажается. Как вектор она исходит из точки  $O$  (рис. 4А). Последующие тангенсные проекции  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ ,  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  и т. д. прилагаются в конце предыдущего вектора и в общем случае евклидово искажаются по длине. Далее суббазис  $\tilde{E}_1^{(3)}$  играет роль *однородных координат*. Согласно ортогональному тангенсному представлению (125А) и (138А). перпендикулярная проекция искажённого вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  вычисляется в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  следующим образом:

$$\mathbf{th} \bar{\gamma}_{23} = \frac{\sin \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \quad (156A)$$

Соответствующая ей параллельная проекция искажённого вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  вычисляется как разность искажённой параллельной проекции в (138 А) и её неискажённой части  $\mathbf{th} \gamma_{12}$ :

$$\mathbf{th} \bar{\gamma}_{23} = \frac{\cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12}}{1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12}} \quad (157 A)$$

В векторной сумме, составляющей  $\mathbf{th} \gamma_{13}$  [рис. 4А (2)], искажается только второй вектор  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ . Заметим, что для катетов (156А), (157А) и гипотенузы  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в прямоугольном треугольнике «22'3» теорема Пифагора не выполняется, так как ни один из катетов не исходит из начала универсального базиса  $\tilde{E}_1$ , а формально — в силу их искажения. В (156А), (157А) фигурируют три коэффициента искажения:

$k_1 = (1 + \cos \varepsilon \cdot \mathbf{th} \gamma_{23} \cdot \mathbf{th} \gamma_{12})$  - коэффициент, вызванный гиперболическим суммированием отрезков  $\gamma_{12}$  и  $\bar{\gamma}_{23}$ ;

$k_2 = \text{sch } \gamma_{12}$  - коэффициент, вызванный поправкой на изменение знаменателя-косинуса в (138А), или релятивистской поправкой на изменение координатного времени в точке  $O'$ , где осуществляется суммирование, при его преобразовании  $t^{(2)} \rightarrow t^{(1)}$ ;

$k_3 = \text{sch } \gamma_{12}$  — коэффициент, вызванный перекрёстным характером проецирования в модели Клейна вектора  $\mathbf{th } \gamma_{23} \in \mathcal{E}^{3,(2)}$  на  $\mathcal{E}^{3,(1)}$  параллельно  $\vec{ct}^{(2)}$ , или тождественным ему лоренцевым сокращением.

В отличие от предыдущих последний коэффициент  $k_3$  воздействует только на параллельную проекцию вектора  $\mathbf{th } \gamma_{23}$ . Заметим, что  $\mathcal{E}^{3,(2)}$  есть собственное евклидово подпространство в базе  $\vec{E}_2 = \text{roth } \Gamma_{12} \cdot \vec{E}_1$ , где матрица  $\text{roth } \Gamma_{12}$  полностью определяется значениями  $\gamma_{12}$  и его  $e_a$ .

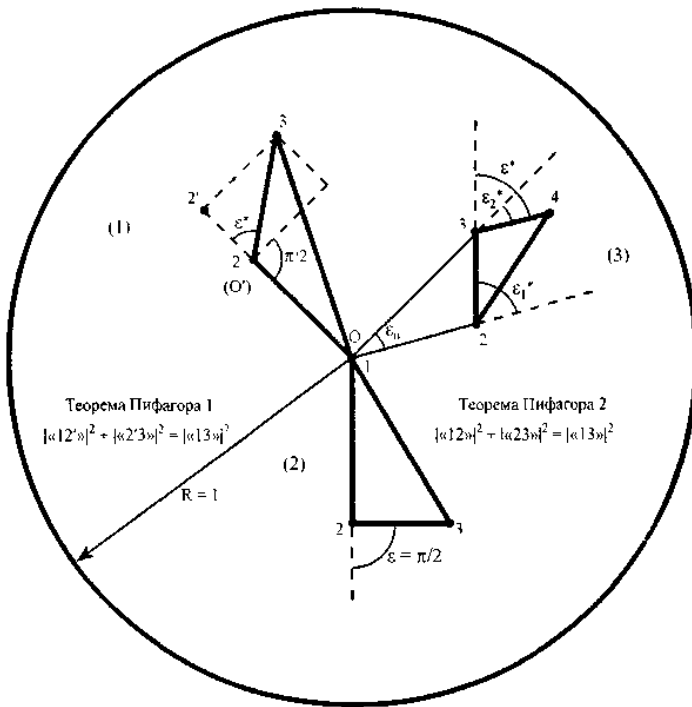


Рис. 4А. Суммирование двух тангенсных проекций гиперболических отрезков — движений в плоской модели

Клейна по теореме о приведении их суммы к биортогональной форме:

Вариант 1. *Централизованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  треугольник.*

$$\begin{aligned} \langle 12 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{12}, \quad \langle 22' \rangle - \mathbf{th} \bar{\gamma}_{23}, \\ \langle 23 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{23}, \\ \langle 13 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{13}, \quad \langle 2'3 \rangle - \mathbf{th} \frac{1}{\gamma_{23}}, \quad \varepsilon^* = \pi - A^*_{123}. \end{aligned}$$

Вариант 2. *Централизованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  прямоугольный треугольник.*

$$\langle 12 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{12}, \quad \langle 23 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{23}, \quad \langle 13 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{13}; \quad \varepsilon = \pi/2 = A_{123}.$$

Вариант 3. *Децентрализованный в  $\tilde{E}_1^{(3)}$  треугольник, компланарный с центром O.*

$$\begin{aligned} \langle 23 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{23}, \quad \varepsilon_1^* = \pi - A^*_{123}, \\ \langle 34 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{34}, \quad \varepsilon_2^* = \pi - A^*_{132}, \\ \langle 24 \rangle - \mathbf{th} \gamma_{24}, \quad \varepsilon_0 = A_{213}, \quad \varepsilon^* = \pi - A^*_{234} = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* - \varepsilon_0. \end{aligned}$$

В процессе перекрёстного проецирования начало искажаемого вектора в однородных координатах переносится в точку  $O'$  - конец вектора  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  (рис. 4А). Искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в модели Клейна вычисляется через искажённые проекции  $\mathbf{th} \gamma_{23}$ , согласно формуле евклидовой скалярной тригонометрии:

$$\cos \varepsilon^* = \mathbf{th} \bar{\gamma}_{23} / \sqrt{\mathbf{th}^2 \bar{\gamma}_{23} + \mathbf{th}^2 \frac{1}{\gamma_{23}}} = \cos \varepsilon \cdot \text{sch} \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon \cdot \text{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon} < \cos \varepsilon \quad (158A)$$

(если  $\varepsilon = \pi/2$ , то он не искажается:  $\cos \varepsilon^* = \cos \varepsilon = 0$ ).

В формуле фигурируют коэффициент искажения  $k_2$  и коэффициент лоренцева сокращения (54А), то есть  $k_3$ , но для модуля вектора  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  в целом. Заметим, что в СТО  $\varepsilon^*$  есть реально искажаемый в  $\mathcal{E}^3_{(T)}$  сферический угол между векторами скоростей  $\mathbf{v}_{12}$  и  $\mathbf{v}_{23}$  (гл. 4А).

В более общем случае (рис. 4А) искажённый угол  $\varepsilon^*$  между векторами  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в плоской модели Клейна вычисляется через искажённые частные углы  $\varepsilon_1^*$  и  $\varepsilon_2^*$ , а также неискажённый центральный угол  $\varepsilon_0$  (между  $\mathbf{th} \gamma_{12}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{13}$ ) с использованием соотношений:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* - \varepsilon_2^* - \varepsilon_0, \tag{159 A}$$

$$\cos \varepsilon_1^* = \cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\sin \varepsilon_1^* = \sin \varepsilon_1 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1},$$

$$\cos \varepsilon_2^* = \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\sin \varepsilon_2^* = \sin \varepsilon_2 / \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2},$$

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon^* = & [\cos \varepsilon_0 \cdot (\cos \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12} \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} - \sin \varepsilon_1 \cdot \sin \varepsilon_2) + \\ & + \sin \varepsilon_0 \cdot (\sin \varepsilon_1 \cdot \cos \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{13} + \sin \varepsilon_2 \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch} \gamma_{12})] / \\ & / (\sqrt{\cos^2 \varepsilon_1 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{12} + \sin^2 \varepsilon_1} \cdot \sqrt{\cos^2 \varepsilon_2 \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma_{13} + \sin^2 \varepsilon_2}) \end{aligned} \tag{160A}$$

(если  $\cos \varepsilon_1 = \cos \varepsilon_2 = 0$ , то  $\cos \varepsilon = \pm \cos \varepsilon_0$  в зависимости от знаков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ ).

В самом же общем случае для пары векторов  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в *пространственной* модели Клейна искажение угла между векторами тангенсов можно вычислить исходя из биортогонального разложения второго вектора  $\mathbf{th} \gamma_{34}$  в собственном  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(3)}$  на проекции-параллельно и перпендикулярно характеристической плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \equiv (\mathbf{th} \gamma_{12}, \mathbf{th} \gamma_{23}) \equiv$

$\equiv \langle \mathbf{e}_{\alpha(12)}, \mathbf{e}_{\alpha(23)} \rangle$ . Для этого предварительно обобщим формулу (136 А), применив ортогональные собственные проекторы, которые проектируют в данном случае в трёхмерном евклидовом пространстве (или проективной гиперплоскости) ортогонально  $\langle \ker A' \rangle$ :

$$\mathbf{e}_\eta = \overrightarrow{AA'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha(34)} / \|\overrightarrow{AA'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha(34)}\|, \text{ где } A = \{ \mathbf{e}_{\alpha(12)}, \mathbf{e}_{\alpha(23)} \} \text{ есть } 2 \times n\text{-матрица.}$$

(В трёхмерном пространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle \subset \langle P^{3-1} \rangle$  этот же вектор можно вычислить через внешнее произведение  $\mathbf{e}_{\alpha(12)}$  и  $\mathbf{e}_{\alpha(23)}$ .) В данном случае  $\mathbf{e}_\eta$  - вектор направляющих косинусов условно ортогонального приращения общего движения по отношению к  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ :

$$\mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_{\alpha(12)} = \mathbf{e}_\eta' \cdot \mathbf{e}_{\alpha(23)} = 0$$

В пространстве  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(3)}$  вектор  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  разлагается биортогонально на проекции:

$$\overleftarrow{\mathbf{th}} \gamma_{34} = \overleftarrow{AA'} \cdot \mathbf{th} \gamma_{34} \text{ и } \overrightarrow{\mathbf{th}} \gamma_{34} = \overrightarrow{AA'} \cdot \mathbf{th} \gamma_{34}$$



с направляющими векторами  $\overline{\mathbf{e}}_{\alpha(34)}$  и  $\frac{1}{\perp} \mathbf{e}_{\alpha(34)}$ . В  $\langle \mathcal{E}^n \rangle^{(3)}$  эти проекции не искажаются и подчиняются теореме Пифагора.

Угол  $\varepsilon^*$  между  $\overline{\mathbf{th}} \gamma_{34}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  выражается по формуле (159 А) и искажается, согласно (160 А). Угол между  $\frac{1}{\perp} \mathbf{th} \gamma_{34}$  и  $\mathbf{th} \gamma_{23}$  остаётся прямым, то есть не искажается, так как он в целом ортогонален  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , или *централизованно прямой*, как в варианте 2 на рис. 4А.

\* \* \*

Кинематика *поступательного* движения материального тела в целом определяется по кинематике материальной точки - центра его инерции. Принципиальное отличие релятивистской кинематики материальной точки от нерелятивистской видно из нижеследующего сопоставления.

В пространстве-времени Лагранжа:

$$d\mathbf{x} = d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha,$$

$$d^2\mathbf{x} = d^2\chi \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2\chi \cdot (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \overline{d^2\chi} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{\perp} d^2\chi \cdot \mathbf{e}_\eta \equiv$$

$$\equiv d(d\chi \cdot \mathbf{e}_\alpha) = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \mathbf{e}_\alpha]_{d\chi} = [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi \left\{ \|\partial \mathbf{e}_\alpha\| \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\|\partial \mathbf{e}_\alpha\|} \right\}_{d\chi} =$$

$$= [\partial d\chi]_\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha + d\chi [\partial \alpha]_{d\chi} \cdot \mathbf{e}_\eta \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} [\partial d\chi]_\alpha = \cos \varepsilon d^2\chi = \overline{d^2\chi}, \\ d\chi [\partial \alpha]_{d\chi} = \sin \varepsilon d^2\chi = \frac{1}{\perp} d^2\chi; \end{cases}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = v_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{g}(t) dt;$$

$$\mathbf{g}(t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{e}_\beta(t) = \frac{d^2\chi}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \frac{1}{\perp} \frac{d^2\chi}{dt^2} \cdot \mathbf{e}_\eta(t) = \overline{\mathbf{g}}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \frac{1}{\perp} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{e}_\eta(t),$$

$$\overline{\mathbf{g}}(t) = \cos \varepsilon(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \left[ \frac{\partial d\chi}{dt^2} \right]_\alpha,$$

$$\frac{1}{\perp} \mathbf{g}(t) = \sin \varepsilon(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \frac{d\chi}{dt} \cdot \left[ \frac{d\alpha}{dt} \right]_{d\chi} = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{w}(t) \text{ и т. д.}$$

При указанном биортогональном разложении вектор  $\mathbf{e}_\eta$  как и ранее, вычисляется, согласно (136А). Вращение  $w(t)$  не изменяет поступательный характер движения материального тела в целом.  
В пространстве-времени Минковского:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)} &= d\chi^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ d^2\mathbf{x}^{(m)} &= d^2\chi^{(m)} \cdot \mathbf{e}_\beta = d^2\chi^{(m)} \cdot (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) = \overline{\overline{d^2\chi^{(m)}}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overset{\perp}{d^2\chi^{(m)}} \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ d\gamma &= d\gamma \cdot \mathbf{e}_\beta = \cos \varepsilon d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta = \overline{\overline{d\gamma}} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \overset{\perp}{d\gamma} \cdot \mathbf{e}_\eta. \end{aligned} \right\} (161A)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sh } \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \text{sh } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \\ \text{th } \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \frac{d\chi}{dct} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha, \end{aligned} \right| \quad \text{ch } \gamma = \frac{dct}{dct} = \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{sh } \gamma = \text{ch } \gamma \cdot \text{th } \gamma).$$

В СТО дифференциалы  $d\mathbf{x}$  и  $d^2\mathbf{x}$  не суммируются, как выше, так как они находятся в различных  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  и подлежат гиперболическому

суммированию через углы движения  $\gamma^{(1)}$  и  $d\gamma = d\gamma^{(m)}$  (см. гл. 5А). При интегральном неколлинеарном движении точечного объекта в общем случае непрерывно изменяются характеристический угол  $\gamma = \gamma^{(1)}$  (скалярное значение) и его вектор направляющих косинусов  $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^{(1)}$ . Параметры исходных и интегральных углов движения представляются в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$ , в то время как приращение угла  $d\gamma = d\gamma^{(m)}$  (дифференциал) представляется в мгновенном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ . При вычислении ортопроекции этого дифференциала в  $\tilde{\mathbf{E}}_m^{(2)}$ , согласно (145А), направляющие векторы  $\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_\eta$  выражаются условно в  $\tilde{\mathbf{E}}_m$ .

Заметим, что  $d^2\mathbf{x}^{(m)}$  и  $d\gamma$  связаны через коэффициент пропорциональности  $dct$ , или дифференциал дуги:  $d^2\mathbf{x}^{(m)} = d\gamma \, dct$ . Имеем:

$$c \cdot \frac{\overline{\overline{d\gamma}}}{d\tau} = \overline{\overline{g}}(\tau) = \cos \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{тангенциальное внутреннее ускорение,}$$

$$c \cdot \frac{\overset{\perp}{d\gamma}}{d\tau} = \overset{\perp}{g}(\tau) = \sin \varepsilon \cdot g(\tau) - \text{нормальное внутреннее ускорение,}$$

$$c \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \equiv \frac{d^2\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau^2} = g(\tau) - \text{общее внутреннее ускорение.}$$

Причём  $\mathbf{g}^2(\tau) = \overline{\mathbf{g}}^2(\tau) + \underline{\mathbf{g}}^2(\tau)$  - теорема Пифагора в  $\langle \mathcal{E}^3, (m) \rangle$  или в  $\tilde{\mathcal{E}}_{01}^{(2)}$ . Напомним, что здесь и далее, согласно (119А),  $0 \leq \varepsilon \leq \pi$ . Соответственно в интервале  $0 \div \pi/2$  все косинусные скалярные проекции положительные, а в интервале  $\pi/2 \div \pi$  они же все отрицательные.

Из (122А) имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{ch} \gamma &= \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma \, d\gamma = \operatorname{sh} \gamma \, d\overline{\gamma} = \overline{d \operatorname{ch} \gamma} = d \frac{dct}{dct} = d \frac{dt}{d\tau}, \\ \operatorname{ch} \gamma &= \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma \, d\gamma = \frac{dct}{dct} = \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (162 \text{ A})$$

Из (135А) с учётом того, что  $\mathbf{sh} \gamma = \mathbf{v}^*/c$ ,  $\operatorname{sh} \gamma = v^*/c$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \mathbf{sh} \gamma &= d(\operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha) = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ \mathbf{sh} \gamma &= \operatorname{sh} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = \operatorname{sh} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \operatorname{ch} \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta], \\ |d \mathbf{sh} \gamma|^2 &= \operatorname{ch}^2 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 = \operatorname{ch}^2 \gamma \, d\xi^2 + d\eta^2 = \\ &= \cos^2 \varepsilon (d \operatorname{sh} \gamma)^2 + \sin^2 \varepsilon (d \gamma)^2. \end{aligned} \right\} \quad (163 \text{ A})$$

Из (138А) с учётом того, что  $\mathbf{th} \gamma = \mathbf{v}/c$ ,  $\operatorname{th} \gamma = v/c$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \mathbf{th} \gamma &= d(\operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha) = \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ \mathbf{th} \gamma &= \operatorname{th} \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha = \operatorname{th} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} [\cos \varepsilon \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \operatorname{sch} \gamma \, d\gamma \cdot \mathbf{e}_\eta], \\ |d \mathbf{th} \gamma|^2 &= \operatorname{sch}^4 \gamma \cdot (\cos \varepsilon \, d\gamma)^2 + \operatorname{sch}^2 \gamma \cdot (\sin \varepsilon \, d\gamma)^2 = \operatorname{sch}^4 \gamma \, d\xi^2 + \operatorname{sch}^2 \gamma \, d\eta^2 = \\ &= \cos^2 \varepsilon (d \operatorname{th} \gamma)^2 + \sin^2 \varepsilon (d \operatorname{th}(\gamma))^2. \end{aligned} \right\} \quad (164 \text{ A})$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  - нормальные геодезические координаты на подвижном единичном гиперboloиде II. В этих формулах как гиперболический угол, так и направляющие векторы являются функциями соответствующего параметра движения, например  $\tau$  или  $t$ .

Собственная векторная скорость материальной точки выражается из (163А) в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^*(\tau) &= \mathbf{v}^*(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) = v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \\
 &+ c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \sin \varepsilon(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) = \\
 &= v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + c \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) = \\
 &= v_0^* \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\gamma}{d\tau}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau),
 \end{aligned} \tag{165A}$$

где:  $\operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}(\tau) = \frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau} = \overline{\overline{\mathbf{g}}}^*(\tau)$  - тангенциальное собственное ускорение, обобщающее (82А);

$\frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau} = \frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau} = \overline{\overline{\mathbf{g}}}^*(\tau)$  - одинаковые нормальные проекции

собственного и внутреннего ускорений. В отличие от  $\overline{\overline{\mathbf{g}}}^*$  и  $\frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau}$ .

$\frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau}$  и  $\frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}^*}{d\tau}$  в паре не подчиняются теореме Пифагора. Собственная скорость геометрически естественным образом представляется в кваздекартовых координатах в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  через тангенс сферического угла наклона мировой линии по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  или в псевдодекартовых координатах в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через синус гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к тому же  $\langle \mathcal{E}^{3,(t)} \rangle \equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle$  (см. рис. 2А).

Координатная векторная скорость материальной точки выражается из (164А) в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) = v_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot \operatorname{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \\
 &+ c \cdot \int_{t_0}^t \sin \varepsilon(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot \mathbf{e}_\eta(t) = \\
 &= v_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + c \cdot \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^3 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + c \cdot \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt \cdot \mathbf{e}_\eta(t) = \\
 &= v_0 \cdot \mathbf{e}_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^3 \gamma(t) \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}[\tau(t)] dt \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) + \int_{t_0}^t \operatorname{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}[\tau(t)] dt \cdot \mathbf{e}_\eta(t),
 \end{aligned} \tag{166A}$$

где:  $t_0 = \tau_0$ ,  $t = t(\tau)$  по (85 А);

$$\operatorname{sch}^3 \gamma[\tau(t)] \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}[\tau(t)] = \frac{d\overline{\overline{\mathbf{v}}}}{dt} = \overline{\overline{\mathbf{g}}}^{(1)}(t) \quad (167A)$$

- тангенциальное координатное ускорение, обобщающее (83 А);

$$\operatorname{sch}^2 \gamma[\tau(t)] \cdot \frac{1}{\mathbf{g}}[\tau(t)] = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\mathbf{g}}^{(1)}(t) \quad (168A)$$

— нормальное координатное ускорение. Обе эти характеристики также не подчиняются теореме Пифагора. Координатная скорость геометрически естественным образом представляется в псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  через тангенс гиперболического угла наклона мировой линии по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  (см. рис. 2А).

В том, что только *внутренние* ускорения подвержены биортонормальному разложению по теореме Пифагора, имеется глубокий физический смысл. В самом общем виде этот факт обсуждается и объясняется далее в гл. 9А.

Собственное вектор-расстояние соответственно вычисляется двумя способами с идентичной разбивкой на три составляющие  $[t_0 = \tau_0, v_0 = v_0^* = 0; t = t(\tau)]$ . Из (165А) и (166А) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_t(\tau) = \mathbf{x}_t(t) = \mathbf{x}_0 + (\Delta \mathbf{x})_1 + (\Delta \mathbf{x})_2 = \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_{\tau_0}^t \int_{\tau_0}^{\tau} \operatorname{ch} \gamma(\tau) \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) dt^2 + \int_{\tau_0}^t \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) d\tau^2 = \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_{\tau_0}^t \int_{\tau_0}^{\tau} \overline{\overline{\mathbf{g}}}^*(\tau) \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) dt^2 + \int_{\tau_0}^t \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau) dt^2 \equiv \end{aligned} \quad (169A)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \operatorname{sch}^3 \gamma(t) \cdot \overline{\overline{\mathbf{g}}}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) dt^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \operatorname{sch}^2 \gamma(t) \cdot \frac{1}{\mathbf{g}}[\tau(t)] \cdot \mathbf{e}_\eta(t) dt^2 = \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \overline{\overline{\mathbf{g}}}^{(1)}(t) \cdot \mathbf{e}_\alpha(t) dt^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \frac{1}{\mathbf{g}}^{(1)}(t) \cdot \mathbf{e}_\eta(t) dt^2. \end{aligned} \quad (170A)$$

При условии одновременности (85 А), то есть по отношению к  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$ , мировые точки в  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$  и в  $\langle \mathcal{E}^{3-1} \rangle$  (гл. 5А) выражаются тождественно в следующих координатных формах:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \left| \frac{\mathbf{x}}{ct} \right| \quad \text{и} \quad \mathbf{w} = \left| \frac{\mathbf{x}}{c\tau} \right|.$$

В свою очередь, изменение скалярного косинуса, согласно (162А), прямо пропорционально работе собственной силы (81 А) при физическом движении той же материальной точки:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} \gamma_0 &= \int_{\gamma_0}^{\gamma} \cos \varepsilon \cdot \operatorname{sh} \gamma \, d\gamma \equiv \frac{d ct}{d c\tau} \Big|_{\tau_0}^{\tau} = \frac{d t}{d \tau} \Big|_{\tau_0}^{\tau} \equiv \\ &\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \cos \varepsilon(\tau) \cdot \mathbf{v}^*(\tau) \cdot \mathbf{g}(\tau) \, d\tau \equiv 1/c^2 \cdot \int_{t_0}^t \cos \varepsilon(t) \cdot \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{g}[\tau(t)] \, dt \equiv \quad (171A) \\ &\equiv 1/c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot \mathbf{g}(\chi) \, d\chi \equiv 1/m_0 c^2 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot \mathbf{F}(\chi) \, d\chi = 1/E_0 \cdot \int_{\chi_0}^{\chi} \overline{\mathbf{F}}(\chi) \, d\chi = A/E_0. \end{aligned}$$

где  $A = \int_{\chi_0}^{\chi} \cos \varepsilon(\chi) \cdot \mathbf{F}(\chi) \, d\chi = \int_{\chi_0}^{\chi} \overline{\mathbf{F}}(\chi) \, d\chi$ .

При  $\gamma_0^* = 0$  ( $v_0^* = v_0 = 0$ ) имеем:

$$\operatorname{ch} \gamma = 1 + A/E_0, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} \gamma \cdot E_0 = E = m_0 c^2 + A = mc^2.$$

Следовательно, классическая формула для полной механической энергии Эйнштейна имеет *косинусную* и поэтому скалярную природу. В процессе *произвольного* поступательного движения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  *полная* энергия материального тела в каждой точке мировой линии есть скаляр мгновенного тензора энергии-импульса, подобный координатному времени (на гиперболоиде II). Им прямо пропорциональны аналогичные характеристики для полного импульса и полной массы (гл. 5А). В процессе физического движения все тригонометрические функции его гиперболического угла изменяются согласованно между собой:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \gamma &= \operatorname{sh} \gamma / \operatorname{th} \gamma = (\operatorname{sh} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{sh} \gamma) / (\operatorname{th} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{th} \gamma) = \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d (\operatorname{sh} \gamma / \operatorname{th} \gamma) = \\ &= \operatorname{ch} \gamma_0 + \int_{\gamma_0}^{\gamma} d \operatorname{ch} \gamma. \end{aligned}$$

Причина этого состоит в том, что синус и тангенс имеют один и тот же направляющий вектор  $\mathbf{e}_\alpha$ .

Вектор-импульс изменяется как *синусная* векторная характеристика

$$\mathbf{p} = m_0 c \cdot \text{sh } \gamma = m_0 \cdot \mathbf{v}^* = \mathbf{p}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \text{ch } \gamma \cdot \overline{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\alpha(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \overline{\mathbf{F}}(\tau) d\tau \cdot \mathbf{e}_\eta(\tau).$$

В свою очередь, полная масса, полный импульс и полная энергия изменяются как родственные скалярные *косинусные* характеристики. Поэтому для синусных и косинусных характеристик имеют место инвариантные соотношения в 3-х тождественных формах:

$$m_\tau^2 = m^2 - (\mathbf{p}/c) \cdot \mathbf{p}/c \leftrightarrow P_0^2 = P^2 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} \leftrightarrow E_0^2 = E^2 - (\mathbf{p}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{p}\mathbf{c}$$

$$\text{где } \mathbf{p} = m_0 c \cdot \text{sh } \gamma = P_3 \cdot \text{sh } \gamma, \quad m = m_0 \cdot \text{ch } \gamma, \quad P = P_0 \cdot \text{ch } \gamma, \quad E = E_0 \cdot \text{ch } \gamma.$$

Весьма интересно, что из (120А) и (135А) для поступательного (в прямом смысле) неколлинеарного движения тела следует *сугубо математически* эффект его особой релятивистской *ортосферической* прецессии с отвечающими ей формально моментом количества движения и главным моментом (неинерционной природы в  $\langle P^{3+1} \rangle$ ):

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= - \text{th } (\gamma/2) \cdot \sin \varepsilon(\gamma) d\gamma = - \{ \text{th } \gamma \cdot \sin \varepsilon(\gamma) d\gamma \} / (1 + \text{sch } \gamma), \\ d\theta/d\tau &= - \sin \varepsilon(\tau) \cdot c/R(\tau) \cdot \text{th } [\gamma(\tau)/2] = - \sin \varepsilon(\tau) \cdot \eta_k(\tau) \cdot \text{th } [\gamma(\tau)/2]. \end{aligned} \right\} (172 \text{ A})$$

Ортосферическая прецессия (буст) понимается здесь наиболее общо, нежели конкретная прецессия Томаса для спина электрона. Она обусловлена именно структурой псевдоевклидова пространства-времени. Однако эта прецессия имеет *относительный* характер, так как псевдодекартов базис в данной точке мировой линии всегда можно выбрать так, что в ней ортогональная составляющая кривизны (ускорения) будет уничтожена, то есть  $\text{sin } \varepsilon = 0$ . В таком *абсолютном* мгновенном базисе  $\hat{\mathbf{E}}_{\text{ин}}$  ось стрелы времени направлена по вектору мгновенной касательной, а  $\{\mathcal{E}_3\}^{(m)}$  обязательно содержит мгновенную псевдонормаль. (Об абсолютных базисах подробно сказано в заключительной главе 10А.) Например, для плоской криволинейной мировой линии, отвечающей некоторому неравномерному *прямолинейному* физическому движению, вышеуказанный абсолютный базис является неизменным. Критерий, определяющий такой тип мировой линии, есть нулевое кручение при ненулевой кривизне. Поэтому для данного типа движения ортосферическая прецессия является кажущейся (артефактной) характеристикой. В более общем случае — для закрученной мировой линии ортосферическая прецессия

сохраняет свой относительный характер, но выбором базиса она может быть уничтожена только *локально*. Знак «—» в формулах (172 А) иллюстрирует тот факт, что в гиперболической геометрии и в СТО ортосферическая ротация (буст) в мгновенной евклидовой плоскости суммирования движений направлена против направления этого суммирования, в том числе при дифференциальных приращениях движения.

В свою очередь, при значениях  $\varepsilon = \pi/2$  и  $\gamma \rightarrow 0$  имеем:

$$\frac{d\theta}{dt} \approx -v \cdot \frac{1}{g} / 2c^2; \quad L = J_0 \cdot \frac{d\theta}{d\tau} \approx J_0 \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad M = \frac{dL}{d\tau} \approx \frac{dL}{dt} \approx -J_0 / 2c^2 \left( \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{g} + v \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{g} \right).$$

Заметим, что в изложенной *относительной* тригонометрической трактовке кинематики и динамики абсолютного (мирового) движения материальных тел в  $\langle P^{3+1} \rangle$  природа активной собственной силы  $F$  и вызываемого ею внутреннего ускорения  $g = F/m_0$  не имеет значения.

*Абсолютная* тригонометрическая трактовка движения материи по мировым линиям в  $\langle P^{3+1} \rangle$  рассматривается в последней главе 10А.

## **Глава 8А. Тригонометрические модели движений в сферической геометрии**

*Квазиевклидово* пространство  $\langle Q^{n+1} \rangle$ , то есть такое с индексом  $q = 1$ , с вложенным в него односвязным гиперсфероидом радиуса  $R$  определяется аналогично псевдоевклидову пространству Минковского  $\langle P^{n+1} \rangle$  с вложенными в него гиперболоидами I и II. В задании  $\langle Q^{n+1} \rangle$  существенную роль играет рефлектор-тензор  $I^{\oplus}$ , как и в задании псевдоевклидова пространства Минковского. Однако при этом квазиевклидово пространство в целом имеет евклидову метрику. Составной частью его геометрии является квазиевклидова тригонометрия. Квазиевклидово пространство с индексом  $q=1$  в каком-либо квазидекартовом базисе представляется прямой сферически ортогональной суммой двух вещественных пространств:

$$\langle Q^{n+1} \rangle \equiv \langle E^n \rangle \oplus \vec{y} \equiv \text{CONST},$$

(173А)



где  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ - евклидово подпространство,  $\vec{y}$ - ориентированная реперная ось для отсчёта угла основной сферической ротации  $\Phi$ .

С точки зрения квазиевклидовой тригонометрии в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  подпространство  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ - тангенсная гиперплоскость,  $\vec{y}$ - косинусная ось. Заметим, что мнимонизация реперных осей  $\vec{y}$  трансформирует  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в комплексное псевдоевклидово пространство индекса 1 - изоморфизм псевдоевклидова пространства Минковского. В  $\langle Q^{2+1} \rangle$  реализуется двумерная сферическая геометрия на вложенной сфере.

В  $\langle Q^{n+1} \rangle$  как исходно аффинном пространстве допускается операция параллельного переноса (в евклидовом смысле). Кроме того, в *ориентированном* квазиевклидовом пространстве допускаются такие линейные ортогональные преобразования, которые сохраняют пространственную структуру (173А) и исходную правую ориентацию базисов. Это сферические ротации двух типов:

$$\langle \text{rot } \Phi \rangle: \text{rot } \Phi \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Phi = I^{\oplus} = \text{rot } (-\Phi) \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } (-\Phi) \tag{174A}$$

— основные сферические ротации;

$$\langle \text{rot } \Theta \rangle: \text{rot}' \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot } \Theta = I^{\oplus} = \text{rot } \Theta \cdot I^{\oplus} \cdot \text{rot}' \Theta \tag{175 A}$$

- ортосферические ротации (ортогональные по отношению к предыдущим).

Итак, квазиевклидово пространство  $\langle Q^{n+1} \rangle$  определяется как евклидовой метрикой, так и рефлектор-тензором  $I^{\oplus}$ , задающим допустимые в нём преобразования (вместе с евклидовым параллельным переносом). Соответственно в этом пространстве применяются квази-декартовы базисы вида:

$$\vec{E} = \text{rot } \Phi \text{ rot } \Theta \cdot \vec{E}_1 = \text{rot } \Theta \text{ rot } \vec{\Phi} \cdot \vec{E}_1 = T \cdot \vec{E}_1, \tag{176A}$$

где  $\vec{E}_1$ - какой-либо исходный универсальный базис. Именно в этом пространстве реализуется бинарная квазиевклидова тригонометрия индекса 1 в правых базисах. На вложенном в него гиперсфереоиде реализуется сферическая геометрия и сферическая тригонометрия того же индекса 1. В универсальных базисах имеет место сферическо-гиперболическая аналогия абстрактного и конкретного типов. В частности, общая тригонометрическая ротация Т определяется по аналогии со (111 А) в форме *квазиполярного* представления:

$$\mathbf{T} = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \bar{\Phi}. \quad (177A),$$

$$(178A)$$

Здесь используется абстрактная аналогия типа (323), когда осуществляется трансформация:

$$\Gamma \rightarrow i\Gamma \rightarrow \Phi \quad (\gamma \rightarrow i\gamma \rightarrow \varphi),$$

$$\text{roth } \Gamma \rightarrow \text{rot } i\Gamma \rightarrow \text{rot } \Phi.$$

Матрица основной сферической ротации  $\text{rot } \Phi$  (то есть ротации с реперной осью), согласно (314), имеет каноническую структуру в  $\bar{E}_1$ , отвечающую рефлектор-тензору как указано ниже:

$\text{rot } \Phi$		- - - - -	I		
$\cos \varphi \cdot \overleftarrow{e}_\alpha e'_\alpha + \overrightarrow{e}_\alpha e'_\alpha$	$-\sin \varphi \cdot e_\alpha$		$I_{n \times n}$	$\mathbf{0}$	(179 A)
$+\sin \varphi \cdot e'_\alpha$	$\cos \varphi$		$\mathbf{0}'$	$-1$	

С другой стороны, ортогональная матрица  $\text{rot } \Theta$  в базе своего действия, согласно (497), отвечает рефлектор-тензору по схеме (110A). В связи с вышеуказанной аналогией в исходных универсальных базисах формулы гиперболической геометрии (гл. 7A) весьма логично преобразуются в формулы сферической геометрии. Если перейти от угла движения к мере Ламберта - гиперболической и сферической

$$\left. \begin{aligned} a_{(h)} &= \gamma \cdot R, \\ a_{(s)} &= \varphi \cdot R, \end{aligned} \right| \quad (180)$$

то обе геометрии (в малом) также переходят друг в друга во внутренней и внешней интерпретациях. Поэтому далее приводится, главным образом, сводка формул движений в сферической геометрии с небольшими пояснениями. Заметим, что движения в сферической геометрии и в эллиптической геометрии Римана в достаточно ограниченной области изоморфны в силу изоморфности этих геометрий в малом. Поэтому конечные результаты в *скалярной* форме, относящиеся только к внутренней геометрии, имеют место в обеих геометриях.

Для двухступенчатого неколлинеарного движения по гиперсфереиду в  $\langle Q^{n+} \rangle$  имеем:

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{E}}_3 &= \{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12}\}_{\check{\mathbb{E}}_1} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \check{\mathbb{E}}_1 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \check{\mathbb{E}}_1 = \\ &= \Gamma \cdot \check{\mathbb{E}}_1 = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \cdot \check{\mathbb{E}}_1 = \text{rot } \Theta_{13} \cdot \text{rot } \check{\Phi}_{13} \cdot \check{\mathbb{E}}_1 \end{aligned} \quad (181A)$$

- аналог формулы (111 A);

$$\text{rot } \check{\Phi}_{13} = \text{rot}' \Theta_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Theta_{13} \quad (182A)$$

— аналог формулы (112A);

$$\text{rot } \Phi_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } 2\Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12}} = \sqrt{\text{rot } 2\Phi_{13}}, \quad (183A)$$

$$\text{rot } \Theta_{13} = \text{rot}' \Phi_{13} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \cdot \text{rot}' \Phi_{23} \quad (184A)$$

— аналоги формул (114 A), (115 A), где корни тригонометрические.

В случае  $\check{\mathbb{E}}_1 = \{I\}$  при перемене порядка последовательности двух сферических движений на противоположный новый кваздекартов базис задаёт матрица - *квазианалог*  $\Gamma'$  из (116 A):

$$\begin{aligned} \check{\mathbb{E}}'_3 &= \{\text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12}\} = \Gamma^* = \\ &= \{\text{rot } \check{\Phi}_{13} \cdot \text{rot } (-\Theta_{13})\} = \{\text{rot } (-\Theta_{13}) \cdot \text{rot } \Phi_{13}\}. \end{aligned} \quad (185A)$$

Формально преобразование  $\Gamma^*$  выводится из  $\Gamma$  через операцию простого транспонирования, но при этом реализуемой в бинарном комплексном базисе (443). Для обратного порядка движений имеем:

$$\text{rot } \check{\Phi}_{13} = \sqrt{\text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } 2\Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23}} = \sqrt{\text{rot } 2\check{\Phi}_{13}}, \quad (186 A)$$

$$\text{rot } (-\Theta_{13}) = \text{rot}' \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{13} = \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot}' \Phi_{13} \quad (187 A)$$

- аналоги формул (117A), (118A), где корни тригонометрические.

Здесь также сохраняется двойственность во взгляде на ротацию  $\text{rot } \Theta$ . С одной стороны, она связана с возникающим сферическим сдвигом при суммировании частных неколлинеарных движений *неточечных объектов*. С другой стороны, согласно (112A), она же преобразует модально основную суммарную ротацию  $\text{rot } \Phi$  при перемене порядка последовательности двух частных движений на противоположный. Связь между двумя вариантами

двухступенчатого сферического движения (прямым и обратным) сводится к замене частных углов по схеме:

$$\varphi_{12} \leftrightarrow \varphi_{23}, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k \tag{188 A}$$

— аналог (121 А).

Перемножая элементы матриц в (183А) или применяя аналогию абстрактного типа, получаем формулы двухступенчатого движения в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ . Например, в косинусной интерпретации имеем:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{13} &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} - \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} = \\ &= \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos A_{123} \cdot \sin \varphi_{12} \cdot \sin \varphi_{23} \\ (A_{123} &= \pi - \varepsilon). \end{aligned} \tag{189 A}$$

Отсюда непосредственно видна независимость суммарного скалярного угла движения от порядка последовательности двух частных движений. Это классическая *скалярная* формула сферической геометрии и эллиптической геометрии Римана. При движении по гиперсфере с возрастанием значений направленной ординаты  $\vec{y}$  все  $\varphi > 0$ . В связи с этим обстоятельством для положительных углов движения  $\varphi$  (и расстояний по метрике Ламберта) с учётом (189А) следует правило "параллелограмма", как в евклидовой геометрии:

$$|\varphi_{12} - \varphi_{23}| \leq \varphi_{13} \leq \varphi_{12} + \varphi_{23} \tag{190A}$$

- аналог (123А). Неравенства (190А) и  $\varphi > 0$  относят расстояние в сферической геометрии в категорию норм. Заметим, что в тангенсной модели, или в проективной модели Клейна гиперсфероид в целом отображается на всю *двухстороннюю* (замкнутую) проективную гиперплоскость « $\mathcal{E}^B$ », то есть он гомеоморфен ей.

Соответствующие формулы для скалярных синуса и тангенса - аналоги (124А) и (125А) даются с учётом *теоремы о приведении к биортогональной (квадратичной) некоммутативной форме* (гл. 7А):

$$\sin^2 \varphi_{13} = (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12})^2 + (\sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23})^2, \quad (191A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{23}^2 = & [(\operatorname{tg} \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2 + \\ & + [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{sec} \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})]^2. \end{aligned} \quad (192 A)$$

Для условно ортогональных частных движений из (189А) следует мультипликативная косинусная формула, трактующая скалярно их суммирование как *интегральный* аналог теоремы Пифагора:

$$\cos \varphi_{13} = \cos \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2). \quad (193A)$$

При движении по n-мерному гиперсфероиду количество последовательных независимых, условно ортогональных отрезков (углов) не может превышать число «n». Применяя также последовательно (193А), получаем общую мультипликативную косинусную формулу

$$\cos \varphi_{it} = \prod_{\substack{j=1, t-1 \\ j=2, t}} \cos \varphi_{ij} \quad (\varepsilon = \pm \pi/2), \quad \text{где } 3 \leq t \leq n.$$

Суммирование условно ортогональных движений в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  в скалярном варианте коммутативно. Например, протяжённость суммы таких движений вычисляется в виде

$$a_{it} = R \cdot \arccos \prod_{\substack{j=1, t-1 \\ j=2, t}} \cos a_{ij} / R.$$

Кроме того, многозвенные косинусные формулы для условно ортогональных движений в обеих геометриях представляются в аддитивной форме через логарифмические меры:

$$\ln \cos \varphi \equiv \ln \cos a/R \quad \text{и} \quad \ln \operatorname{ch} \gamma \equiv \ln \operatorname{ch} a/R.$$

Общие мультипликативные и аддитивные соотношения для скалярной суммы условно ортогональных движений являются *интегральными* аналогами теоремы Пифагора в неевклидовой геометрии.

Как и ранее, особый случай соответствует ортогональной (*теперь не условно!*) сумме бесконечно малых частных углов движения:

$$\lim_{\substack{\varphi_{12} \rightarrow 0 \\ \varphi_{23} \rightarrow 0}} \varphi_{13} = \sqrt{\varphi_{12}^2 + \varphi_{23}^2}, \quad \theta_{13} = \varphi_{12} \cdot \varphi_{23} / 2 \rightarrow 0;$$

$$\lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \varphi = \sqrt{\sum_{j=1}^k \varphi_{(j)}^2}, \quad dv = d\varphi_{(1)} \dots d\varphi_{(k)} \cdot R^k \quad (k \leq n).$$

Здесь имеет место коммутативность частных углов движения в скалярной и векторной формах. Например, первый дифференциал общего угла движения представляется в двух вариантах - аналогах (144А) и (145А):

$$\left. \begin{aligned} (d\varphi)^2 &= \sum_{j=1}^n [d\varphi_{(j)}]^2, \quad (194 \text{ A}) \\ d\varphi &= \overline{d\varphi} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{d\varphi} \cdot \mathbf{e}_\eta = d\varphi \cdot \mathbf{e}_\beta, \\ (d\varphi)^2 &= (\overline{d\varphi})^2 + \left(\frac{1}{d\varphi}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (195 \text{ A})$$

Ввиду того, что при непрерывных движениях в  $\langle P^{n+1} \rangle$  или в  $\langle Q^{n+1} \rangle$ , отображаемых непосредственно траекториями на собственных гиперповерхностях, характеристический радиус постояен ( $R = \text{const}$ ), то аналогичная инфинитиземальная теорема Пифагора имеет место для соответствующих дифференциалов длин ортогональных приращений отрезков, выраженных мерой Ламберта. В первом варианте имеем:

$$(da)^2 = \sum_{j=1}^n [da_{(j)}]^2. \quad (196 \text{ A})$$

Например, это может быть первая *каноническая* квадратичная форма римановой поверхности постоянной кривизны, выраженная в текущих ортогональных криволинейных координатах Гаусса. Во втором варианте имеем:

$$\left. \begin{aligned} da &= \overline{da} \cdot \mathbf{e}_\alpha + \frac{1}{da} \cdot \mathbf{e}_\eta = da \cdot \mathbf{e}_\beta, \\ (da)^2 &= (\overline{da})^2 + \left(\frac{1}{da}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (197 \text{ A})$$

Например, это может быть разложение первого дифференциала  $da = R^{(m)} d\gamma$  или  $da = R^{(m)} d\varphi$  на тангенциальную и нормальную ортопроекции в соприкасающейся псевдо/квазиплоскости к криволинейному участку линии движения в окрестности точки М с мгновенным радиусом псевдо/квазикривизны  $R^{(m)}$ .

С другой стороны, во внешней тригонометрии гиперсфероида в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  имеют место векторные формулы для синуса и тангенса суммы двух движений:

$$\begin{aligned} \sin \varphi_{13} = \sin \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = (\sin \varphi_{12} \cdot \cos \varphi_{23} + \cos \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \cos \varphi_{12}) \cdot \mathbf{e}_\alpha + \\ + \sin \varepsilon \cdot \sin \varphi_{23} \cdot \mathbf{e}_\eta, \end{aligned} \quad (198A)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{13} = \operatorname{tg} \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\sigma = [(\operatorname{tg} \varphi_{12} + \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})] \cdot \mathbf{e}_\alpha + \\ + [(\sin \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \sec \varphi_{12}) / (1 - \cos \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \varphi_{23} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{12})] \cdot \mathbf{e}_\eta \end{aligned} \quad (199A)$$

- аналоги формул (135A) и (138A) с той же геометрической интерпретацией, но в сферическом варианте.

Далее рассмотрим *внешнюю* векторную тригонометрию единичного гиперсфероида ( $R = 1$ ).

\* \* \*

Имеем:

$$\mathbf{e} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\cos \varphi} \quad (\text{при } \Delta y > 0: \varphi > 0) \quad (200A)$$

-  $n \times 1$  единичный радиус-вектор точки гиперсфероида. Метрический инвариант выражается в виде:

$$\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e} = \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi + \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma' \cdot \mathbf{e}_\sigma + \cos^2 \varphi = 1 = I^2. \quad (201A)$$

Остальные тригонометрические функции получаются делением базового элемента  $\mathbf{e}$  либо на  $\cos \varphi$ , либо на  $\sin \varphi$ . Далее,

$$\sec \varphi = \sec \varphi \cdot \mathbf{e} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1} = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot \mathbf{e}_\alpha}{1} - n \times 1 \text{ радиус-вектор секанса,}$$

конец которого лежит на тангенсной евклидовой гиперплоскости;

$$\operatorname{cosec} \varphi = \operatorname{cosec} \varphi \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}_\sigma}{\operatorname{ctg} \varphi} - n \times 1 \text{ радиус-вектор coseканса,}$$

конец которого лежит на котангенсной цилиндрической евклидовой гиперповерхности.

Сферическое преобразование (движение) какого-либо точечного элемента  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  единичного гиперсфероида в активной форме в  $\tilde{\mathbf{E}}_1$

представляется в виде:

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} \mathbf{e}_3 \\ \hline \sin \varphi_{13} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \hline \cos \varphi_{13} \end{matrix} &= \text{rot } \Phi_{13} \cdot \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{matrix} = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot } (-\Phi_{13}) \cdot \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{matrix} = \\
 &= \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{matrix} = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{12}' \cdot \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{matrix} = \\
 &= \{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot (\text{rot } \Phi_{23})_{F_2} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \}_{E_1} \cdot \begin{matrix} \mathbf{e}_2 \\ \hline \sin \varphi_{12} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ \hline \cos \varphi_{12} \end{matrix}.
 \end{aligned}
 \tag{202A}$$

Траектория сферического (геодезического) движения  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  принадлежит сечению гиперсфероида плоскостью ротации матрицы  $\{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \}$ . Аналитически она производится при непрерывном преобразовании  $\mathbf{e} \rightarrow (\mathbf{e} + d\mathbf{e})$  путём изменения в матрице  $\text{rot } \Phi_{23}$  значения скалярного угла от 0 до  $\varphi_{23}$  при  $\mathbf{e}_\beta = \text{const}$ . В модели Клейна, или тангенсной модели эта траектория отображается прямолинейным отрезком  $\text{tg } \varphi_{23}$  на проективной гиперплоскости « $\mathcal{E}^n$ ». На гиперсфероиде нетрудно реализовать сферический треугольник (и далее другие многоугольники) через квазиполярное представление:

$$\text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \mathbf{u}_1 = \text{rot } \Phi_{13} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_3,$$

$$\text{rot } \Phi_{12} \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \{ \text{rot } \Phi_{12} \cdot \text{rot } \Phi_{23} \cdot \text{rot}' \Phi_{12} \} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3.$$

Централизованный треугольник  $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$  трансформируется в произвольный путём активного преобразования координат в том же  $\tilde{E}_1$ .

Вышеизложенное иллюстрирует хорошо известный факт (теорему) сферической геометрии: любые две *неполярные* точки сферы можно соединить на ней кратчайшим евклидовым расстоянием по однозначной дуге некоторой большой окружности (геодезической). Это же даёт указанный *матричный* способ решения такой задачи в исходном централизованном декартовом базисе  $\tilde{E}_1$ . Причём в базисе  $\tilde{E}_2 = \text{rot } \Phi_{12} \cdot \tilde{E}_1$  угол  $(\pi/2 - \varphi_{23})$  есть широта элемента  $\mathbf{e}_3$  в *глобусных координатах*. В этом базисе движение  $\mathbf{e}_2 \rightarrow \mathbf{e}_3$  реализуется по меридиану, а долгота не меняется. Элементы соединяются кратчайшей дугой с расстоянием  $a_{23} = R \cdot \varphi_{23}$ . Как видно из (202A), при движении



точечного элемента ортосферический сдвиг  $\theta_{13}$  фактически аннигилирует. Но этот сдвиг проявлял бы себя обязательно при двухступенчатом движении неточечного объекта, например, задаваемого линейном.

Отметим, что в двумерной сферической геометрии угол  $\theta$  есть *эксцесс* сферического треугольника или более сложной - составной фигуры. Он направлен именно в сторону суммирования отрезков.

\* \* \*

Используя квазиполярное представление (177А), (178А), находим в общем виде закон и формулы для суммирования многоступенчатых движений в сферической геометрии как внешней, так и внутренней в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  - аналоги соотношений (153А)—(155А). При этом *скалярные формулы* имеют место и в эллиптической геометрии Римана. Имеем:

$$T = \text{rot } \Phi \cdot \text{rot } \Theta = \text{rot } \Theta \cdot \text{rot } \Phi =$$

$(1 - \cos \varphi) \cdot e_{\sigma} e_{\sigma}' + \text{rot } \Theta_{n \times n}$	$-\sin \varphi \cdot e_{\sigma}$
$+ \sin \varphi \cdot e_{\sigma}'$	$\cos \varphi$

(203 А)

Здесь  $\text{rot } \Theta$  выражается канонической формой типа (497). Далее,

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\varphi &= s_{nn}; \quad \cos \varphi = +\sqrt{(1 + s_{nn})/2}, \quad \sin \varphi = +\sqrt{(1 - s_{nn})/2}, \\ \text{tg } \varphi &= +\sqrt{(1 - s_{nn})/(1 + s_{nn})} = \sin \varphi / \cos \varphi; \\ \cos \sigma_k &= s_{nk} / \sqrt{1 - s_{nn}^2}, \quad \text{tg } \varphi_k = \cos \sigma_k \cdot \text{tg } \varphi = s_{nk} / (1 + s_{nn}); \\ \cos \theta &= (\text{tr rot } \Theta - 2) / (n - 1) = e_{\sigma}' \cdot e_{\sigma}. \end{aligned} \right\}$$

(204А)

Здесь же укажем структуру специфической матрицы  $T^*$  типа (185 А) для обратного порядка последовательности частных движений:

$$T^* = \text{rot } \vec{\Phi} \cdot \text{rot } (-\Theta) = \text{rot } (-\Theta) \cdot \text{rot } \Phi$$

$(1 - \cos \varphi) \cdot \mathbf{e}_\sigma \mathbf{e}_\sigma' + \text{rot } \Theta_{n \cdot n}$	$-\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma$
$+\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\sigma'$	$\cos \varphi$

Таким образом, тензорная тригонометрия содержит достаточно общий и эффективный инструментарий для изучения и описаний в едином ключе движений в псевдоевклидовых и в (квази)евклидовых пространствах. В частности, описанные в гл. 5А - 8А закономерности этих движений являются существенной частью неевклидовых геометрий в малом, реализуемых в подпространствах постоянной кривизны.

Как известно, исторически изначально Ламберт и Тауринус сделали первые шаги в направлении создания неевклидовой геометрии гиперболического типа, выдвинув её аналогию с геометрией сферы. Они же определили таковую как геометрию на сфере мнимого радиуса. Впоследствии благодаря исследованиям Клейна стало ясно, что этот ранее гипотетический геометрический объект есть гиперboloид II Минковского. В данной главе был сделан шаг в обратном направлении. А именно установленные ранее в гл. 7А закономерности движений в гиперболической геометрии на основе сферическо-гиперболической аналогии трансформированы далее в соответствующие закономерности движений в сферической геометрии. С применением общих методов тензорной тригонометрии между движениями в обеих геометриях постоянного радиуса продемонстрирована определённая взаимосвязь.

На наш взгляд, представляет особый интерес предпринять когда-нибудь *совместное изложение* обеих неевклидовых геометрий постоянного радиуса с их неискажаемой интерпретацией на собственных гиперповерхностях - гиперсфереоиде в  $\langle Q^{n+1} \rangle$  и гиперboloидах в  $\langle P^{n+1} \rangle$ . В рамках геометрий в малом их объединяют общие методы тензорной тригонометрии, в рамках геометрий в целом - тригонометрические модели, отображаемые на проективной двухсторонней (замкнутой) гиперплоскости и на проективном одностороннем (замкнутом) гиперцилиндре.

## Глава 9А. Необходимо ли искривление пространства-времени в поле тяготения?

( Главы 9А и 10А имеют дискуссионный характер)

*Специальная теория относительности* (СТО) формулирует законы движения материи при абстрактно предполагаемом отсутствии именно поля тяготения, причём как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчёта. Тензорно-тригонометрические возможности для этого были продемонстрированы в гл. 2А - 7А. Исходя из преобразований Лоренца для координат пространства и времени Пуанкаре в 1905г. выдвинул революционную (но оставшуюся практически незамеченной современниками) идею единого комплексного пространства-времени с псевдоевклидовой метрической формой. Пуанкаре ввёл *мнимую* координату времени и для неё особый масштабный коэффициент однородности - константу «с». (Существенно то, что реальная скорость света не всегда совпадает с этим коэффициентом, но не превышает его.) Впоследствии Минковский в 1907 — 1908 гг. предложил развёрнутую *овеществлённую* модель псевдоевклидова пространства-времени. Минковский также ввёл в релятивистскую теорию понятия о времени- и пространствуподобных интервалах, изотропном конусе и т. д. Изложенные им идеи быстро получили всеобщее признание, так как почва для этого уже созрела.

Ещё ранее в рамках динамики и теории тяготения Ньютона неизбежно встали вопросы о происхождении силы инерции и силы тяготения материи. Сам Ньютон для объяснения инерции постулировал некое абсолютное пространство наряду с абсолютным временем и таким образом он придал инерции и ускорению абсолютный смысл.

Мах (1883 г.), хотя и подверг известной критике эти взгляды Ньютона, но по существу он конкретизировал абсолютное пространство, связав его со звёздной системой Вселенной. В теории Маха, имеющей качественный и более философский характер, инерция и ускорение определяются по отношению к некоторой выделенной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ , связанной с неподвижной в ней массой Вселенной в целом (*принцип Маха*). При этом их абсолютный смысл сохраняется. Система отсчёта

Маха, в свою очередь, задаёт бесконечное множество *галилеевски инерциальных систем отсчёта*  $\langle \check{E}_j \rangle$  (псевдодекарттовых базисов). По определению, такие системы совершают равномерное поступательное и прямолинейное движение по отношению к  $\check{E}_0$ . Например, с довольно высокой точностью они могут быть связаны с центрами масс каких-либо звёздных объектов, в том числе Солнца.

В связи с разработкой *общей теории относительности* (ОТО) Эйнштейн обратил особое внимание на эмпириокритические высказывания Маха по вопросам механики и философии познания. Эйнштейн впервые чётко и явно сформулировал закон о тождестве инерционной и тяготеющей масс для любого материального объекта. Этот закон использовался в неявном виде уже изначально в классической динамике, теории тяготения и в объединяющей их небесной механике. Как фундаментальный закон Природы он действует и в классических и в релятивистских формах. Независимость гравитационного ускорения от природы вещества экспериментально установил Ньютон и с высокой точностью подтвердил Этвёш в 1909 г. Возникла идея об одной и той же - *гравитационной* природе сил инерции и тяготения. Ввиду этого Эйнштейн выдвинул *принцип эквивалентности*, в котором он полностью **математически и физически отождествил инерцию и тяготение как дублирующие друг друга тензорные понятия.**

С другой стороны, исходя из принципа Маха закон о тождестве масс можно объяснить тем, что для данного материального тела сила тяготения вызывается *активным* гравитационным воздействием на него со стороны других материальных объектов, а сила инерции вызывается пассивным гравитационным воздействием на него со стороны материи Вселенной в целом. Активное гравитационное воздействие вызывает ньютонову силу притяжения, а пассивное вызывает силу сопротивления ускорению. В собственном базисе, связанном с центром массы тела (материальной точкой), обе силы точь-в-точь прямо пропорциональны его массе как некоторому вещественному "гравитационному заряду". Поэтому в такой трактовке второй закон механики Ньютона становится естественным дополнением к его же закону всемирного тяготения. Для придания второму закону аналогичного *всемирного* характера, но в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , необходимо с учётом СТО перейти от внутреннего ускорения к его же абсолютному, прямо

пропорциональному геометрическому аналогу — гиперболической кривизне мировой линии:

$$-F_{(i)} = F = m_0 \cdot g_{(i)} = m_0 \cdot c^2 / R_{(i)} = E_0 / R_{(i)}, \quad (205A)$$

где  $F$  - активная собственная сила любого происхождения, вызывающая отклонение абсолютного движения материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  от прямолинейности;

$F_{(i)}$  — противодействующая ей пассивная собственная сила инерции (именно она всегда прямо пропорциональна нулевой массе  $m_0$ );

$m_0$  и  $E_0$  - масса и эйнштейнова энергия покоя материальной точки как её инерционно-тяготеющие характеристики в собственном псевдодекартовом базисе  $\tilde{E}_m$ ;

$R_{(i)} = 1/K_{(i)} = E_0 / F$  - радиус мгновенной абсолютной гиперболической кривизны мировой линии, вычисляемый в соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{i+1} \rangle \subset \langle P^{3+1} \rangle$  в мировой точке местоположения массы  $m_0$  (гл. 5A);

в ином виде  $E_0 = F \cdot R_{(i)}$  выступает как модуль главного момента активной силы  $F$ , вызывающей гиперболическую ротацию;

$c$  — постоянная скалярная *псевдоскорость* абсолютного движения любой материальной точки вдоль её мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  -характеристика, впервые введённая Пуанкаре и равная его же масштабному коэффициенту (гл. 1 A). В векторной форме она обычно именуется, согласно Пуанкаре, как 4-скорость.

В такой, как в формуле (205 A), *небесной гравитационной* трактовке инерции  $F_{(i)}$  есть центростремительная сила, направленная всегда в  $\langle P^{1+1} \rangle$  к мгновенному центру касательной к мировой линии гиперболы (псевдоокружности). Как тут не вспомнить знаменитое изречение средневекового мыслителя Николая Кузанского и современного (2009 г.) Анатолия Кононюка: "Вселенная есть сфера, центр которой повсюду".

*Небесная* форма (205A) для второго закона механики Ньютона, как и должно быть, согласуется с первым и третьим законами:

$$F = 0 \leftrightarrow g_{(i)} = 0 \leftrightarrow K_{(i)} = 0, \quad -F_{(i)} = F.$$

При действии на одну и ту же материальную точку одновременно нескольких разнонаправленных и даже разнородных активных *собственных* сил они и соответствующие

им *внутренние* ускорения суммируются подобно векторам в мгновенном собственном евклидовом подпространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  в  $\langle \mathcal{P}^3 \rangle^{(1)}$ :

$$-F_{(i)} = \mathbf{F} = \sum_{j=1}^t \mathbf{F}_j = \sum_{j=1}^t m_0 \cdot \mathbf{g}_j = m_0 \cdot \mathbf{g}, \quad (206A)$$

$$\mathbf{g} = \sum_{j=1}^t \mathbf{g}_j. \quad (207A)$$

Здесь принципиально то, что какие-либо  $\mathbf{F}_j$  могут являться силой тяготения (в собственном подпространстве  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$ ).

Аналогичным *геометрическим* образом суммируются частные векторные абсолютные гиперболические кривизны, задаваемые в одной и той же мировой точке:

$$\mathbf{k} = \sum_{j=1}^t \mathbf{k}_j. \quad (208A)$$

В любой точке мировой линии движения материального тела абсолютные кривизны суммируются ковариантно собственным силам и внутренним ускорениям. Как следствие этого, при тригонометрической согласованности частных кривизн, то есть при их тождественных собственных псевдоплоскостях, они как и углы имеют свойство алгебраической аддитивности.

Заметим, что для *сферической* кривизны аналогия этому проявляется, например, в оптической формуле Ньютона, которую можно применять последовательно, но каждый раз в какой-то определённой точке линии хода луча света:

$$1/R_1 + 1/R_t = 1/R_2,$$

где  $R_F$  — фокусное расстояние линзы или зеркала либо положительное, либо отрицательное. (При акте отражения светового потока плоским зеркалом, для которого  $R_F = \pm \infty$  ( $K_F = 0$ ), направление и знак кривизны меняются на противоположные, а её модуль не изменяется.)

Согласно (207A), *в конкретной точке мировой линии массы  $m_0$  коллинеарные внутренние ускорения (как и собственные силы) подлежат алгебраическому суммированию, а неколлинеарные — геометрическому евклидову суммированию*

как *абсолютизированные понятия*. В этом состоит принципиальное отличие характера суммирования (нерелятивистского) внутренних ускорений от характера суммирования (релятивистского) физических скоростей.

В абсолютном пространстве-времени Минковского  $\langle P^{3+1} \rangle$  согласно его структуре (см. гл. 1А), системе отсчёта Маха  $\tilde{E}_0$  формально соответствуют собственные подпространства  $\langle \mathcal{E}^3, (0) \rangle$  и  $\langle \mathcal{C}^1, (0) \rangle$ . Последние уже с вполне материальным объяснением могут в некотором смысле трактоваться как "абсолютное пространство" и "абсолютное время" Ньютона. Хотя истинно *абсолютным пространством* в такой трактовке является только  $\langle P^{3+1} \rangle$  в целом. Оно понимается как пространство, само по себе, с теми или иными свойствами и в отличие от относительных пространств никуда не вложено.

Особо отметим, что в СТО с точки зрения любого *галилеевски инерциального* наблюдателя  $N_j$  непрямолинейно (или ускоренно) абсолютно движущаяся в  $\langle P^{3+1} \rangle$  псевдodeкартова система отсчёта как *мгновенный базис* остаётся в том же инерциальном

$$\tilde{E}_m \subset \langle \tilde{E}_j \rangle.$$

качестве (Этот факт, в частности, использовался в гл. 5А и 7А.) Однако с точки зрения произвольно движущегося вместе с ней наблюдателя  $N_m$  эта система отсчёта  $\tilde{E}_m$  галилеевски неинерциальная. С математической позиции она есть гауссова криволинейная система координат. На этом основан *релятивистский дуализм* (терминология автора) в двойком описании ускоренных движений в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Отображение  $\tilde{E}_m \leftrightarrow \tilde{E}_m$  есть изоморфизм. В базисе  $\tilde{E}_m = \{\vec{x}, \vec{ct}\}$  координатная сетка имеет криволинейный характер, причём частично или полностью. Например, для гиперболического движения системы  $\tilde{E}_m$  в целом её собственную двумерную координатную сетку составляют декартовы прямолинейные оси  $x^{(m)}$  и гауссовы криволинейные оси — гиперболы  $\vec{ct}$  с их общим центром в точке  $O$  (рис. 1 А).

Ввиду гладкости функциональной связи между координатами в базисах  $\tilde{E}_m$  и  $\tilde{E}_m$  первые дифференциалы гауссовых криволинейных координат  $d\vec{x}_k$  и  $d\vec{ct}$  в  $\tilde{E}_m$  суть однородные линейные функции от первых дифференциалов  $dx_k^{(m)}$  и  $dct$  в  $\tilde{E}_m$ , или  $d\vec{u} = V_{(i)}^{-1} du^{(m)}$ . Скалярный элемент дуги мировой линии в

$\langle P^{3+1} \rangle$  в какой-либо точке  $M'$  вычисляется через его квадратичную форму двояко - либо в  $\tilde{E}_m$ , либо в  $\tilde{E}'_m$ :

$$dc\tau^2 = du^{(m)'} \cdot I^{\oplus} \cdot du^{(m)} = d\tilde{u}' \cdot \{V_{(i)'} \cdot I^{\oplus} \cdot V_{(i)}\} \cdot d\tilde{u} = d\tilde{u}' \cdot G_{(i)'} \cdot d\tilde{u}.$$

В обратном порядке матрица конгруэнтного преобразования  $V_{(i)}$  получается однозначно из метрического тензора путём его общего конгруэнтного представления:

$$G^{\oplus} = R' \cdot D^{\oplus} \cdot R = (\sqrt{D^{\oplus}} \cdot R) \cdot I^{\oplus} \cdot (\sqrt{D^{\oplus}} \cdot R) = V' \cdot I^{\oplus} \cdot V.$$

Как видим, *при переходе в ускоренные базисы исконная метрика базового пространства событий сохраняется.*

Применение гауссовых криволинейных координат даже в плоском пространстве-времени Минковского с целью анализа ускоренных движений со всей необходимостью ведёт к привлечению для его математического описания абсолютного тензорного исчисления Риччи. В мгновенном базисе  $\tilde{E}_m$

гауссовы криволинейные координаты имеют аффинную связность, определяемую в них же через переменный тензор  $G_{(i)'}^{\oplus}$  пространства-времени Минковского (или метрический тензор инерции). Последний действует как функция в каждой мировой точке  $M'$ . Существенно здесь то, что тензор кривизны Римана - Кристоффеля необходимо нулевой в силу того, что базовое пространство-время по сути плоское. Искривление координатной сетки в движущейся системе  $\tilde{E}_m$  происходит

строго *по отношению к наблюдателю*  $N_m$ , находящемуся всегда в центре мгновенного базиса. С его смещением в собственном базисе указанное искривление координат смещается точно также. (В точке нахождения наблюдателя  $N_m$  тензор тот же -  $I^{\oplus}$ .) С точки зрения *галилеевски инерциального наблюдателя*

$N_j$  никакого искривления координат в мгновенной системе  $\tilde{E}_m$  вообще не происходит; здесь местоположение наблюдателя  $N_m$  не имеет никакого значения. Например, движущийся ускоренно вместе с  $N_m$  прямой стержень так и воспринимается наблюдателем  $N_j$  как прямолинейный. Но при этом *неинерциальный наблюдатель*  $N_m$  может воспринимать его опосредованно в  $\tilde{E}_m$  как искривлённый объект. Описанный релятивистский эффект имеет чисто координатную природу. Каких-либо дополнительных механических напряжений от кажущегося искривления стержня в  $\tilde{E}_m$  не возникает. Ведь одни и те же *собственные силы* в любых системах отсчёта, по-



прежнему, определяются тождественно как абсолютные характеристики в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Симметричный метрический тензор  $G$  для представления квадратичной формы интервала как скалярного произведения первых дифференциалов определяется совершенно независимо через первые дифференциалы линейного элемента, выраженные в контравариантных и в ковариантных координатах:

$$\begin{aligned} dl^2 &= du_{con}' du_{cov} \equiv du_{cov}' du_{con} = du_{con}' \frac{du_{cov}}{du_{con}} du_{con} = du_{con}' G du_{con} \equiv \\ &\equiv du_{cov}' \frac{du_{con}}{du_{cov}} du_{cov} = du_{cov}' \hat{G} du_{cov}, \text{ где } \hat{G} = G^{-1}. \end{aligned}$$

В ускоренной системе отсчёта  $\tilde{E}_m$  действует искажённая псевдоевклидова геометрия Минковского с переменным метрическим тензором  $G_{(t)}$  в криволинейных координатах и с нулевым повсюду тензором кривизны Римана - Кристоффеля. Роль тензорного аналога абсолютного векторного ускорения в системе  $\tilde{E}_m$  выполняют символы Кристоффеля.

В процессе создания ОТО (с 1913г.) Эйнштейн пришёл к выводу, что метрика реального пространства-времени в присутствии поля тяготения в произвольно движущейся системе отсчёта  $\tilde{E}$  задаётся тоже двухвалентным симметричным тензором  $G^{\otimes}$ , при этом тяготение и инерция как тензоры локально неразличимы между собой (*принцип эквивалентности*). Это содержало существенное расширение закона о тождестве инерционной и тяготеющей масс. По Эйнштейну метрический тензор пространства-времени и приведенный тензорный потенциал обобщённого  $G$ -поля суть простые аналоги. Отсюда в ОТО неизбежно вытекало искривление реального пространства-времени и его более сложный - *псевдориманов* характер. Это привело к её *натуральной геометризации*. Гравитация стала геометрическим понятием.

Слияние в одном и том же качестве активной и пассивной гравитации означало, прежде всего, признание инерции и ускорения такими же относительными понятиями как движение и скорость. В этом проявился *общий принцип относительности Эйнштейна*. Свободно движущиеся системы отсчёта в ОТО стали как бы равноправны между собой. Это вылилось маргинально в широко известное и весьма по научному честное утверждение Эйнштейна о равноправии систем Коперника и

Птолемея. А именно метрический тензор в них имеет *локально* стандартную форму  $\mathbb{I}^{\oplus}$  в силу компенсации инерции и тяготения. Поэтому все физические законы сохраняют также стандартную форму.

Но, во-первых, здесь был явный отказ от *принципа* Маха, определившего инерцию абсолютно - в галилеевски инерциальной системе отсчёта  $\tilde{E}_0$ . Во-вторых, здесь нарушался *принцип соответствия*, так как при отсутствии активного гравитационного воздействия невозможно сделать вывод: в какой же по характеру системе отсчёта оказывается движущаяся материальная точка - галилеевски инерциальной или неинерциальной, как об этом судят в СТО по символам Кристоффеля.

Сразу же заметим, что на более простой путь обобщения теории относительности с дополнительным учётом поля тяготения и силовых полей иного рода как *материальных* явлений указывал Пуанкаре ещё в 1905г. Во второй половине XX века интерес к чисто *полевой* (негеометрической) концепции гравитации возрождается вновь. Впервые (1976 г.) эта концепция довольно обстоятельно была изложена Боулером в его известной фундаментальной учебной монографии. В ней он вовсе не стремится опровергнуть ОТО, но в предисловии осторожно замечает: "Поскольку физика - наука экспериментальная, не исключено, что в один прекрасный день чисто геометрический подход окажется неадекватным." Боулер последовательно развивает обобщение закона тяготения Ньютона и уравнения Пуассона для гравитации с учётом тех поправок, которые вносит именно СТО. Аналогией этому для него послужило соответствующее обобщение закона Кулона и уравнения Пуассона для электростатики при построении классической релятивистской электродинамики, где источником поля является сохраняющийся вектор электромагнитного тока. Принципиальное отличие заключается лишь в том, что применительно к гравитации источником поля принимается сохраняющийся тензор энергии-импульса (материи и поля). В итоге Боулер рассматривает тяготение как *классическое поле*, соответствующее специальным частицам - гравитонам со спином 2 (точнее 2 или 0). В такой *полевой релятивистской теории гравитации* (РТГ) базовое пространство-время Минковского сохраняет полностью координатно-описательное значение, как в СТО. Но псевдодекартовы системы координат, будучи

помещёнными в гравитационное поле, *деформируются* с точки зрения весьма удалённого галилеевски инерциального наблюдателя. В частности, с его точки зрения в гравитационном поле замедляется течение собственного времени.

С 80-х годов XX века появляются более решительные по изложению (а именно с полным отрицанием ОТО) публикации Логунова с рядом соавторов. Они были подытожены в фундаментальной монографии Логунова. В ней наряду с обстоятельным критическим анализом ОТО (с неопределённым, *псевдоримановым* искривлением пространства-времени) дана концептуально аналогичная указанной, но значительно более развитая по построению РТГ. Тяготение чётко отделено от инерции как совершенно иное и *материальное* понятие, определяемое именно в базовом пространстве-времени Минковского. Принцип эквивалентности не действует. Эта теория, вполне корректно обобщающая СТО в гравитационном поле, по сути - *релятивистская небесная механика* (если в терминологии строго следовать Лапласу).

Вернёмся к теории в версии Эйнштейна. Вследствие натуральной геометризации ОТО возникла её логическая неувязка с исходной СТО. Почему активное гравитационное воздействие (тяготение) в ОТО должно обязательно искривлять метрическое пространство-время, а априори эквивалентное ему пассивное гравитационное воздействие (инерция) подобного искривления в СТО не вызывает? Ввиду такого явного несоответствия между СТО и ОТО Эйнштейн принял концепцию, что инерция может эквивалентным образом локально искривлять пространство-время, как тяготение, и поэтому они на дифференциальном уровне неразличимы между собой. Отсюда следовала как бы неприменимость СТО к описанию движений в ускоренных системах отсчёта даже в отсутствие поля тяготения, что весьма странно!? Такая концепция, кстати, в полной мере отвечала позитивистской философии Маха и его склонности к римановой геометрии Вселенной. Поэтому, согласно Эйнштейну, СТО действует в ОТО только на инфинитиземальном уровне, а  $\langle P^{3+1} \rangle$  с преобразованиями Лоренца в нём всегда мгновенное и касательное в каждой мировой точке искривлённого пространства-времени (подобно касательной к кривой, самой по себе). Следовательно, система Маха  $\tilde{E}_0$  каждый раз какая-то

новая, не привязанная к чему-либо материальному, то есть надобность в ней в ОТО попросту отпадает.

В связи с той же антитезой отметим, что при дальнейшем развитии ОТО на основе принципа эквивалентности и натуральной геометризации прежде всего Гильбертом в 1915-1917 гг. в результате анализа им же впервые полученных общерелятивистских уравнений движения было установлено противоречие новой теории фундаментальным *интегральным* законам сохранения энергии-импульса и момента количества движения в замкнутой материальной системе. Эти законы сохранения в ОТО действуют только локально в касательном  $\langle R^{3+1} \rangle$ . Гильберт отметил это как "характерную черту ОТО" (цитата). По существу такое отклонение с математической точки зрения вызвано отсутствием в ОТО десятипараметрической группы движений, свойственной плоскому пространству-времени Минковского, вследствие трансформации последнего в поле тяготения в искривлённое псевдориманово пространство-время. Позже его знаменитая ученица Амали Эмми Нётер (1918г.) сформулировала фундаментальную теорему математической физики, связывающую интегральные законы сохранения движения непосредственно с параметрами симметрии базового метрического пространства-времени. Ввиду того что псевдориманово пространство-время неоднородно и неизотропно, в нём эти законы не могут соблюдаться принципиально. Поэтому в ОТО нужно было либо отказаться от интегральных законов сохранения движения, либо найти какие-нибудь модифицированные аналоги вышеуказанным сохраняющимся величинам в искривляемом гравитацией пространстве-времени. Первый путь обосновывал бы в ином — уже в космическом масштабе всё тот же *perpetuum mobile*. Второй путь неизбежно ведёт к дальнейшему чрезмерному усложнению самой теории тяготения.

В свою очередь, принцип эквивалентности, согласно Эйнштейну, постулирует неразличимость "поля инерции" и поля тяготения на локальном уровне как  $G^{\oplus} \equiv G_{(i)}^{\oplus} \equiv G_{(f)}^{\oplus}$  в силу их тождественной гравитационной природы. Но характер такого обобщённого G-поля ОТО математически определяется значимостью тензора кривизны Римана - Кристоффеля. Нулевой тензор кривизны отвечает отсутствию именно поля тяготения. С другой стороны, ненулевой тензор кривизны отвечает наличию реального поля тяготения. В первом случае при *любых* проявлениях только сил инерции степень свободы

функционального изменения метрического тензора как совокупности скалярных элементов значительно меньше, чем таковая во втором случае - при *любых* реальных проявлениях только сил тяготения. Рассмотрим это на дифференциально-геометрическом уровне.

\* \* \*

Риманово пространство, как известно, имеет инфинитиземально евклидову метрику. Но в силу его кривизны уже для вторых дифференциалов протяжённости в нём проявляются отклонения от евклидовой метрики, что функционально выражают символы Кристоффеля. Кроме того, римановы пространства в целом могут иметь значительно более разнообразные топологические формы, нежели евклидово пространство. Конкретное вещественное риманово пространство размерности  $m$  может быть вложено без изменения его внутренней геометрии и топологических свойств в некоторое евклидово надпространство  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ . Причём минимальный порядок вложения  $n_{\min}$  априори находится в интервале от  $m$  до  $\infty$ .

Особо отметим то, что характеристика  $n_{\min}$  определяется в совокупности внутренней геометрией и топологией риманова  $m$ -пространства. Например, двумерная псевдосфера Бельтрами (гл. 6А) есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное цилиндру (без оснований). Она имеет значение  $n_{\min}=3$ . С другой стороны, поверхность Лобачевского-Больяи есть риманово 2-пространство постоянной отрицательной кривизны, топологически эквивалентное аффинной плоскости. Она имеет  $n_{\min}>3$ . Чтобы её вложить и описать в каком-то  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  (*обобщенная задача Бельтрами*), значение  $n_{\min}$  должно быть не менее 4-х. Возможно, что с этой целью её нужно представить как закрученную двумерную поверхность с главными радиусами кривизны «+ R» и «- R» (псевдосферу с аффинной топологией). Задача Бельтрами обобщается аналогично и дальше при  $m > 2$ . Но она относилась только к евклидову надпространству.

В более подходящем тут псевдоевклидовом метрическом надпространстве  $\langle P^{m+1} \rangle$   $m$ -поверхность Лобачевского - Больяи отображается в целом изометрично на верхнюю часть гиперболоида II Минковского при  $n_{\min} = m + 1$ . В этом же надпространстве изометрично в целом отображается  $m$ -

псевдосфера Бельтрами на гиперboloид I Минковского (гл. 6А). В свою очередь, "m-гофра" есть риманово пространство нулевой кривизны и топологически эквивалентное аффинному m-пространству. Она отображается изометрично в целом на  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$  или на  $\langle P^n \rangle$ , то есть при  $n_{\min} = m$ .

Но классическая *общая риманова геометрия* имеет чётко выраженный дифференциальный характер, определяемый изначально через метрический тензор  $G^{\oplus}$  или  $G^{\ominus}$  как матричную функцию точечного элемента (псевдо)риманова пространства. Это есть по изначальной своей сути внутренняя геометрия в малом. В таком ракурсе общая риманова геометрия существенно отличается от *однородных геометрий в целом*, в которых особое значение имеют понятия: "группы движений", "свобода движения фигур", "топологические свойства". К таким целостным и однородным геометрическим системам относятся, например, евклидова и псевдоевклидова геометрии, эллиптическая геометрия Римана, гиперболическая геометрия Лобачевского — Больяи, в том числе изоморфная ей геометрия гиперboloида II. Понятие "вложимость" по отношению к (псевдо)евклидову надпространству для (псевдо)риманова метрического пространства в целом с неопределённой топологией не имеет какого-либо смысла. Это, в частности, сказывается также на неопределённости для него значения  $n_{\min}$ . Но если ограничиться изучением только какой-либо топологически аффинно-эквивалентной *области* (псевдо)риманова m-пространства, то тогда значение  $n_{\min}$  будет всецело определяться его локальными дифференциально-геометрическими свойствами.

Двухвалентный симметричный тензор содержит в себе максимум  $k = m \cdot (m+1) / 2$  независимых друг от друга функциональных скалярных элементов  $g_{ij}$ . Поэтому рассматриваемая область риманова m-пространства всегда вложима в  $\langle \mathcal{E}^k \rangle$  без изменения своей внутренней геометрии. Далее зададим аналитически внешним образом указанную область риманова m-пространства в  $\langle \mathcal{E}^n \rangle$ , где  $n \geq m$ , в каком-либо декартовом базисе  $\hat{E}_1$  через  $n \times 1$  радиус-вектор и соответственно с m степенями свободы движений-трансляций. Пусть каждой степени свободы этого радиус-вектора отвечает гауссова криволинейная координата  $\tilde{\xi}_i$  риманова

$m$ -пространства. Тогда имеется функциональное отображение  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi)$ .

В каждой точке указанной области риманова  $m$ -пространства существует непрерывно дифференцируемая в ней матрица Якоби  $d\mathbf{u}/d\xi$ . Согласно Гауссу и Риману, внутренняя геометрия этой области определяется непрерывно функционально через внутреннюю гомо-мультипликацию — метрический тензор:

$$G^{\oplus} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \right)' \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \quad (\det G^{\oplus} > 0),$$

$$\|d\mathbf{u}\|_E^2 = d\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{u} = d\xi' \cdot G^{\oplus} \cdot d\xi.$$

В свою очередь, для псевдориманова  $m$ -пространства в  $\langle P^{n+q} \rangle$ , где  $n + q \geq m$ , имеется псевдоаналогия:

$$G^{\oplus} = \left( \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \right)' \cdot I^{\oplus} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \quad (\text{причём при } q = 1 \det G^{\oplus} < 0),$$

$$\|d\mathbf{u}\|_p^2 = d\mathbf{u}' \cdot I^{\oplus} \cdot d\mathbf{u} = d\xi' \cdot G^{\oplus} \cdot d\xi.$$

Для полной функциональной независимости  $k$  элементов симметричного тензора  $G^{\oplus}$  необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $n \geq k$ . При  $n < k$  риманово  $m$ -пространство частично уплощается, в том числе полностью при  $n = m$  в евклидово  $m$ -пространство. Наоборот, при  $n > k$  Theorema Egregium Гаусса всегда позволяет понизить порядок вложения ограниченной области риманова  $m$ -пространства, по крайней мере, до  $n_{\min} = k$ , используя операцию изгибания. Например, регулярный фрагмент любой кривой, самой по себе ( $m = 1$ ), изгибанием всегда можно трансформировать в отрезок евклидовой прямой ( $n = n_{\min} = 1$ ). Аналогично топологически аффинно-эквивалентную и регулярную область произвольной римановой поверхности ( $m = 2$ ) изгибанием всегда можно вложить в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle$  без изменения её внутренней геометрии ( $k = n_{\min} = 3$ ). Это относится и к области поверхности Лобачевского - Больяи, но не к ней в целом, что было доказано впервые Гильбертом.

Метрический тензор инерции  $G_{(i)}^{\oplus}$  как функция точечного элемента  $m$  псевдориманова пространства имеет  $n_{\min} = m = 4$  степени свободы для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В минимальном *плоском* пространстве вложения  $\langle P^{3+1} \rangle$  в гауссовых криволинейных координатах он задаёт искажённую псевдоевклидову геометрию Минковского. (Отметим, что в обычных — псевдодекартовых координатах здесь же он

попросту постоянен.) С другой стороны, метрический тензор  $G^{\otimes}$  псевдориманова четырёхмерного пространства  $\langle R^{3+1} \rangle$  имеет  $n_{\min} = k = 4 \cdot 5/2 = 10$  степеней свободы ( $> m = 4$ ) для скалярных элементов  $g_{ij}$ . В гауссовых криволинейных координатах он задаёт псевдориманову геометрию, например в минимальном метрическом пространстве вложения  $\langle P^{c+d} \rangle$ , где  $c + d = 10$ ,  $c \geq 3$ . В *первом* случае, для которого  $n_{\min} = m = 4$ , тензор кривизны Римана-Кристоффеля обязательно нулевой. Во *втором* случае, для которого  $n_{\min} = k = 10 > m$ , он никак не может быть нулевым из-за кривизны псевдориманова пространства, вложенного в  $\langle P^{c+d} \rangle$ . Никаким выбором локального базиса нельзя изменить риманову кривизну и нельзя ненулевой тензор кривизны сделать нулевым и наоборот. Поэтому, если принимается как базовый принцип Маха, то принцип эквивалентности в *общем случае* не реализуется. (При свободном движении материальной точки в поле тяготения *собственные векторные силы тяготения и инерции* полностью компенсируют друг друга, согласно третьему закону механики Ньютона и закону о тождестве инерционной и тяготеющей масс. Но поле тяготения и "поле инерции" даже локально в общем случае не компенсируют друг друга.) Отметим здесь то обстоятельство, что так называемое *эффективное псевдориманово пространство-время*, используемое в РТГ для упрощённого координатного описания движения материи в силу его аффинно-эквивалентной топологии имеет тот же минимальный порядок вложения  $n_{\min} = 10$ .

\* \* \*

Однако для простейших, *неискривленных* форм поля тяготения и при этом весьма умозрительных (откуда, видимо, возникла идея принципа эквивалентности) нетрудно локально отождествить проявление активной гравитации (тяготения) и пассивной гравитации (инерции). Например, свободное *прямолинейное* физическое движение под действием стационарного однородного поля тяготения математически тождественно гиперболическому абсолютному движению в  $\langle R^{3+1} \rangle$  под действием постоянной *тангенциальной* собственной силы (рис. 3А). Свободное *круговое* физическое движение под действием стационарного сферически симметричного поля тяготения математически тождественно псевдовинтовому



абсолютному движению в  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием постоянной нормальной собственной силы.

Проиллюстрируем сказанное на ранее рассмотренном примере замедления собственного времени равномерно ускоренного движения, отображённого на рис 3А (гл 5А). Применим дифференциальную форму гиперболического движения (92 А) как локально универсальную для *любых* ускоренных прямолинейных физических движений. С точки зрения относительно покоящегося инерциального наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$ , согласно СТО, имеем:

$$\left. \begin{aligned} d \operatorname{ch} \gamma &= d \frac{dct}{dct} = g_{(t)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dA/E_0, \\ \frac{dct}{dct} &= \frac{dt}{dt} = \operatorname{ch} \gamma = 1 + A/(m_0 \cdot c^2) = 1 + A/E_0 \end{aligned} \right\} \quad (209A)$$

(См. также аналогичные более общие скалярные формулы (162А) и (171 А), в том числе для *непрямолинейных* ускоренных физических движений.) То же самое замедление собственного времени  $\hat{t}$  с точки зрения неинерциального наблюдателя  $N_m$  *внутри* космического корабля можно трактовать по Эйнштейну локально так, как будто бы наблюдатель находится в эквивалентном стационарном поле тяготения с напряжённостью  $g_{(t)} \equiv g_{(t)}$ .

$$\left. \begin{aligned} d \frac{dct}{dct} &= g_{(t)} d\chi/c^2 = F d\chi/(m_0 \cdot c^2) = dE_{(t)}/E_0 = d(-P)/c^2, \\ \frac{dct}{dct} &= \frac{dt}{dt} = 1 + E_{(t)}/(m_0 \cdot c^2) = 1 + E_{(t)}/E_0 = 1 + (-P)/c^2 > 1. \end{aligned} \right\} \quad (210 A)$$

В РТГ поле тяготения определяется и действует именно в плоском  $\langle P^{3+1} \rangle$  как базовом пространстве-времени. Но при математическом описании в нём движения материи (в том числе света) поле тяготения как бы *деформирует* координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$ , изменяя его метрику. Например, формула (210А) в случае простейшего эквивалентного поля тяготения даёт соответствующее ему изменение масштаба времени. Если координаты остаются (полу)геодезическими, то деформированное  $\langle P^{3+1} \rangle$  преобразуется вместе с осями координат в искривлённое *эффективное псевдориманово пространство-время*. Понятно, что топология этих пространств по сути одна и та же - топология аффинного пространства.

Формально устранив деформирующее воздействие поля тяготения на координаты, мы также устраним и это *кажущееся* искривление пространства-времени. В результате приходим к описанию движения в исконном  $\langle P^{3+1} \rangle$  под действием силы тяготения, как и любой иной собственной силы. В *относительной* трактовке такие движения рассматривались в гл. 7А. Все расчёты и оценки в сферически симметричном поле тяготения значительно упрощаются, если при этом гравитационный потенциал  $P$  в порядке аппроксимации принимается *скалярной* характеристикой, как в вышеуказанном примере (210А). Пусть тот же скалярный потенциал отвечает именно относительно неподвижной в  $\tilde{E}_1$ , некоторой астрономической массе  $M_0$ . Для реализации такого подхода примем два следующих условия.

1. Система отсчёта  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром астрономической массы  $M_0$ , принадлежит множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$  галилеевски инерциальных систем, задаваемых системой Маха  $\tilde{E}_0$ .
2. Движение материи в поле тяготения астрономической массы  $M_0$  описывается именно в  $\tilde{E}_1$  в базовом пространстве-времени Минковского.

Центр базиса  $\tilde{E}_1$  удобно расположить в центре астрономической массы  $M_0$ , где собственный гравитационный потенциал последней нулевой из-за отсутствия тяготения. (Последнее было доказано ещё в XVIII веке Кавендишем.) Например, система  $\tilde{E}_1$ , связанная с центром массы Солнца (система Коперника), с довольно высокой степенью точности может считаться галилеевски инерциальной системой отсчёта и принадлежать множеству  $\langle \tilde{E}_j \rangle$ .

В связи с этим покажем, что известные наблюдательные *общерелятивистские* эффекты, так или иначе вызываемые полем тяготения Солнца, объясняются *на элементарном уровне* на основе СТО и теории тяготения Ньютона. При этом в расчётах дополнительно учитывается формальным образом вышеуказанный *эйнштейнов эффект замедления собственного времени в поле тяготения*. Обсуждаемые здесь общерелятивистские эффекты рассматриваются с точки зрения удалённого наблюдателя  $N_1$  в  $\tilde{E}_1$  как бы вне поля тяготения. Такая аппроксимация даёт первый порядок точности по

гравитационной постоянной, что пока только и измеряемо при реальных наблюдениях.

Из (210А) следует приближённая формула, выражающая влияние *скалярного* гравитационного потенциала на течение собственного времени:

$$\frac{d\dot{\tau}_1}{dct_2} = [1 + (-P_2)/c^2]/[1 + (-P_1)/c^2] \approx 1 + [(-P_2) - (-P_1)]/c^2. \quad (211 \text{ A})$$

Из неё видно, что собственное время  $\dot{\tau}$  течёт медленнее в той точке, где отрицательный потенциал меньше. При  $P_1 = 0 = \max$  имеем, что  $\dot{\tau}_1 = t$  - координатное время в  $\vec{E}_1$ . Подставив в (210А) значение ньютонова гравитационного потенциала Солнца, получаем для околосолнечного пространства известную и довольно точную оценку:

$$d\dot{\tau} = dct \cdot (1 + fM_\odot/r \cdot c^2) \approx dct \cdot (1 - fM_\odot/r \cdot c^2). \quad (212 \text{ A})$$

В ОТО и в РТГ имеется аналогичная *тензорная* оценка замедления собственного времени в поле тяготения через угловой скалярный элемент метрического тензора псевдориманова пространства-времени (реального и эффективного):

$$\frac{d\dot{\tau}}{dct} = \sqrt{-g_{44}} \approx 1 - (-P)/c^2 < 1,$$

$$-g_{44} = 1 - (-2P)/c^2 + \dots < 1.$$

Простейшее и наглядное отображение *активной* гравитации таково, что поле тяготения в окрестности каждой мировой точки попросту деформирует координатную сетку в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Например, в стационарном поле тяготения координата  $\vec{ct}$  как бы растягивается. В свою очередь, локальные наклоны мировых линий по отношению к  $\vec{ct}$  как бы уменьшаются, в том числе и наклон изотропного конуса. Но геометрический и физический смысл последнего сохраняется. С учётом этого локальная скорость распространения света, как и других электромагнитных волн (частиц), в поле тяготения *с точки зрения удалённого наблюдателя*  $N_1$  как бы уменьшается следующим образом:

$$\dot{c}/c \approx 1 - (-P)/c^2 < 1. \quad (213 \text{ A})$$

Другой известный и наблюдаемый на Земле общерелятивистский эффект - "красное смещение" спектра

излучения Солнца объясняется по Эйнштейну замедлением частоты электромагнитных колебаний на поверхности Солнца, согласно её значительному отрицательному гравитационному потенциалу:

$$\dot{v}/v = \frac{dct}{dct} \approx 1 - f \cdot M_0 / r \cdot c^2. \tag{214 A}$$

На величину отклонения, конечно, оказывает влияние эффект Допплера (гл. 7А). Более точная оценка, приближающаяся к вышеуказанной, получается для полюсов вращения Солнца. (Земным потенциалом здесь, конечно, пренебрегают как сравнительно небольшим.)

\* \* \*

В качестве заключительного примера рассмотрим в базисе  $\check{E}_1$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  элементарную трактовку самого известного наблюдательного общерелятивистского эффекта - искривления светового луча в поле тяготения Солнца. Данное искривление максимально и обнаружимо при наблюдениях на Земле, когда световой луч от какой-либо звезды (с известными координатами на небосводе) проходит при полном солнечном затмении вблизи солнечного диска. Оно определяется по отклонению траектории светового луча и соответственно угловой координаты звезды. О влиянии *абберации* на наблюдение звёзд указано в гл. 7А. Свою лепту в искажение координат звезды (чем она ближе к нам) вносит *параллакс*. Но эти поправки малосущественны в сравнении с рассматриваемым гравитационным эффектом.

Для *элементарной оценки* данного эффекта можно принять, что земной наблюдатель  $N_1$  физически неподвижен в системе  $\check{E}_1$ , связанной с центром массы Солнца. Искривление светового луча при прохождении вблизи Солнца обусловлено гравитационным притяжением фотонов как световых материальных частиц с собственной массой  $m_1$  в  $\check{E}_1$ . Принципиальная особенность такого вида частиц, как известно, заключается в том, что они имеют нулевую массу покоя. Поэтому их собственная масса всегда определяется только в состоянии движения по изотропному конусу по формуле Планка - Эйнштейна. Здесь на изотропном конусе каким-то загадочным образом для массы

фотона реализуется раскрытие неопределённости типа  $m_L = m_0 \cdot \operatorname{ch} \gamma = 0 \cdot \infty$ .

Пусть материальная точка вообще массой  $m$  движется относительно астрономической массы  $M_0$  с мгновенной скоростью  $v$  под углом  $\varepsilon$  к радиус-вектору  $\mathbf{r}$ , соединяющему центр массы  $M_0$  и точку  $m$ . Все эти характеристики выражаются в  $\tilde{E}_1$ , связанной с центром массы  $M_0$ . Собственная сила тяготения  $F$  массы  $m_0$  к массе  $M$  есть инвариант в любых галилеевски инерциальных системах отсчёта из множества  $\langle \tilde{E}_j \rangle$ , в том числе в  $\tilde{E}_1$  и в  $\tilde{E}_m$ . Если  $M_0 \gg m_0$ , то материальная точка  $m$  в каждый момент времени совершает локально псевдовинтовое движение в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с абсолютным псевдоевклидовым радиусом  $R$ . Согласно законам тяготения Ньютона и динамики СТО, в  $\tilde{E}_m$  имеем:

$$\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{e}_\beta = (f \cdot M \cdot m_0 / r^2) \cdot \mathbf{e}_\beta = (m_0 \cdot c^2 / R) \cdot \mathbf{e}_\beta = \overset{\perp}{F} \cdot \mathbf{e}_\eta + \bar{F} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \quad (215 A)$$

Здесь используется разложение собственной силы и внутреннего ускорения на две взаимно-ортогональные проекции - нормальную и тангенциальную (см. гл. 7A), а также формула (205A). В  $\tilde{E}_1$  имеем:

$$\overset{\perp}{F} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m / r^2) = m_0 \cdot c^2 / \bar{R} = m \cdot v^2 / \rho,$$

$$\bar{F} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m / r^2) = m_0 \cdot c^2 / \bar{R} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Тангенциальная проекция вызывает ускорение движения материальной точки  $m$  вдоль вектора скорости  $v$ . Но для световой частицы (фотона) она только изменяет его массу  $m_L$  в процессе движения: либо увеличивает, либо уменьшает её в зависимости от направления этой проекции по отношению к вектору  $v$ . Понятно, что на искривление траектории светового луча эта проекция никак не влияет. Напротив, нормальная проекция вызывает искривление траектории светового луча локального радиуса  $\rho$ . В связи с этим конкретно для фотонов формулы для указанных проекций силы тяготения приобретают вид:

$$\overset{\perp}{F} = \sin \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = m_L \cdot c^2 / \rho = E_L / \rho \quad (\rho \approx R, \text{ так как } v \approx c),$$

$$\bar{F} = \cos \varepsilon \cdot (f \cdot M_0 \cdot m_L / r^2) = c \cdot \frac{dm_L}{dt} = \frac{dE_L}{dct},$$

где  $m_{\Gamma} = h\nu/c^2$  — масса фотона в состоянии движения.

В теории гравитационного искривления луча света как вспомогательный параметр применяется расстояние «b» от центра массы  $M_0$  до точки пересечения его двух асимптот:  $b \approx r \cdot \sin \varepsilon$ . С учётом значения этого параметра оценка искривления луча света вычисляется в дифференциальной и интегральной формах в виде:

$$d\delta_1 \approx dl/\rho = d(-r \cdot \cos \varepsilon)/\rho = b d(-\operatorname{ctg} \varepsilon)/\rho = [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = \{(-P)/c^2\} d\varepsilon,$$

$$\delta_1 \approx [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \int_0^{\pi} \sin \varepsilon d\varepsilon = 2f \cdot M_0 / (b \cdot c^2) = 2 \cdot (-P_{\max}) / c^2.$$

Именно такая первоначальная оценка была получена Эйнштейном в 1911г., а исторически впервые она была вычислена, как известно, Зольднером ещё в 1801 г. Фактически эта оценка следует из теории тяготения Ньютона. Впоследствии в 1915 г. в связи с разработкой ОТО Эйнштейн дал общерелятивистскую поправку к искривлению луча света в слабом сферически-симметричном стационарном поле тяготения. При этом теоретическое искривление луча оказалось в два раза больше.

Оценку второго слагаемого для искривления светового луча осуществим, применяя аналогию с распространением света в оптической среде с переменным показателем преломления и соответственно с его переменной скоростью. Здесь мгновенный угол падения образуется вектором скорости света  $\mathbf{v}$  и радиус-вектором  $\mathbf{r}$ . До их ортогональности (в перигелии) этот угол равен  $\varepsilon$ , а затем он равен  $(\pi - \varepsilon)$ . В первой части траектории скорость света уменьшается, а во второй её части она увеличивается, согласно (212А) и (213А). По закону Снеллиуса это интерпретируется математически и физически как *дополнительное* искривление светового луча в сторону центра массы  $M_0$ :

$$\sin \varepsilon / \sin (\varepsilon - d\delta_{II}) = \dot{c} / (\dot{c} - d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon < \pi/2,$$

$$d\delta_{II} = 0, d\dot{c} = 0 \leftrightarrow \varepsilon = \pi/2,$$

$$\sin (\pi - \varepsilon) / \sin [(\pi - \varepsilon) + d\delta_{II}] = \dot{c} / (\dot{c} + d\dot{c}) \leftrightarrow \varepsilon > \pi/2;$$

$$d\delta_{II} = \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c}) / \dot{c} \approx \operatorname{tg} \varepsilon d(\mp \dot{c}) / c \approx$$

$$\approx \operatorname{tg} \varepsilon d(f \cdot M_0 \cdot \sin \varepsilon) / (b \cdot c^2) = [f \cdot M_0 / (b \cdot c^2)] \cdot \sin \varepsilon d\varepsilon = \{(-P)/c^2\} d\varepsilon = d\delta_1.$$

Отсюда следует, что  $\delta = \delta_I + \delta_{II} = 4f \cdot M_\theta / (b \cdot c^2) = 4 \cdot (-P_{\max}) / c^2$  - значение, впервые *через абсолютное тензорное исчисление* теоретически предсказанное Эйнштейном в 1916 г. и до сих пор принятое как лучшая оценка данного эффекта. Теми же *элементарными средствами* и на основе оригинального подхода Боулера объясняется известная небольшая общерелятивистская поправка Эйнштейна к смещению перигелия Меркурия.

\* \* \*

Как установил Фок, предсказания ОТО для общерелятивистских эффектов в Солнечной системе, строго говоря, неоднозначны. А именно они зависят от задаваемых координатных условий. При изменении начального базиса эти эффекты изменяются нековариантно. Эйнштейн для однозначности такого рода оценок весьма искусственно рассматривал эти эффекты в слабом стационарном поле тяготения, фактически как бы вложенном в пространство-время Минковского. В РТГ и в упрощённом скалярном варианте, изложенном выше, это делается вполне естественным и однозначным образом

Как видно из приведённых выше аргументов, основная версия ОТО о математически произвольном - псевдоримановом искривлении метрического пространства-времени в некотором G-поле, объединяющем инерцию и тяготение на основе принципа эквивалентности, является весьма спорной и противоречивой. Дальнейшее развитие теории относительности и её приложений в космологии показало, что эта версия без существенной на то необходимости значительно усложнила теоретическую картину мироздания, придав ей к тому же неопределённость в выводах и предсказаниях.

С учётом этих обстоятельств с середины XX века оживился интерес к концептуально иным принципам построения релятивистской небесной механики. Выходят в свет фундаментальные публикации, в которых развивается *релятивистская теория гравитации* (РТГ) в базовом пространстве-времени Минковского. В этой общей теории источником поля тяготения является сохраняющийся тензор энергии-импульса материи (включая и само материальное поле). Формально в РТГ в связи с искажающим влиянием

поля тяготения на метрику для математического описания движения применяется *эффективное псевдориманово пространство-время* с той же аффинно-эквивалентной топологией (при сохранении геодезических координат).

Как же последнее можно трактовать реально *физически*? Ведь именно благодаря такому искажению в РТГ объясняются общерелятивистские эффекты, выходящие как бы за рамки СТО. Для этого, на наш взгляд, наиболее рационально вначале обратиться к остающемуся неизменным и в общей теории закону сохранения энергии. Тогда простым логическим путём приходим к выводу, что обсуждаемые общерелятивистские эффекты в Солнечной системе имеют чисто координатно-описательную природу, но теоретически - с точки зрения галилеевски инерциального наблюдателя, находящегося как бы *вне поля тяготения*.

Оценим, например, эффект "красного смещения" спектра излучения Солнца в его собственном поле тяготения с фундаментальной позиции закона сохранения энергии Гельмгольца в его квантово-механической трактовке:

$$h\nu + E_{(f)} = h\nu - (-P) \cdot m_l = h\dot{\nu} < h\nu, \quad (216 A)$$

где  $m_l = h\nu/c^2$  - масса фотона в движении по формуле Планка - Эйнштейна. Откуда далее имеем:

$$h\nu \cdot [1 - (-P)/c^2] \approx h\dot{\nu}, \text{ или } \nu \cdot [1 - (-P)/c^2] = \dot{\nu}.$$

Конечный результат такой же, какой даёт вышеизложенный упрощённый скалярный подход, но физическая картина явления вырисовывается совершенно иная. В такой непосредственной трактовке эффекта излучение на поверхности Солнца, то есть в сильном поле тяготения, имеет *исходную* частоту (как например на Земле или вообще вне поля тяготения). Но затем эта частота уменьшается по мере удаления фотонов от Солнца за счёт преодоления его отрицательного гравитационного потенциала. Если допустить, что наблюдатель и источник фиксируемого излучения в данном случае меняются местами, то, согласно принципу относительности, наблюдатель теоретически зафиксирует наоборот - "синее смещение" спектра излучения источника на Земле. Это вовсе не означало бы какой-то локальный эффект ускорения времени на Земле. *Аналогичную трактовку допускает исходная формула (209А), если для неё также принять замедление собственного времени материальной точки (в СТО) как прямое следствие*



относительного уменьшения ее "энергетического потенциала" в состоянии относительного покоя (с точки зрения опять-таки инерциального наблюдателя  $N_1$  в  $\check{E}_1$ ).

Следовательно, сильное гравитационное поле Солнца, сквозь которое происходит восприятие общерелятивистских эффектов даже земным наблюдателем, находящимся в сравнительно слабом поле, можно физически уподобить некоторой гравитационной линзе. Вообще же оно может либо ускорять, либо замедлять фиксируемые события и, конечно, исказить пространственные координаты в зависимости от разности гравитационных потенциалов в мировых точках наблюдателя и фиксируемого события. (В специальной научной литературе понятие "гравитационная линза" стало использоваться довольно широко.) Реальное движение материи, совершаемое в гравитационном поле в  $\langle P^{3+1} \rangle$  по законам кинематики и динамики СТО под действием силы тяготения Ньютона, воспринимается наблюдателем  $N_1$  вне этого поля сквозь вышеуказанную гравитационную линзу с общерелятивистским искажением, но без изменения топологии пространства-времени. В поле тяготения по месту события общерелятивистского искажения псевдодекартовых координат не происходит. Поэтому локальное математическое описание движения, реставрированное от искажающего влияния поля тяготения, не должно выходить за рамки СТО (гл. 10А).

*Такая интерпретация отличается от принятой трактовки тем, что локальное замедление собственного времени в поле тяготения заменяется на его внешне воспринимаемое относительное замедление. Сам по себе гравитационный потенциал никак не влияет ни на течение локального собственного времени, ни на какие-либо процессы; на них влияет именно различие потенциалов в точках события и его наблюдения. (Ситуация аналогична имеющейся в СТО, поэтому и здесь возможен "парадокс близнецов", но в гравитационном варианте.)*

В теории искривления светового луча в поле тяготения Солнца составляющая  $\delta_I$  является фактической. Напротив, составляющая  $\delta_{II}$  является относительной. На самом деле локально никакого дополнительного искривления светового луча в поле тяготения в  $\langle P^{3+1} \rangle$  нет. Но его фиксирует координатно земной наблюдатель  $N_1$ , находясь в ослабленном поле тяготения, сквозь гравитационную линзу. (Например, если смотреть на

траекторию прямого луча света от обычного прожектора в атмосфере сквозь какую-нибудь оптическую линзу, то мы зафиксируем её координатное искривление, чего на самом деле реально нет.)

Аналогично эйнштейново снижение скорости света в поле тяготения, согласно (213 А), есть подобный относительный феномен, производный от наблюдаемого вне поля тяготения уменьшения частоты колебаний световых волн. Пропорционально этому как бы уменьшается по отношению к оси  $\vec{c}^{(1)}$  наклон изотропного конуса и наклоны мировых линий движения материи, проходящих через одну и ту же мировую точку пространства-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Все материальные процессы в её окрестности замедляются также *кажущимся* образом (как, например, происходит лоренцево сокращение). С квантово-механической точки зрения пропорционально этому замедляется частота колебаний волн Де Бройля, связанных с движущейся материальной точкой:

$$\dot{\nu} = \dot{c}/\lambda = (\dot{c}/c) \cdot \nu.$$

В вышеизложенном подходе СТО, гравитация и квантовая механика по *энергетическому* влиянию на течение времени и частоту колебаний удивительным образом согласуются между собой.

С другой стороны, свет распространяется в космическом вакууме независимо от потенциала поля тяготения с одной и той же локальной координатной скоростью «с», равной масштабному коэффициенту Пуанкаре (гл. 1А). Разумеется, она как *константа* выражается здесь в каком-либо псевдодекартовом (галилеевски инерциальном) базисе. Именно это обуславливает в РТГ псевдоевклидову метрику базового пространства-времени в поле тяготения. Принципиально невозможно по измеренному каким-либо образом значению локальной координатной скорости света в конкретной мировой точке выявить в ней абсолютный гравитационный потенциал, равно как и не обнаружить в ней же абсолютное физическое движение. (Это и есть по существу *общий принцип относительности* в РТГ.) В свою очередь, эйнштейнова эффективная скорость света фиксируется сторонним наблюдателем  $N_1$ , находящимся как бы вне поля тяготения или в слабом поле.

В РТГ в отличие от ОТО имеется *принципиальная* возможность устранить общерелятивистскую деформацию координат, или

вышеуказанное эффективное искривление пространства-времени, пусть даже кажущееся. Тем самым реставрируются исконные релятивистские законы движения материи в базовом пространстве-времени Минковского, но теперь ещё и в поле тяготения.

РТГ и ОТО дают, как правило, тождественные оценки общерелятивистских эффектов со степенью точности первого порядка малости по гравитационной постоянной. Следовательно, обоснование новой концепции лежит глубже, а именно в соблюдении ею базовых научно-философских принципов. К одному из них следует отнести *принцип максимально возможной простоты и наглядности в теоретических построениях*, или *удобства* в смысле Пуанкаре. Говоря, что "выбор геометрии есть вопрос соглашения" (цитата), Пуанкаре, конечно, имел в виду соображения простоты интерпретации геометрии реального Мира, но только в пределах наблюдаемой части Вселенной — Мегалактики. Всё далее неё остаётся *практически непознаваемым* и относится, по меткому выражению известного математика Бриллиэна, к области научной фантастики.

Первый великий опыт Гаусса (как руководителя астрономической обсерватории в Гёттингене) со своими учениками по измерению в земных условиях суммы углов макротреугольника и все последующие такого рода наблюдения, строго говоря, могли относиться только к экспериментальному познанию геометрии реального Мира в малом. Каких-либо достаточно серьёзных доказательств искривления базового пространства-времени со стороны именно практической астрономии и астрофизики представлено так и не было. До сих пор при составлении звёздных и галактических карт окружающей Вселенной астрономы используют обычное евклидово пространство, или трёхмерный срез базового пространства-времени Минковского. Евклидово пространство применяется при расчётах траекторий небесных объектов и космических аппаратов в Солнечной системе. Однако при наблюдении этих объектов *во времени* как релятивистские, так и общерелятивистские эффекты в случае их значимости, конечно, должны учитываться. Все известные общерелятивистские и космологические эффекты нашли убедительное объяснение в рамках той же РТГ. Окончательную точку в научном споре между сторонниками ОТО и РТГ можно будет поставить *апостериори*, например, по результатам эксперимента с поведением гироскопа на космической орбите при его

свободном движении в поле тяготения. Согласно ОТО, гироскоп сохраняет ориентацию по закону параллельного переноса вектора в псевдоримановом пространстве-времени и в такой системе не прецессирует. Согласно РТГ, гироскоп в галилеевски неинерциальной системе должен прецессировать относительно звёздной системы Вселенной (системы Маха). В свою очередь, классическая гиперболическая неевклидова геометрия Лобачевского - Больши заняла своё достойное место в релятивистской кинематике и динамике, а также в ряде других областей физики.

Однако здесь нужно особо отметить, что в попытках применения релятивистской небесной механики в космологии необходимо, конечно, учитывать то обстоятельство, что «с», «f» и «h» (см. выше) чисто *гипотетически* приняты константами во Вселенной. По крайней мере, это можно только предполагать (и то с необходимым обоснованием) в масштабах поддающейся практическим наблюдениям Мегалактики. Абсолютно надёжными константами являются только сакраментальные математические числа «π», «ω», «e». К настоящему времени имеется множество общерелятивистских теорий, базирующихся в конечном итоге на концепции или искривлённого, или плоского пространства-времени. Как правило, такие теории вносят какие-либо уточнения или дополнения соответственно либо в ОТО, либо в РТГ. В этих теориях общерелятивистские эффекты в Солнечной системе в первом порядке приближения по гравитационной постоянной имеют те же или несколько уточнённые значения. (Одним из наиболее известных примеров является тензорно-скалярная теория Дикке, которая применима, в принципе, как в варианте ОТО, так и в варианте РТГ.) Это лишний раз говорит о том, что теоретическое обоснование данных эффектов, само по себе, никак не может сводиться к экспериментальному доказательству ОТО, РТГ или какой-либо иной общей теории ( в том числе и квантовой). Основная концепция ОТО, выдвинутая в 1916 г Эйнштейном, сводится к постулату, что все физические законы в любых свободно движущихся системах отсчёта имеют в локальной области одну и ту же форму, причём такую, которая отвечает метрическому тензору I. Главное достоинство ОТО заключается, как известно, в том, что в ней нет необходимости вводить каким-либо образом галилеевски инерциальные системы отсчёта. Однако указанный постулат был и остаётся чистой гипотезой до тех пор, пока не получит убедительного экспериментального подтверждения.

(Подобное осторожное замечание есть у Паули в его классической монографии по теории относительности.) Противоречия, к которым приводит его последовательное применение в рамках ОТО в виде принципа эквивалентности, обсуждались выше.

Основная концепция РТГ по диалектической спирали Гегеля восходит к исторически изначальным идеям великих мыслителей прошлого: Канта — с постулатом об априорности евклидова пространства в реально окружающем нас мире и Ньютона - с постулатом об абсолютных пространстве и времени. Последние, но уже совместно, реализуются как единое базовое пространство-время Минковского логически безупречным образом. Оно обобщило также и понятие евклидова пространства. Главным достоинством РТГ является однозначность в координатном описании движения материи, в выводах и предсказаниях. В РТГ всегда возможно, хотя бы сугубо теоретически, осуществлять однозначную непрерывную трансляцию геодезических криволинейных координат мировых точек в *наблюдательном* эффективном псевдо-римановом пространстве-времени в их координаты в каком-нибудь псевдодекартовом базисе (например универсальном) пространства-времени Минковского. При этом значение скалярного произведения и интервала в псевдодекартовых координатах будет гравитационно неискажённым, или истинным:  $dct^2 = \mathbf{u}' \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot \mathbf{u}$ . В результате мы приходим к неискажённому описанию *реального* абсолютного и относительного движения материи в базовом пространстве-времени Минковского.

Здесь же, в  $\langle P^{3+1} \rangle$  определяются гравитационно неискажённые абсолютные инварианты любого ускоренного движения, например: внутреннее ускорение  $g_{(i)}$ ; начальные значения массы  $m_0$ , импульса  $m_0 c$ , энергии  $m_0 c^2$ . Прямолинейное *абсолютное движение* материальной точки в  $\langle P^{3+1} \rangle$  проецируется гиперболически ортогонально на какое-либо собственное  $\langle \mathcal{E}^3, \hat{0} \rangle$  как равномерное прямолинейное *физическое движение*. При отклонении абсолютного движения от прямолинейности обязательно возникает инерция (согласно принципу Маха), которая всегда противодействует какой-то активной собственной силе, в том числе реальной силе тяготения. В частности, при *свободном движении* материальной точки собственные силы инерции и тяготения (в силу равенства

инерционной и тяготеющей масс) всегда уравнивают друг друга и поэтому они в таком случае никоим образом не фиксируются. Остаётся неизбежным закон сохранения энергии.

Отметим особо, что здесь не утверждается псевдоевклидовость базового пространства-времени *в целом*. Полное знание о его глобальном устройстве, по нашему мнению, принципиально не достижимо. В точной математике конец иллюзиям о возможности законченного знания, как хорошо известно, положила знаменитая теорема Гёделя о неполноте. В физической науке, по отношению к бесконечной Природе и её устройству, аналогичное ещё далеко не осознано.

Все мыслимые движения материальных точек в  $\langle P^{3+1} \rangle$  в принятой здесь трактовке подразделяются на абсолютные (геометрические) - с абсолютными параметрами и относительные (физические) - с относительными параметрами. Абсолютное движение материальной точки математически отображает мировая линия как кривая, сама по себе, в  $\langle P^{3+1} \rangle$  с допустимыми её наклонами внутри изотропного конуса (в реставрированных псевдодекартовых координатах  $\{\mathbf{x}, \vec{ct}\}$ ). У мировой линии есть одна существенная физическая особенность - *ее динамический* характер. Это позволяет определить вдоль неё ряд абсолютных физических характеристик. В свою очередь, относительное физическое движение есть гиперболическая ортопроекция абсолютного движения на какое-либо  $\langle E^3 \rangle^{(1)}$ .

Отвечая на изначальный вопрос данной главы, скажем следующее. *Релятивизация небесной механики вполне корректно и адекватно имеющимся данным наблюдений и экспериментов осуществима в базовом плоском пространстве-времени Минковского, где, в принципе, в псевдодекартовых координатах описывается локально абсолютное и как реальное отображение последнего - относительное движение материи в поле тяготения и в полях иной материальной природы без гравитационного или иного кажущегося искажения (искривления).*

Примем данную общерелятивистскую концепцию, отвечающую РТГ, как *рабочую гипотезу*. Далее представляет интерес завершить исследование рассмотрением природы абсолютного движения материи и внутренней геометрии мировых линий как времениподобных кривых, самих по себе, но с учётом известной размерности объемлющего их плоского пространства  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Это даёт возможность с привлечением

средств тензорной тригонометрии развить в нём псевдоаналог классической теории Френе - Серре для мировых линий, увязав его к тому же с их динамическим характером.

Завершим данную дискуссионную главу философским изречением Томаса Манна: "Великая истина - это такая истина, отрицание которой есть тоже великая истина!"

## **Глава 10А. Природа движения по мировым линиям в пространстве-времени Минковского и его внутренняя геометрия**

Любая материальная точка, в том числе центр массы любого материального объекта, находится в состоянии *перманентного абсолютного движения*. Его траектория, согласно Минковскому, геометрически интерпретируется в виде непрерывной, регулярной мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . По физической сути это есть интегральная стрела собственного времени материальной точки  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(ct) = \dot{ct}$ . По математической сути это есть кривая, сама по себе, но вложенная в четырёхмерное плоское пространство-время и с наклоном всегда внутри мгновенного изотропного конуса.

В окрестности каждой своей мировой точки М мировая линия (траектория) полностью характеризуется *четырьмя абсолютными векторными дифференциально-геометрическими параметрами* - по числу измерений пространства событий  $\langle P^{3+1} \rangle$ . (Предпосылкой для такой картины является абсолютная теория кривых Френе - Серре.) Они задают её ориентацию и конфигурацию в окрестности точки М. Ориентация этих векторных параметров определяется через координаты в исходном универсальном базисе  $\vec{E}_1$ . Их модульные характеристики суть инварианты преобразований Лоренца в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Ориентация мировой линии в точке М вычисляется в координатах  $\vec{E}_1$  через скалярный угол движения  $\gamma$  и его направляющие косинусы:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{u}^{(1)}(c\tau) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ct \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(c\tau) \\ ct(c\tau) \end{pmatrix}^{(1)}, \\
 \text{th } \gamma &= \frac{d\mathbf{x}}{dct} = \text{th } \gamma \cdot \mathbf{e}_\alpha; \\
 \gamma &= \text{Arth } \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}}{dct} = \text{Arth } \frac{\|\mathbf{dx}\|}{dct}, \\
 \cos \alpha_k &= \frac{dx_k}{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \{\cos \alpha_k\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (217 \text{ A})$$

В частности, для равномерного и прямолинейного физического движения имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma &= \text{const.}, \\
 \mathbf{e}_\alpha &= \text{const.},
 \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \gamma = \text{const.}$$

Для *простого* прямолинейного физического движения (гл. 5А) в  $\check{\mathbf{E}}_1$  имеем:  $\mathbf{e}_\alpha = \text{const.}$ , для *простого* равномерного физического движения в  $\check{\mathbf{E}}_1$  имеем:  $\gamma = \text{const.}$

Мгновенный собственный псевдодекартов базис  $\check{\mathbf{E}}_m$ , определяемый касательной гиперболой в точке М мировой линии, задаётся через ротацию (74А). Причём центр базиса  $\check{\mathbf{E}}_m$  всегда тождествен центру этой гиперболы. Матрица преобразования  $\text{goth } \Gamma^{(m)} = \mathbf{F}_1(\gamma, \mathbf{e}_\alpha)$  определяется в  $\check{\mathbf{E}}_1$  канонической структуры (363).

Псевдоевклидова интегральная длина дуги мировой линии  $\tilde{l} = c\tau$ , отмеряемая от какой-либо условно начальной точки О, есть её внутренний параметр-аргумент. Для количественной характеристики абсолютного движения материальной точки вдоль мировой линии в теории относительности применяется так называемая 4-скорость (4-вектор) или *псевдоскорость* (скаляр), впервые введённая Пуанкаре:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{c}(c\tau) &= \frac{d\mathbf{u}}{dct} \cdot c = \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{d\vec{c}\tau}{d\tau} = c \cdot \mathbf{i}(c\tau), \\
 \mathbf{c}'(c\tau) \cdot \Gamma^{\oplus} \cdot \mathbf{c}(c\tau) &= \|\mathbf{c}(c\tau)\|_p^2 = -c^2 = \text{const.}
 \end{aligned} \right\}$$



(218 А)

Здесь «с» по математической сути есть постоянный нормирующий масштабный множитель Пуанкаре, придающий изотропность и метрические свойства пространству-времени (гл. 1А). По физической сути это есть координатная скорость света в межзвёздном вакууме. В свою очередь,  $\mathbf{d}\mathbf{u} = \mathbf{d}\mathbf{c}\tau$  - мгновенная дифференциальная стрела собственного времени;  $\mathbf{i}(\mathbf{c}\tau)$  - текущая единичная касательная к мировой линии, определяющая геометрически её ориентацию в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Итак,  $\mathbf{i}(\mathbf{c}\tau)$  есть первый из дифференциально-геометрических параметров мировой линии, а именно её параметр *первого порядка* по дифференциалу длины дуги. По метрике он времениподобен, так как

$$\dot{\mathbf{i}}(\mathbf{c}\tau) \cdot \mathbf{i}(\mathbf{c}\tau) = -1.$$

Гиперболическая ортопроекция вектора  $\mathbf{c}(\mathbf{c}\tau)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$  на  $\mathcal{E}^3_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}\tau)$  есть относительная, или физическая скорость материальной точки там же. Физическая скорость  $\mathbf{v}$  как 3-вектор изменяется тогда и только тогда, когда изменяется ориентация мировой линии, то есть векторов  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{i}$ . Это происходит всегда и только при воздействии на материальную точку какой-либо собственной силы или равнодействующей нескольких собственных сил. В частности, эта сила или одна из этих сил может быть вызвана воздействием на неё поля тяготения гравитирующих масс. Модуль псевдоскорости абсолютного движения любых материальных объектов есть константа «с» (что для электрона, что для звезды и т.д.).

Вышесказанное позволяет сформулировать следующий постулат. *Все материальные объекты перманентно движутся в абсолютном пространстве-времени Минковского, в том числе в поле тяготения, по собственным мировым линиям с постоянной в нем локальной координатной скалярной псевдоскоростью «с».*

Такая трактовка абсолютного движения реализуется именно при его трансляции в любой псевдодекартон, или галилеевски инерциальный базис (гл. 9А). Заметим, что в данном утверждении константа «с» и коэффициент однородности Пуанкаре совпадают. Особо отметим то, что «с» принимается константой лишь на основе данных земных наблюдений. Поэтому любые подобные утверждения, строго говоря, не могут распространяться на Вселенную в целом.

Данный постулат, *во-первых*, позволяет рассматривать мировые линии как абсолютные динамические времениподобные траектории в плоском метрическом пространстве событий и

определить вдоль них дополнительные кинематические характеристики абсолютного движения материи - более высоких порядков, нежели «с». *Во-вторых*, он весьма просто и естественно объясняет природу перманентного движения материи по мировым линиям как течение собственного времени  $\tau$  и обратно. Следовательно, собственное время  $\tau$  течёт с той же абсолютной и постоянной скалярной псевдоскоростью «с»; при этом меняется только направление стрелы собственного времени, а именно - при любом преодолении силы инерции материи. Отсюда же измеряемые в  $\vec{E}_1$  полный импульс и полная энергия движения материи составляют  $P = mc$  и  $E = mc^2$ . *В-третьих*, он с учётом формулы (205А) объясняет математически и физически причину гиперболического характера искривления мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle$  при физическом движении с ускорением или с замедлением.

Причиной именно гиперболического искривления мировых линий при отклонении от прямолинейной траектории является то, что вектор внутреннего ускорения  $\mathbf{g}(\tau) \doteq \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau}$ , как и вызывающая его собственная сила, всегда направлены гиперболически ортогонально  $\mathbf{c}(\tau)$ . Ввиду постоянства модуля вектора псевдоскорости его дифференцирование вдоль мировой линии даёт гиперболически ортогональный ему вектор-производную:

$$\mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{l}^{\oplus} \cdot \mathbf{c}(\tau) = \text{const} \rightarrow \mathbf{c}'(\tau) \cdot \mathbf{l}^{\oplus} \cdot \frac{d\mathbf{c}(\tau)}{d\tau} = 0, \tag{219 A}$$

Здесь используется обнуление скалярного произведения вектора  $\mathbf{c}(\tau)$  только с первым его векторным дифференциалом, хотя аналогичное имеет место и для его дифференциалов более высоких порядков. Математически гиперболическое искривление мировой линии выражает её мгновенная абсолютная гиперболическая кривизна:

$$K^{(m)} = 1/R_K^{(m)} = \mathbf{g}(\tau)/c^2 = K(\mathbf{c}\tau). \tag{220A}$$

Тут имеется некая псевдоаналогия с физическим движением по окружности. Как 4-векторы эти абсолютные пространствуподобные параметры движения *второго порядка по дифференциалу длины дуги* направлены по псевдонормали:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}(c\tau) &= \mathbf{K}(c\tau) \cdot \mathbf{p}(c\tau), \\ \mathbf{r}_K(c\tau) &= \mathbf{R}_K(c\tau) \cdot \mathbf{p}(c\tau), \\ \mathbf{g}(c\tau) &= \mathbf{g}(c\tau) \cdot \mathbf{p}(c\tau). \end{aligned} \right\} \quad (221 \text{ A})$$

При естественном - не скачкообразном изменении скорости физического движения мировые линии суть регулярные непрерывные кривые в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Они всегда времениподобны, то есть имеют ограничение по углу наклона к оси  $\vec{c\tau}^{(1)}$ :  $\varphi_R(\gamma) < \pi/4$ .

Их *объемлющую размерность* характеризует *порядок линейного вложения*  $\lambda$ . Это, по определению, есть минимальная размерность объемлющего данную кривую плоского подпространства в базовом метрическом пространстве событий или в данном случае - плоского подпространства-времени. Для кривой в  $\langle P^{3+1} \rangle$  порядок  $\lambda$  находится в пределах от 1 до 4-х. Прямой линии соответствует  $\lambda = 1$ ; плоской кривой отвечает  $\lambda=2$ , например для гиперболического движения, и т. д.

Из теории регулярных кривых в плоском метрическом пространстве следует, в частности, что для произвольной точки М на криволинейном участке мировой траектории при  $\lambda > 2$  однозначно определяется мгновенная абсолютная соприкасающаяся псевдоплоскость кривизны:

$$\langle P^{1-1} \rangle_K^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(c\tau), \mathbf{i}(c\tau) \rangle.$$

В универсальном базисе  $\vec{E}_1$  мгновенный единичный времени-подобный вектор касательной  $\mathbf{i}(c\tau)$ , см. формулу (218А), выражается тригонометрическим образом в результате 1-го дифференцирования:

$$\mathbf{i}(c\tau) = \frac{d\mathbf{u}(c\tau)}{dc\tau} = \frac{\boxed{\text{sh } \gamma_1}}{\boxed{\text{ch } \gamma_1}} = \frac{\boxed{\text{sh } \gamma_1 \cdot \mathbf{e}_\alpha}}{\boxed{\text{ch } \gamma_1}}, \quad \mathbf{e}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \\ \cos \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (222\text{A})$$

Вектор  $\mathbf{i}(c\tau)$  есть орт мгновенной стрелы собственного времени  $\vec{c\tau}$ , или четвёртый вектор-столбец мгновенной модальной матрицы  $\text{goth } \Gamma$ . В свою очередь, характеристики  $\mathbf{p}(c\tau)$  и  $\mathbf{K}(c\tau)$  вычисляются в результате 2-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222А):

$$\frac{d\mathbf{i}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = \frac{d^2\mathbf{u}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau^2} = K(\sigma\tau) \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau) = \mathbf{k}(\sigma\tau) = K(\sigma\tau) \cdot \frac{\operatorname{ch} \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta}{\operatorname{sh} \gamma_p}, \quad (223A)$$

$$\frac{\|\mathbf{d}\mathbf{i}\|_P}{d\sigma\tau} = K \geq 0.$$

Абсолютные 4-векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$  приложены в точке  $M$  и направлены всегда от центра касательной гиперболы в соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  в сторону вогнутости мировой линии. Ввиду того что скалярные характеристики  $K$ ,  $R$  и  $g$  суть модули пространству-подобных векторов, то все они - положительные величины. Факт равномерности криволинейного физического движения определяется также абсолютно ( $\cos \varepsilon = 0$ ) в любом псевдодекартовом базисе, в том числе в  $\hat{E}_\tau$ , через скалярное произведение:

$$\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = (\cos \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\alpha + \sin \varepsilon \cdot \mathbf{e}_\eta) \cdot \mathbf{e}_\alpha = \cos \varepsilon. \quad (224A)$$

Здесь единичный 3-вектор приращения движения  $\mathbf{e}_\beta$  выражен, согласно (136A); величина угла  $\varepsilon$  между  $\mathbf{e}_\beta$  и  $\mathbf{e}_\alpha$  может заключаться в пределах  $0 \div \pi$ .

Производная (223A) выражается функционально как псевдоаналог первой формулы Френе - Серре, поскольку используемый в ней дифференциал дуги имеет псевдоевклидову метрику. Абсолютный 4-вектор  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  при движении материальной точки  $M$  вдоль своей мировой линии вращается в её окрестности в пределах соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  с абсолютной мгновенной гиперболической угловой псевдоскоростью

$$\pm \eta_K^{(m)} = \frac{\|\widehat{d\mathbf{y}}\|}{d\tau} = \frac{\|\mathbf{d}\mathbf{i}\|_P}{d\tau} = c/R_K^{(m)} = c \cdot K^{(m)} = g^{(m)}/c, \quad (225A)$$

где знаки « + » и « — » выбираются для ускоренного и замедленного движений (соответственно кривая выпукла или вогнута). Обратим внимание, что здесь  $\widehat{y}$  выражается в некотором абсолютном и пока 2-х ортовом базисе  $\hat{E}_m = \{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  в  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$ . В таком базисе внутреннее ускорение  $\mathbf{g}(\tau)$  всегда имеет тангенциальный характер. Причём в нём  $\cos \varepsilon = \pm 1$  для ускоренного и замедленного движений в формуле (224A). Но если угловую скорость вращения

касательной определить через дифференциал длины дуги  $ds_{ct}$ , то тогда она будет тождественна гиперболической кривизне мировой линии (*физический смысл последней*).

\* \* \*

Далее рассмотрим более подробно, нежели в гл. 7А, ортопроек-ционное тригонометрическое представление абсолютных векторных характеристик движения второго порядка в универсальном базисе  $\check{\mathbf{E}}_1$ . Разложим абсолютные векторы кривизны и внутреннего ускорения на две относительные и ортогональные друг другу проекции - тангенциальную и нормальную по отношению к вектору скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(ct) &= \frac{d\mathbf{i}(ct)}{dct} = \frac{d\gamma_1^{(1)}}{dct} \cdot \boxed{\frac{\text{ch } \gamma_1 \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_1}}^{(1)} + \boxed{\frac{\text{sh } \gamma_1 \cdot \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dct}}{0}}^{(1)} = \\ &= \bar{\mathbf{K}}^{(1)}(ct) \cdot \boxed{\frac{\text{ch } \gamma_1 \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_1}}^{(1)} + \mathbf{K}^{(1)} \cdot \boxed{\frac{\mathbf{e}_\alpha}{0}}^{(1)} = \bar{\mathbf{K}}^{(1)}(ct) \cdot \bar{\mathbf{p}}^{(1)}(ct) + \mathbf{K}^{(1)}(ct) \cdot \mathbf{p}^{(1)}(ct) = (226A) \\ &= \bar{\mathbf{k}}^{(1)}(ct) + \mathbf{k}^{(1)}(ct) = \mathbf{K}(ct) \cdot \mathbf{p}(ct) = \mathbf{K}(ct) \cdot \boxed{\frac{\text{ch } \gamma_p \cdot \mathbf{e}_\beta}{\text{sh } \gamma_p}}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что в таком представлении  $\lambda \geq 2$ . (То есть формально оно может применяться и для плоской кривой). Здесь

$$\bar{\mathbf{K}}^{(1)}(ct) = \frac{d\gamma_1^{(1)}}{dct} \quad \text{и} \quad \mathbf{K}^{(1)}(ct) = \text{sh } \gamma_1^{(1)} \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_\alpha\|^{(1)}}{dct}$$

- тангенциальная и нормальная проекции гиперболической кривизны;  $\bar{\mathbf{p}}^{(1)}(ct) = \boxed{\frac{\text{ch } \gamma_1 \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\text{sh } \gamma_1}}^{(1)}$  - единичный 4-вектор тангенциальной кривизны,

$$\mathbf{p}^{(1)}(ct) = \boxed{\frac{\mathbf{e}_\alpha}{0}}^{(1)} \quad \text{- единичный 4-вектор нормальной кривизны,}$$

$$\mathbf{e}_\alpha^{(1)} = \frac{d\mathbf{e}_\alpha^{(1)}}{\|d\mathbf{e}_\alpha\|^{(1)}} \quad \text{- единичный 3-вектор ортогонального}$$

приращения в  $\check{\mathbf{E}}_1$ , который применялся ранее в (136А), (145А) и

(161 А). Из формулы (226А) непосредственно следует ряд соотношений.

Для 4-вектора кривизны имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &= \bar{\mathbf{k}} + \overset{\perp}{\mathbf{k}}, \\ K^2 &= \bar{K}^2 + \overset{\perp}{K}^2. \end{aligned} \right\} \quad (227A)$$

Для трёх векторов и скаляров имеем:

$$\left. \begin{aligned} (K \cdot \text{ch } \gamma_p) \cdot \mathbf{e}_p &= (\bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_e) \cdot \mathbf{e}_e + \overset{\perp}{K} \cdot \mathbf{e}_\eta, \\ (K \cdot \text{ch } \gamma_p)^2 &= (\bar{K} \cdot \text{ch } \gamma_e)^2 + (\overset{\perp}{K})^2. \end{aligned} \right\}$$

$$K \cdot \text{sh } \gamma_p = \bar{K} \cdot \text{sh } \gamma_1 \rightarrow \text{sh } \gamma_p = \bar{K}/K \cdot \text{sh } \gamma_1 \leq \text{sh } \gamma_1$$

$$\{\gamma_1 = \gamma_p \Leftrightarrow \overset{\perp}{K} = 0 \Leftrightarrow \cos \varepsilon = \pm 1 (\mathbf{e}_p = \pm \mathbf{e}_e)\}.$$

(228A)

Последнее имеет место в мгновенном абсолютном базисе  $\hat{\mathbf{E}}_m$  для произвольного движения и в универсальном базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  для *простого* прямолинейного движения.

Напомним также основные соотношения для ортопроекции абсолютного движения в базисе  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  (из гл. 7А):

$$d\gamma = d\gamma \cdot \mathbf{e}_p^{(m)} = d\bar{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_e^{(1)} + d\overset{\perp}{\gamma}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\eta^{(1)} \quad (d\gamma = d\gamma^{(1)} = d\gamma^{(m)}),$$

$$d^2\mathbf{x}^{(m)} = d^2\mathbf{x}^{(m)} \cdot \mathbf{e}_p^{(m)} = d^2\bar{\mathbf{x}}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_e^{(1)} + d^2\overset{\perp}{\mathbf{x}}^{(1)} \cdot \mathbf{e}_\eta^{(1)} \text{ — см. формулу (161А)}$$

(в этих соотношениях 3-вектор  $\mathbf{e}_p$  берётся здесь из 4-вектора  $\mathbf{p}$ );

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{d^2\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau^2} = K = g/c^2 \rightarrow d^2\mathbf{x}^{(m)} = d\gamma d\tau$$

(229A)

— при этом  $\frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau} = 0$ , но  $d\gamma = d \frac{d\mathbf{x}^{(m)}}{d\tau}$  — см. формулу(80А);

$$(d\gamma)^2 = [d\bar{\gamma}^{(1)}]^2 + [d\overset{\perp}{\gamma}^{(1)}]^2 \text{ — см. формулу (145А);}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g}(\tau) &= \bar{\mathbf{g}}^{(1)}(\tau) + \overset{\perp}{\mathbf{g}}^{(1)}(\tau), \\ \mathbf{g}^2(\tau) &= \bar{\mathbf{g}}^2(\tau) + \overset{\perp}{\mathbf{g}}^2(\tau). \end{aligned} \right\}$$

Векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\bar{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{k}^\perp$  ( $\mathbf{g}$ ,  $\bar{\mathbf{g}}$  и  $\mathbf{g}^\perp$ ) образуют прямоугольный треугольник в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^m$ . Их модули подчиняются теореме Пифагора, поэтому гипотенузы в них больше катетов. Данные ортогональные разложения кривизны и ускорения (зависящие от базиса) по отношению к вектору скорости  $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_\alpha$  приводят к обеим их *релятивистским* проекциям (отличие от принципа Герглотца - см. гл. 2А и 4А).

Указанные векторы направлены по псевдонормальям  $\bar{\mathbf{p}}$ ,  $\bar{\mathbf{p}}$  и  $\bar{\mathbf{p}}^\perp$  вдоль осей  $x^{(m)}$ ,  $\bar{x}^{(m)}$  и  $x^{(1)}$  ( $\bar{\mathbf{p}} \perp \mathbf{v}$ ). Ортопроекции ускоренного движения отображаются *локально* в двух координатных плоскостях.

Тангенциальная проекция описывается *локально* как гиперболическое движение в  $\langle \bar{\mathbf{p}}^{1+1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{c}}\mathbf{t} \rangle$  радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{\mathbf{g}}$ , то есть с ускорением  $\bar{\mathbf{g}} = \cos \varepsilon \cdot \mathbf{g}$ . Его проекция на  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)} \equiv \langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{g}} \rangle \subset \langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  как физическое движение в последнем есть прямая линия, направленная по вектору  $\mathbf{v}$ :

$$\bar{\mathbf{g}}^{(1)} = \text{sch}^3 \gamma \cdot \bar{\mathbf{g}} = c \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = \frac{d^2 \bar{x}^{(m)}}{d\tau^2} \quad \text{— см. формулу (167А).}$$

Нормальная проекция описывается *локально* как начальное гиперболическое движение, или тождественное ему псевдокруговое движение в  $\langle \bar{\mathbf{p}}^{1-1} \rangle^{(1)} \equiv \langle \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{c}}\mathbf{t} \rangle$  радиуса  $\bar{R} = c^2/\bar{\mathbf{g}}$ , то есть с ускорением  $\bar{\mathbf{g}} = \sin \varepsilon \cdot \mathbf{g}$ . Его проекция на то же  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle^{(1)}$  как физическое движение в последнем есть окружность вещественного радиуса  $r$ . Причём

$$\bar{\mathbf{g}}^{(1)} = \text{sch}^2 \gamma \cdot \bar{\mathbf{g}} = c \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{d\tau} = \frac{d^2 \bar{x}^{(m)}}{d\tau^2} \quad \text{— см. формулу (168А)}$$

(векторы  $\bar{\mathbf{g}}$  и  $\bar{\mathbf{g}}^{(1)}$  коллинеарны, векторы  $\bar{\mathbf{g}}$  и  $\mathbf{v}$  перпендикулярны),  
 $r = v^2/\bar{\mathbf{g}}^{(1)} = \text{ch}^2 \gamma \cdot v^2/\bar{\mathbf{g}} = \text{ch}^2 \gamma \cdot v^2/c^2 \cdot \bar{R} = \text{sh}^2 \gamma \cdot \bar{R}$ .

Последняя формула связывает тригонометрическим образом радиусы *нормальных* гиперболической и сферической кривизн. В частности, при  $\gamma=0$  ( $v=0$ ) имеем:  $\bar{R}/r = \infty$ ; при  $\gamma = \omega$  имеем:  $\bar{R} = r$ ; при  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $v \rightarrow c$ ) имеем:  $\bar{R}/r = 0$  (то есть касательная  $\mathbf{i}(\text{ct})$  стремится к изотропному конусу). Двумя маргинальными

случаями являются приводимые ниже *простые движения* (относительно  $\check{\mathbf{E}}_1$ ).

Простое тангенциально ускоренное движение, где  $\overline{\mathbf{g}} \neq 0, \perp \check{\mathbf{g}} = 0 (\lambda = 2)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{\mathbf{e}_u = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 \check{\mathbf{c}}}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{d\check{\mathbf{c}}} = \overline{\mathbf{g}}(\tau) \cdot \overline{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \overline{\mathbf{g}}(\tau) = \frac{d^2 \check{\mathbf{x}}^{(m)}}{d\tau^2} \cdot \overline{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \\ &= c \cdot \frac{d\overline{\gamma}}{d\tau} \cdot \overline{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \frac{c^2}{R} \cdot \overline{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau), \end{aligned}$$

что тождественно по результату (80А). (В частности, при

$$\frac{d\gamma^{(1)}}{d\check{\mathbf{c}}\tau} = \text{const}$$

совершается интегрально гиперболическое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  есть равноускоренное (замедленное) прямолинейное физическое движение.)

Простое нормально ускоренное движение, где  $\overline{\mathbf{g}} \neq 0, \perp \check{\mathbf{g}} = 0 (\lambda = 3)$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\mathbf{c}}{d\tau} \right]_{\gamma = \text{const}} &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} = \frac{d^2 \check{\mathbf{c}}}{d\tau^2} = c^2 \cdot \frac{d\mathbf{i}}{d\check{\mathbf{c}}} = \perp \check{\mathbf{g}} \cdot \perp \check{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \perp \check{\mathbf{g}}(\tau) = \frac{d^2 \perp \check{\mathbf{x}}^{(m)}}{d\tau^2} \cdot \perp \check{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \\ &= c \cdot \frac{d\perp \check{\gamma}}{d\tau} \cdot \perp \check{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau) = \frac{c^2}{R} \cdot \perp \check{\mathbf{p}}(\check{\mathbf{c}}\tau). \end{aligned}$$

(В частности, при

$$\frac{\|d\mathbf{e}_u\|^{(1)}}{d\check{\mathbf{c}}\tau} = \text{const}$$

совершается интегрально псевдовинтовое движение, а его проекция на  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  есть равномерное планетарное физическое движение.)

Угловая скорость планетарного физического движения в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(1)}$  выражается в виде:

$$w = \frac{\|d\mathbf{e}_u\|}{dt} = \text{sch } \gamma \cdot \frac{\|d\mathbf{e}_u\|}{d\tau} = \frac{\text{sch } \gamma \cdot \perp \check{\mathbf{g}}}{\text{sh } \gamma \cdot c} = \frac{\text{sch } \gamma \cdot c}{\text{sh } \gamma \cdot R} = \frac{\text{th } \gamma \cdot c}{r} = \frac{v}{r},$$

то есть нерелятивистским образом;

$$\perp \check{\mathbf{g}}^{(1)} = v \cdot w = \text{sch}^2 \gamma \cdot \perp \check{\mathbf{g}} \quad (\text{см. формулу (168 А)}).$$



Для сравнения приведём аналогичное ортогональное разложение ускорения в  $\hat{\mathbb{E}}_1$  в нерелятивистской механике, то есть в пространстве-времени Лагранжа ( $\lambda \geq 2$ ):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{e}_\alpha \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{g} \cdot \mathbf{e}_\eta \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $\bar{\mathbf{g}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = g \cdot \cos \varepsilon$ ,  $\frac{1}{g} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^2/r = g \cdot \sin \varepsilon$ ;

$$g^2 = \bar{g}^2 + \frac{1}{g}^2, \quad \mathbf{g} = \bar{\mathbf{g}} + \frac{1}{g} \quad (\bar{\mathbf{g}} \parallel \mathbf{v}, \frac{1}{g} \perp \mathbf{v}).$$

\* \* \*

Отметим, что псевдоаналог (223 А) первой формулы Френе - Серре можно вывести тригонометрическим способом, используя как аргумент гиперболический угол движения при дифференцировании в базисе  $\hat{\mathbb{E}}_m$  в соприкасающейся псевдоплоскости:

$$d\mathbf{i} = \mathbf{p} d\hat{\varphi} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{d\hat{\varphi}} = \mathbf{p} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{i}}{R d\hat{\varphi}} = \frac{d\mathbf{i}}{d\tau} = \frac{\mathbf{p}}{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{p}. \quad (230 \text{ А})$$

Соответственно для кривых в квазиевклидовом пространстве  $\langle Q^{n+1} \rangle$  (гл. 8А) в базисе  $\hat{\mathbb{E}}_m$  в соприкасающейся квазиплоскости имеют место аналогичные тригонометрические соотношения:

$$d\mathbf{e} = \mathbf{n} d\hat{\varphi} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{d\hat{\varphi}} = \mathbf{n} \leftrightarrow \frac{d\mathbf{e}}{R d\hat{\varphi}} = \frac{d\mathbf{e}}{d\ell} = \frac{\mathbf{n}}{R} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}. \quad (231 \text{ А})$$

Очевидно, что мировая линия, необъемлемая какой-либо псевдоплоскостью, имеет значение  $\lambda \geq 3$ . В таком случае отдельный её фрагмент или она в целом как регулярная кривая в каждой собственной точке М наряду с абсолютной гиперболической кривизной (К и k) имеет дополнительный параметр - *абсолютное сферическое кручение*, причём также в скалярной и векторной формах:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}(\sigma\tau) &= T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau), \\ \mathbf{t}' \cdot \mathbf{1} \oplus \cdot \mathbf{t} &= T^2, \\ \mathbf{b}' \cdot \mathbf{1} \oplus \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{t}. \end{aligned} \right\}$$

(232A)

Кручение вызывает сферическую ротацию соприкасающейся псевдоплоскости  $\langle P^{1+1} \rangle^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \rangle$  вокруг мгновенной оси  $\vec{\sigma\tau}$ , или вокруг  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$ . При этом псевдонормаль  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  претерпевает сферическую часть своей общей ротации (сферической и гиперболической). Сферическая часть ротации  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  как единичного вектора имеет кривизну  $T$  (радиус кривизны  $R_T = 1/T$ ) и направляющий орт  $\mathbf{b}$  — вектор бинормали. Поэтому кручение можно также определить как кривизну кривизны, или как *кривизну второго порядка*.

Для кривой порядка вложения  $\lambda = 3$  (например, псевдовинтовой линии) бинормаль находится в каждой точке  $M$  как единичное ортогональное дополнение к псевдонормали в собственной  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$ . Такая картина имеет место при криволинейном физическом движении в некоторой евклидовой плоскости, в том числе планетарного типа. В этом случае правая тройка векторов  $\{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  задаёт *подвижный трёхгранник Френе* в  $\langle P^{2-1} \rangle \equiv \text{CONST}$ .

В самом же общем случае бинормаль и кручение вычисляются совместно в результате 3-го дифференцирования вдоль мировой линии после (222A) и (223A):

$$\frac{d\mathbf{p}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = -K(\sigma\tau) \cdot \mathbf{i}(\sigma\tau) + T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau).$$

(233A)

Бинормаль  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  сферически ортогональна  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в мгновенной *абсолютной плоскости кручения псевдонормали*  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau) \rangle$ , но как 4-вектор она псевдоортогональна  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  и  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . В той же последовательности  $\mathbf{E}_{(m)} = \{\mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau)\}$  они задают абсолютный и пока 3-х ортовый мгновенный псевдодекартов базис в  $\langle P^{2-1} \rangle^{(m)}$ . Последнее есть мгновенное *абсолютное соприкасающееся плоское трёхмерное подпространство-время*. Кручение  $T$  в окрестности данной точки  $M$  - положительная характеристика (для правого 3-х ортового базиса), если вид

кривой мировой линии в нём напоминает правый винт, и обратно.

Производная (233А) выражается функционально как *псевдоаналог второй формулы Френе — Серре*. В силу единичности вектора  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$ , его дифференцирование вдоль кривой, как и вектора  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в (223 А), сводится к некоторой ротации. Эта общая ротация в (233А) разложена на две псевдоортогональные друг другу составляющие: гиперболическую и сферическую.

Гиперболическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  происходит синхронно с  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  в одной и той же соприкасающейся псевдоплоскости кривизны  $\langle P^{1+1} \rangle_K^{(m)}$  вокруг мгновенной бинормали  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  с отрицательной по отношению к (225А) гиперболической угловой скоростью « $-\eta_K^{(m)}$ ». Сферическая ротация  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  происходит в плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$  вокруг мгновенной  $\mathbf{i}(\sigma\tau)$  с абсолютной сферической угловой скоростью:

$$w_T^{(m)} = c \cdot \Gamma^{(m)} = c / R_T^{(m)} = g_T^{(m)} / c, \tag{234A}$$

где  $g_T^{(m)} = g_T(\sigma\tau)$  - мгновенное *внутреннее ускорение кручения псевдонормали*. Как 4-вектор оно направлено по бинормали

$$g_T(\sigma\tau) = c^2 \cdot \Gamma^{(m)} \cdot \mathbf{b}^{(m)} = g_T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}^{(m)}. \tag{235A}$$

*Абсолютная полная кривизна для общей ротации псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma\tau)$  в векторной и скалярной формах* определяются из (233А) как

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}(\sigma\tau) &= [T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau)] + [-K(\sigma\tau)^{(m)} \mathbf{i}(\sigma\tau)], \\ Q(\sigma\tau) &= \sqrt{T^2(\sigma\tau) - K^2(\sigma\tau)} = 1 / R_Q^{(m)}. \end{aligned} \right\} \tag{236A}$$

Она времениподобна при  $K > T$ , в том числе при  $T = 0$ , и пространству-подобна при  $T > K$ . Но как кривизна (см. выше)  $Q > 0$ . В зависимости от соотношения между  $T$  и  $K$  определяется либо гиперболическая, либо вырожденная, либо сферическая угловая скорость общей ротации псевдонормали:

$$w_Q^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{p}\|_P}{d\tau} = c \cdot Q^{(m)} = c / R_Q^{(m)} = g_Q^{(m)} / c, \tag{237A}$$

где  $\mathbf{g}_Q^{(m)} = \mathbf{g}_Q(\sigma\tau)$  — мгновенное *внутреннее ускорение общей ротации псевдонормали* (брутто-параметр). Как 4-вектор оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации псевдонормали  $\mathbf{q}(\sigma\tau)$ . При  $T = K$  имеем:  $Q, w, \mathbf{g}_Q = 0$  (*эффект компенсации* полной кривизны общей ротации псевдонормали вследствие её вырождения на изотропном конусе).

Отметим также, что в известной монографии Синга, посвященной ОТО, псевдоаналог теории Френе - Серре почему-то утверждается в абсолютных ковариантных производных для *искривленного* псевдо-риманова пространства-времени. В силу его неизотропности формулы - аналоги здесь не могут быть однозначными. Во второй формуле — аналоге (233А) допущена ошибка в знаке перед первой - гиперболической частью ротации псевдонормали. (Если переменить знак псевдонормали, то изменятся знаки и в других формулах.)

\* \* \*

При  $\lambda = 3$  имеет место псевдоаналог третьей формулы Френе - Серре:

$$\frac{d\mathbf{b}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = -T(\sigma\tau) \cdot \mathbf{p}(\sigma\tau) = -1/R_T^{(m)} \mathbf{p}(\sigma\tau). \tag{238A}$$

В этом случае при 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А) и (233А) ротация бинормали осуществляется синхронно со сферической частью ротации псевдонормали -кручением. Обе эти синхронные ротации происходят в одной и той же мгновенной абсолютной плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$ . Кроме того, в этом случае

$$\{ \langle \mathbf{P}^{1+1} \rangle_K^{(m)} \oplus \mathbf{b}^{(m)} \} \equiv \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \oplus \mathbf{i}^{(m)} \} \equiv \langle \mathbf{P}^{2-1} \rangle_Q \equiv \text{CONST} \tag{239A}$$

есть плоское подпространство-время событий ( $\lambda = 3$ ). Такого рода абсолютное движение проецируется гиперболически на какую-либо евклидову плоскость  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle \subset \langle \mathbf{P}^{2+1} \rangle_Q$  как криволинейное неравномерное физическое движение в ней (в общем случае).

Особый частный случай при  $\lambda = 3$  - псевдовинтовое движение вокруг некоторой (базовой) стрелы времени  $\vec{\sigma\tau}$  в каком-

нибудь  $\vec{E}$ . Соответственно в проекции на базовое  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  оно представляется как равномерное планетарное физическое движение. Оно характеризуется постоянством своих абсолютных параметров (в скалярной форме) и их определённой тригонометрической взаимосвязью. В базисе  $\vec{E}$  псевдовинтовое движение реализуется тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\left. \begin{aligned} K(ct) &= \text{const}, \\ T(ct) &= \text{const}, \\ \mathbf{p}(ct) &\perp \mathbf{i}(ct). \end{aligned} \right\} \quad (240A)$$

Здесь к универсальному свойству *гиперболической* ортогональности векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{i}$  добавлено требование их *сферической* ортогональности в  $\langle P^{2+1} \rangle_0$ . Следовательно, они образуют абсолютный универсальный 2-х ортовый базис. Общая ротация псевдонормали (236A) происходит в данном случае именно в базовом  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ . Поэтому она обязательно пространствуподобна. Наиболее просто и наглядно псевдовинтовое движение задаётся в цилиндрических координатах:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cdot \cos \varphi, \\ x_2 &= r \cdot \sin \varphi, \\ ct &= a \cdot \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (241 A)$$

где  $r$  - вещественный радиус проекции винта на базовое  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , или радиус планетарного физического движения:

$\varphi$  — параметрический угол сферической ротации в базовом  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ ;  
 $a$  — высота винта для единичного  $\varphi$ .

Данному псевдовинтовому движению отвечает характеристический *внутренний гиперболически прямоугольный треугольник* с катетами  $r$  и  $a$  ( $a > r$ ). Он реализуется в двух вариантах (при значении  $\varphi = 1$  рад) -либо как плоский треугольник на централизованной секущей псевдоплоскости (содержащей  $\vec{ct}$ ), либо как треугольник на боковой цилиндрической поверхности, объёмлющей винт. При этом у них общая высота-катет « $a$ », равное основание-катет « $r$ » и

поэтому равная гипотенуза, определяемая псевдоевклидовой теоремой Пифагора:

$$\rho^2 = a^2 - r^2.$$

Исходные параметры «а» и «r» однозначно задают постоянный гиперболический угол движения

$$\gamma = \text{Arsh } r/\rho \quad (\text{sh } \gamma = r/\rho).$$

Осуществляя ортогональное дифференцирование (223А) и (233А) в указанных цилиндрических координатах, получаем формулы для кривизны и кручения, а также их тригонометрическую взаимосвязь:

$$\left. \begin{aligned} r/R_K &= r^2/(a^2 - r^2) = (r/\rho)^2 = \text{sh}^2 \gamma, \\ a/R_T &= a^2/(a^2 - r^2) = (a/\rho)^2 = \text{ch}^2 \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (242A)$$

С учётом того, что  $a = \text{cth } \gamma \cdot r$ , отсюда вытекают соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r/R_T &= \text{sh } \gamma \cdot \text{ch } \gamma; \\ T &= K \cdot \text{cth } \gamma \quad (T > K), \quad R_T = R_K \cdot \text{th } \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (243 A)$$

Полная кривизна ротации псевдонормали как 4-вектор направлена параллельно базовому  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$  и строго к оси винта  $\vec{ct}$ . Угловые скорости и внутренние ускорения выражаются в виде:

$$\begin{aligned} w_Q &= \frac{\|d\mathbf{p}\|_P}{dt} = c \cdot Q = c \cdot \sqrt{T^2 - K^2} = \frac{c \cdot \text{sh } \gamma}{r} = \frac{v^*}{r}, \\ w_T &= \frac{\|d\mathbf{b}\|_P}{dt} = c \cdot T, \quad w_K = \frac{\|d\mathbf{e}\|_P}{dt} = c \cdot K; \\ \mathbf{g} &= c^2/R_K = c^2 \cdot \text{sh}^2 \gamma / r = v^{*2}/r = \frac{1}{\mathbf{g}} \quad \left( \frac{1}{\mathbf{g}} \perp \mathbf{v}, \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{o} \right), \\ \mathbf{g}^{(1)} &= \mathbf{g} \cdot \text{sch}^2 \gamma = v^2/r = \frac{1}{\mathbf{g}^{(1)}} \quad \left( \frac{1}{\mathbf{g}^{(1)}} \parallel \frac{1}{\mathbf{g}} \right). \end{aligned}$$

В каждой точке М псевдовинта соприкасающаяся псевдоплоскость  $\langle P^{1+1}, (m) \rangle \equiv \langle \mathbf{p}(ct), \mathbf{i}(ct) \rangle$  рассекает объёмлющий цилиндр по мгновенному касательному эллипсу. В его перигее (точке М) радиусы касательных окружности и гиперболы совпадают. Следовательно, нормаль и псевдонормаль к псевдовинтовой мировой линии одинаковы ( $\mathbf{n} = \mathbf{p}$ ).

В подвижном трёхграннике Френе  $\langle \mathbf{p}(ct), \mathbf{b}(ct), \mathbf{i}(ct) \rangle$  4-вектор

псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma t)$ , как и  $\mathbf{k}(\sigma t)$ , направлен перпендикулярно к базовой оси  $\vec{\sigma t}$ ; 4-вектор бинормали  $\mathbf{b}(\sigma t)$ , как и  $\mathbf{t}(\sigma t)$ , направлен тангенциально к окружности радиуса  $r$  планетарного физического движения в базовом  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle$ , то есть вдоль вектора скорости  $\mathbf{v}$ , но в противоположном ему направлении; 4-вектор единичной касательной  $\mathbf{i}(\sigma t)$ , как и  $\mathbf{c}(\sigma t)$ , направлен по мировой линии, то есть по  $\vec{\sigma t}$ . В силу этого  $\mathbf{p}(\sigma t)$  и  $\mathbf{i}(\sigma t)$  совместно сферически и гиперболически ортогональны друг другу (см. формулу (240А)).

Изложенная абсолютная трактовка, в принципе, обобщается для псевдовинтового движения, проекцией которого является обычное эллиптическое планетарное физическое движение.

\* \* \*

В самом же общем случае для мировой линии в  $\langle P^{3+1} \rangle \lambda = 4 = \max$ . Тогда бинормаль  $\mathbf{b}(\sigma t)$  как единичный вектор подвергается общей сферической ротации в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$  псевдоортогонально дополнительному к  $\mathbf{i}(\sigma t)$ , но с двумя степенями свободы в силу её перманентной сферической ортогональности к псевдонормали. Формально вторая степень свободы вызвана ротацией плоскости кручения  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)} \equiv \langle \mathbf{p}(\sigma t), \mathbf{b}(\sigma t) \rangle$  в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle^{(m)}$ , или её *ортопрецессией*  $Z(\sigma t)$ . При 4-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222А), (223А) и (233А) общая сферическая ротация бинормали разлагается на две сферические составляющие, ортогональные друг другу. В результате имеем *третью формулу*:

$$\frac{d\mathbf{b}(\sigma t)}{d\sigma t} = -T(\sigma t) \cdot \mathbf{p}(\sigma t) + Z(\sigma t) \cdot \mathbf{h}(\sigma t). \tag{244А}$$

Здесь первая часть сферической ротации бинормали синхронна со сферической частью общей ротации псевдонормали в формуле (233А). Обе ротации происходят в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_T^{(m)}$ . Вторая часть сферической ротации бинормали осуществляется в *мгновенной абсолютной плоскости ортопрецессии бинормали*  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)}$  вокруг мгновенной псевдонормали  $\mathbf{p}(\sigma t)$  (Как и ранее, здесь используется взаимная ортогональность единичного вектора-функции и его вектора-дифференциала любого порядка.) Единичный 4-вектор

триномали  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  является однозначным (при  $\lambda=4=\max$ ) ортогональным дополнением в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle_{\Gamma}^{(m)}$  к  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_{\Gamma}^{(m)}$ . Наиболее общо он определяется также однозначно как псевдоортогональное дополнение в базовом псевдоевклидовом пространстве-времени  $\langle P^{3+1} \rangle$  к тройке единичных орт-векторов - псевдонормали, бинормали и касательной:

$$\left. \begin{aligned} \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_{\Gamma}^{(m)} \oplus \mathbf{p}(\sigma\tau) \} &\equiv \langle \mathcal{E}^3 \rangle_{\Gamma}^{(m)} \equiv \{ \langle \mathcal{E}^2 \rangle_{\Gamma}^{(m)} \oplus \mathbf{h}(\sigma\tau) \}, \\ \{ \langle \mathcal{E}^3 \rangle_{\Gamma}^{(m)} \oplus \mathbf{i}(\sigma\tau) \} &\equiv \langle P^{3+1} \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (245A)$$

Триномаль  $\mathbf{h}(\sigma\tau)$  в плоскости ортопрецессии бинормали  $\mathbf{b}(\sigma\tau)$  перманентно сферически ортогональна ей. При заключительном 5-ом дифференцировании вдоль мировой линии после (222A), (223 A), (233 A) и (244A) имеем *четвертую формулу*:

$$\frac{d\mathbf{h}(\sigma\tau)}{d\sigma\tau} = -Z(\sigma\tau) \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau) = -1/R_Z^{(m)} \cdot \mathbf{b}(\sigma\tau). \quad (246A)$$

Это соотношение вытекает из очевидного условия, что формально последующий и *последний* в получаемой серии абсолютный дифференциально-геометрический параметр пятого порядка при  $\lambda = 4$  является обязательно нулевым (то есть их цепь обрывается). Она, конечно, также имеет свой вещественный аналог для регулярных кривых, вложенных в евклидово пространство  $\langle \mathcal{E}^4 \rangle$  или  $\langle \mathcal{E}^{3+1} \rangle$ , и т. д.

В последовательности  $\ddot{\mathbf{E}}_{(m)} = \{ \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{h}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \}$  эти единичные векторы задают *полный абсолютный 4-х ортовый мгновенный псевдодекарттов базис* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ . Здесь они, по определению, составляют правую четвёрку базисных векторов, или *мгновенный псевдоортогональный репер*. (Ортопрецессия бинормали в окрестности точки М мировой линии совершается в  $\langle \mathcal{E}^3 \rangle_{\Gamma}^{(m)}$  как для правого винта в абсолютном 3-х ортовом суббазисе  $\dot{\mathbf{E}}_{(m)}^{(3)} = \{ \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{h}(\sigma\tau) \}$  при положительном значении величины  $L$ .) В указанном случае правая четвёрка базисных векторов  $\{ \mathbf{p}(\sigma\tau), \mathbf{b}(\sigma\tau), \mathbf{h}(\sigma\tau), \mathbf{i}(\sigma\tau) \}$  задаёт *характеристический подвижный четырехгранник* в  $\langle P^{3+1} \rangle$ .

Абсолютная мгновенная угловая скорость сферической ортопрецессии бинормали и вместе с тем сферической ротации триномали в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)}$  выражается в виде:



$$w_Z^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{h}\|_P}{d\tau} = c \cdot Z^{(m)} = c/R_Z^{(m)} = g_Z^{(m)}/c, \quad (247A)$$

где  $g_Z^{(m)} = g_Z(c\tau)$  — мгновенное *внутреннее ускорение ортопрецессии бинормали и ротации тринормали*. Как 4-вектор оно направлено по мгновенному вектору тринормали:

$$g_Z(c\tau) = c^2 \cdot Z^{(m)} \cdot \mathbf{h}^{(m)} = g_Z(c\tau) \cdot \mathbf{h}^{(m)}. \quad (248A)$$

*Абсолютная полная сферическая кривизна для общей сферической ротации бинормали  $\mathbf{b}(c\tau)$*  в векторной и скалярной формах определяется из (244A) в виде:

$$\left. \begin{aligned} I(c\tau) &= [-T(c\tau) \cdot \mathbf{p}(c\tau)] + [Z(c\tau) \cdot \mathbf{h}(c\tau)], \\ L(c\tau) &= \sqrt{T^2(c\tau) + Z^2(c\tau)} = 1/R_L^{(m)}, \end{aligned} \right\} \quad (249A)$$

$$w_L^{(m)} = \frac{\|d\mathbf{b}\|_P}{d\tau} = c \cdot L^{(m)} = c/R_L^{(m)} = g_L^{(m)}/c. \quad (250A)$$

Здесь  $g_L^{(m)} = g_L(c\tau)$  - мгновенное внутреннее ускорение общей сферической ротации бинормали (брутто-параметр). Как 4-вектор оно направлено по соответствующему суммарному вектору полной кривизны ротации бинормали  $I(c\tau)$ .

В свою очередь, тринормаль  $\mathbf{h}(c\tau)$ , согласно (246A), подвергается сферической ротации в плоскости  $\langle \mathcal{E}^2 \rangle_Z^{(m)}$  синхронно со второй частью сферической ротации бинормали. Эта часть ротации  $\mathbf{b}(c\tau)$  как единичного вектора имеет сферическую кривизну  $Z$  (радиус кривизны  $R_Z = 1/Z$ ) и направляющий орт  $\mathbf{h}(c\tau)$  - вектор тринормали. Поэтому ортопрецессию можно также определить как кривизну *третьего* порядка. В РТГ в базовом пространстве-времени Минковского это есть *максимальный порядок абсолютной кривизны мировой линии*. В ОТО в произвольном псевдоримановом пространстве-времени тот же порядок абсолютной кривизны мировой линии был бы не ограничен сверху в силу неопределённости размерности объемлющего его псевдоевклидова пространства.

Таким образом, в данной заключительной главе, с применением средств тензорной тригонометрии, была изложена геометрическая трактовка абсолютного движения материальной точки под действием активных сил любой природы, в том числе

гравитационных, как если бы оно происходило, согласно РТГ, в пространстве-времени Минковского и отображалось наблюдателем в каком-либо его универсальном базисе без искажения пространственно-временной гравитационной линзой, разделяющей материальную точку и данного наблюдателя. В частности, именно такое описание абсолютного движения должно иметь место в локальной окрестности этого пространства-времени, где проходит мировая линия указанной материальной точки.

## Приложение 2

### УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

#### 1. Температура тела

Рассмотрим физическое тело  $\Omega$ . Температуру его в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  обозначим через

$$u = u(x, y, z, t).$$

Покажем, что функция  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad ((x, y, z) \in \Omega) \quad (1)$$

или, если воспользоваться обозначением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (1')$$

которое называется *уравнением теплопроводности*. Оно является примером линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Рассмотрим элементарный кубик  $\sigma$  в теле  $\Omega$ , (рис. 1).

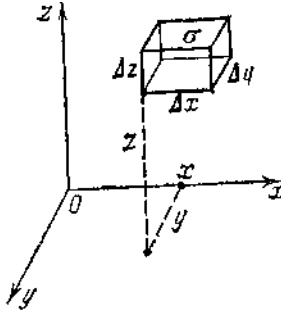


Рис.1

Количество тепла, проходящее через левую грань  $\sigma$  справа налево за промежуток времени  $(t, t + \Delta t)$ , равно с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Здесь  $\alpha$ —коэффициент теплопроводности тела, который мы считаем постоянным в любой его точке. Дело в том, что указанное количество тепла, очевидно, пропорционально числу  $\alpha$ , площади  $\Delta y \Delta z$  рассматриваемой грани, приращению времени  $\Delta t$  и скорости изменения

температуры в направлении оси  $x$ , равной частной производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .

Частная производная меняется в пределах грани, но, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно считать, что она всюду

на этой грани равна  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $(x, y, z, t)$ .

Количество тепла, проходящее через правую грань  $\sigma$  справа налево, очевидно, равно

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Количество же тепла, вошедшее в куб  $\sigma$  через левую и правую его грани за указанный промежуток времени, равно

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t) \Delta y \Delta z \Delta t \sim \\ \sim \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \end{aligned}$$

Общее количество тепла, вошедшее в  $\sigma$  за время  $(t, t + \Delta t)$ , очевидно, равно сумме количеств тепла, вошедших за это время через все грани  $\sigma$ :

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (2)$$

Но это число (количество тепла) равно также

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t, \quad (3)$$

где  $\beta$ —удельная теплоемкость тела, которую мы считаем постоянной во всех его точках.

Приравнивая величины (2), (3), после сокращений получим дифференциальное уравнение (1), где

$$a^2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Итак мы показали, что температура тела  $\Omega$  есть функция  $u = u(x, y, z, t)$ , удовлетворяющая уравнению (1), где  $a^2$ —положительная константа, физический смысл которой был выяснен выше. Впрочем, мы ограничились тем случаем, когда во всех точках тело имеет постоянную удельную теплоемкость и постоянный коэффициент теплопроводности.

Дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Чтобы найти среди них определенное решение, надо наложить на функцию  $u$  дополнительные условия. Обычно это так называемые *начальные* и *граничные условия*.

Ниже мы рассмотрим несколько математических задач, связанных с этим вопросом.

## 2. Задача Дирихле

Распределение тепла в теле называется *стационарным*, если температура  $u$  тела зависит от положения точки  $(x, y, z)$ , но не зависит от времени  $t$ , т. е.

$$u = u(x, y, z).$$

В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

и функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0.$$

**Определение.** Функция  $u(x, y, z)$  называется *гармонической* на области  $\Omega$ , если она имеет непрерывные частные производные второго порядка на  $\Omega$  и удовлетворяет на  $\Omega$  уравнению

$$\Delta u = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *уравнением Лапласа*. Справедлива

**Теорема 1.** Пусть ограниченная область  $\Omega$  пространства имеет кусочно-гладкую границу (поверхность)  $\Gamma$ , на которой задана непрерывная функция  $f(x, y, z)$ . Тогда существует на замыкании  $\bar{\Omega}$  единственная непрерывная функция  $u(x, y, z)$ , гармоническая на  $\Omega$ , такая, что

$$u|_{\Gamma} = f(x, y, z).$$

Теорема 1 имеет очевидную физическую интерпретацию. Если на границе  $\Gamma$  тела  $\Omega$  все время поддерживать температуру  $u$ , равную  $u|_{\Gamma} = f(x, y, z)$ , где  $f(x, y, z)$  — заданная непрерывная на  $\Gamma$  функция, то внутри тела установится вполне определенная (единственная) температура  $u(x, y, z)$ . Это утверждение с физической точки зрения надо считать очевидным. Но оно может быть доказано и математически. Эта задача, называемая *задачей Дирихле*, исследована очень хорошо, при этом даются различные приближенные методы ее решения.

Задача Дирихле имеет большое практическое применение и в плоском случае. В плоском случае она формулируется так.

На кусочно-гладкой границе  $\Gamma$  плоской области  $\Omega$  задана непрерывная функция  $f(x, y)$ . Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  и гармоническую на  $\Omega$ , т. е. имеющую вторые непрерывные частные производные и удовлетворяющую уравнению Лапласа на  $\Omega$ :

$$\Delta u = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Эта задача решается положительно: на  $\bar{\Omega}$  существует и притом единственная функция  $u(x, y)$ , удовлетворяющая требованиям этой задачи.

Особенно важны те случаи, когда задача Дирихле решается *эффективно*.

Ниже мы даем эффективное решение задачи Дирихле для круга.

### 3. Задача Дирихле для круга

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma$  есть открытый единичный круг с центром в начале прямоугольной системы координат  $x, y$  и на его границе  $\Gamma$  задана непрерывная (периода  $2\pi$ ) функция  $f(\theta)$ , где  $\theta$  — полярный угол точки  $\Gamma$ . Тогда на замыкании  $\bar{\sigma} = \sigma + \Gamma$  круга  $\sigma$  существует и притом единственная функция  $u(x, y)$ , непрерывная на  $\bar{\sigma}$ , гармоническая на  $\sigma$  и равная  $f(\theta)$  на  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = f(\theta). \quad (1)$$

В полярных координатах  $(\rho, \theta)$  функция  $u = u(\rho, \theta)$  записывается в виде ряда

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \begin{cases} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{cases} d\theta \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

— коэффициенты Фурье функции  $f(\theta)$ .

Мы докажем теорему 1 в предположении, что функция  $f(\theta)$  имеет вторую непрерывную производную, хотя теорема верна и если  $f(\theta)$  просто непрерывна.

Разложим функцию  $f(\theta)$  в ряд Фурье

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

Так как  $f(\theta)$  имеет вторую непрерывную производную, то

$$|a_k| \leq \frac{2M}{k^2}, \quad |b_k| \leq \frac{2M}{k^2} \quad (k \neq 0), \quad (3)$$

где константа  $M = \max_{-\pi < t < \pi} |f''(t)|$ . Имеем

$$|\rho^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)| \leq \rho^k (|a_k| + |b_k|) \quad (0 \leq \rho \leq 1),$$

и так как ряд

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \frac{|a_0|}{2} + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится, то по теореме Вейерштрасса ряд (2) равномерно сходится на  $\bar{\sigma}$ . Но тогда  $u(\rho, \theta)$  есть непрерывная на  $\bar{\sigma}$  функция, как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Кроме того,

$$u(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) = f(\theta),$$

т. е. выполняется свойство (1).

Каждый член ряда (2) удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0$$

Кроме того, имеют место равенства ( $0 \leq \rho < 1$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{k-1} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \rho^{k-2} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \rho^k (-a_k \cos k\theta - b_k \sin k\theta). \end{aligned} \right\} (4)$$

Почленное дифференцирование ряда (2) законно, потому что для любого положительного  $\rho_0 < 1$  члены, например, третьего ряда (4) не превышают соответственно

$$\rho_0^k k^2 \frac{4M}{k^2} = 4M \rho_0^k \quad (0 \leq \rho \leq \rho_0),$$

а ряд

$$4M \sum_1^{\infty} \rho_0^k < \infty \quad (0 < \rho_0 < 1)$$

сходится.

Поэтому сумма ряда (2)  $u(\rho, \theta)$  является решением поставленной задачи (является гармонической функцией).

Тот факт, что решение задачи Дирихле является единственным, мы доказывать не будем.

#### 4. Задача Дирихле для полуплоскости

Пусть в полуплоскости  $R_2^+ = \{-\infty < x < \infty, y > 0\}$  требуется найти ограниченное решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

Легко проверить, что функции

$$u_\lambda(x, y) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda y)$$

при любом фиксированном  $\lambda > 0$  являются ограниченными гармоническими на  $R_2^+$ , т. е. удовлетворяют на  $R_2^+$  уравнению (1). Но тогда сумма таких функций и даже интеграл по параметру также будет решением уравнения (1):

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda y) d\lambda, \tag{3}$$

лишь бы было законно дифференцирование под знаком интеграла по параметрам  $x$  и  $y$ . Функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  найдем из условия (2)

$$u(x, 0) = \int_0^{\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = \varphi(x). \quad (4)$$

Запишем разложение функции  $\varphi(x)$  в интеграл Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^{\infty} \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right) \cos \lambda x + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая формулы (4) и (5), мы видим, что

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi. \quad (6)$$

Подставляя эти функции в (3), получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda y) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cos \lambda(t-x) dt \right] d\lambda = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda y) \cos \lambda(t-x) d\lambda \right] dt. \end{aligned}$$

Интегрируя данное уравнение по частям, имеем

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{y^2 dt}{y^2 + (t-x)^2}. \quad (3')$$

**Замечание 1.** Пусть функция  $\varphi(x)$  имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0; \quad M_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(k)}(x)| dx < \infty \\ (k=0, 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Тогда из (6) следуют оценки

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{c}{1+\lambda^4}, \quad |\beta(\lambda)| \leq \frac{c}{1+\lambda^4}, \quad (7)$$

где  $c$  — некоторая постоянная. В самом деле, если  $|\lambda| < 1$ , то

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\xi)| d\xi = M_0 \leq \frac{2M_0}{1+\lambda^4}. \quad (8)$$

Если же  $|\lambda| \geq 1$ , то, интегрируя по частям четыре раза, получим



$$\begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \varphi(\xi) \frac{\sin \lambda \xi}{\lambda} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) \sin \xi \lambda d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi \lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) \sin \lambda \xi d\xi = \dots = \frac{1}{\pi \lambda^4} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(4)}(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \end{aligned}$$

откуда

$$|\alpha(\lambda)| \leq \frac{M_4}{\lambda^4} \leq \frac{2M_4}{1+\lambda^4}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует первое неравенство (7). Второе неравенство (7) доказывается аналогично.

Оценки (7) обеспечивают существование, непрерывность и ограниченность функций

$$u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

в верхней полуплоскости  $R^+$ .

**Замечание 2.** Можно доказать, что если функция  $\varphi(x)$  непрерывна и ограничена на  $(-\infty, \infty)$ , то полученное при помощи формулы (3') решение задачи Дирихле для верхней полуплоскости единственно в классе ограниченных функций.

## 5. Уравнение теплопроводности в стержне

Рассмотрим тонкий изолированный (покрытый тепловой изоляцией) стержень, лежащий на отрезке  $[0, \pi]$  оси  $x$  (рис. 2).

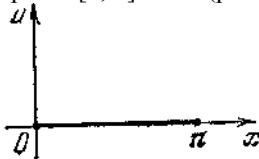


Рис. 2.

Предполагается, что его физические свойства в точках любого его сечения одинаковы. Поэтому температура стержня есть функция

$$u = u(x, t)$$

от абсциссы  $x$  сечения и времени  $t$ .

На основании сказанного в § 1 функция  $u$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных про-изводных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $a^2 > 0$ —константа, если предположить, что теплоемкость и теплопроводность стержня не зависят от  $x$ .

Поставим задачу: найти функцию  $u(x, t)$ , непрерывную для  $t \geq 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , имеющую непрерывные частные

производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial u}{\partial t}$  для  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению (1) для  $t > 0$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , и следующим условиям:

1) начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (2)$$

где  $f(x)$  — заданная на отрезке  $[0, \pi]$  непрерывная функция;

2) граничным условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (\forall t \geq 0). \quad (3)$$

Таким образом, предполагается, что в начальный момент времени  $t=0$  температура в стержне выражается функцией  $f(x)$  (см. (2)), а на протяжении всего времени опыта на концах стержня искусственно поддерживается температура нуль (см. (3)).

Уравнение (1) будем решать *методом Фурье* разделения переменных.

Суть его заключается в том, что мы отыскиваем частные решения уравнения (1), удовлетворяющие пока только краевым условиям (3), в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одного переменного:

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (4)$$

При этом мы ищем нетривиальные решения, т. е. тождественно не равные нулю. Из (4) имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t) \frac{d^2 X}{dx^2} = TX'', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}. \quad (5)$$

В (5) левая часть не зависит от  $x$ , а правая—от  $t$ , поэтому

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu, \quad (6)$$

где  $\mu$ —некоторая постоянная.

Таким образом, функции  $X(x)$  и  $T(t)$  удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X'' + \mu X = 0, \quad (7)$$

$$T' + a^2 \mu T = 0, \quad (8)$$

где  $\mu$ —некоторая постоянная.

Так как мы ищем решения, удовлетворяющие условиям (3), то при всех  $t$  должны выполняться равенства

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0.$$

Если предположить, что  $T(t) = 0, \forall t$ , то  $u(x, t) \equiv 0$  для всех  $x$  и  $t$ . Поэтому имеется хотя бы одно  $t$ , для которого  $T(t) \neq 0$ . Но тогда

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Мы пришли к следующей задаче. Требуется найти такие числа  $\mu$ , для которых дифференциальное уравнение (7) имеет нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение на отрезке  $[0, \pi]$ , удовлетворяющее граничным условиям (9).

Задача эта называется *проблемой Штурма—Лиувилля* для уравнения (7) на отрезке  $[0, \pi]$  при граничных условиях (9). Искомые числа  $\mu$  называются *собственными значениями* задачи Штурма—Лиувилля, а соответствующие нетривиальные функции, удовлетворяющие граничным условиям (9) называются *собственными функциями*, соответствующими этим значениям.

Будем искать решение поставленной задачи среди положительных чисел  $\mu = \lambda^2 > 0$  ( $\lambda > 0$ ). В этом случае числа  $\pm i\lambda$  являются корнями характеристического уравнения, поэтому общее решение уравнения (7) запишется так:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из (9) находим

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1, \\ 0 &= C_1 \cos \lambda\pi + C_2 \sin \lambda\pi, \end{aligned} \right\} \text{или} \quad \left. \begin{aligned} C_1 &= 0, \\ C_2 \sin \lambda\pi &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Чтобы получить решение, тождественно не равное нулю, нужно считать  $C_2 \neq 0$  и  $\sin \lambda\pi = 0$ . Последнее возможно только при натуральных  $\lambda = k = 1, 2, 3, \dots$ . Каждому  $k$  соответствует решение

$$X_k(x) = d_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

удовлетворяющее, очевидно, граничным условиям (9). Это нетривиальное (тождественно не равное нулю) решение уравнения (7).

Итак, числа

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

суть *собственные значения* поставленной выше краевой задачи (проблемы Штурма—Лиувилля), а функции

$$X_k = d_k \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

при  $d_k \neq 0$ —соответствующие этим значениям *собственные функции*.

Мы нашли все собственные значения и собственные функции поставленной задачи Штурма—Лиувилля, потому что при любом  $\mu \leq 0$

дифференциальное уравнение (7) имеет только тривиальное (тождественно равное нулю) решение, удовлетворяющее условиям  $X(0) = X(\pi) = 0$ .

В самом деле, при  $\mu = -\lambda^2 < 0$  общее решение уравнения (7) имеет вид  $X = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ ,

Найдем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  из условия (9):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= C_1 e^{\lambda\pi} + C_2 e^{-\lambda\pi}, \end{aligned} \right\}$$

Определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\pi} & e^{-\lambda\pi} \end{vmatrix} = e^{-\lambda\pi} - e^{\lambda\pi} \neq 0,$$

поэтому система имеет только тривиальное решение  $C_1 = C_2 = 0$ . Таким образом, частного решения уравнения (7), тождественно не равного нулю и удовлетворяющего условиям (9), не существует при  $\mu = -\lambda^2 < 0$ .

Если  $\mu = 0$ , то характеристическое уравнение имеет число нуль кратным корнем, поэтому общее решение (7) запишется

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Учитывая краевые условия, получаем  $C_1 = 0$ ,  $C_1 + C_2 \pi = 0$ , откуда  $C_1 = C_2 = 0$  и  $X(x) = 0$ .

Остается решить уравнение (8) при найденных  $\mu_k = -k^2$ :

$$T' + a^2 k^2 T = 0, \quad \frac{dT}{T} = -a^2 k^2 dt, \quad T(t) = A_k \exp(-a^2 k^2 t),$$

где  $A_k$  — произвольная постоянная.

Итак,

$$u_k(x, t) = b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx \quad (b_k = A_k d_k) \quad (10)$$

— суть частные решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям (3).

Легко видеть, что конечная сумма

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx,$$

где  $b_k$  — произвольные постоянные, в свою очередь представляют собой решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям  $u_N(0, t) = u_N(\pi, t) = 0$ . Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx \quad (11)$$

при достаточно малых коэффициентах  $b_k$  будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ .

Теперь мы подбираем числа  $b_k$  так, чтобы выполнялось равенство

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (0 \leq x \leq \pi). \quad (12)$$

Числа  $b_k$  подбираются единственным образом—именно по формуле

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt,$$

т. е. они должны быть коэффициентами Фурье функции  $f$ .

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ , то ряд (12) сходится к ней в смысле среднего квадратического на  $[0, \pi]$ .

Если окажется, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$$

сходится, то вследствие неравенств

$$|b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx| \leq |b_k|, \quad (13)$$

ряд (11) равномерно сходится и его сумма есть непрерывная функция для  $t \geq 0$ .

При  $t > 0$  ряд (11) сходится очень быстро—его можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. В частности,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

откуда видно, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Законность равенств (14), т. е. почленной дифференцируемости ряда (11) при  $t > 0$ , может быть прослежена следующим образом. Если задано  $t > 0$ , то возьмем  $t_0$  так, чтобы  $0 < t_0 < t$ . Тогда, например, в случае первого ряда (14), считая, что  $|b_k| \leq M$ , будем иметь

$$|k^2 b_k \exp(-a^2 k^2 t) \sin kx| \leq M k^2 \exp(-a^2 k^2 t_0).$$

Но ряд из положительных (постоянных!) чисел

$$M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \exp(-a^2 k^2 t_0) < \infty$$

сходится (что можно проверить по признаку Даламбера или Коши), а это вместе с оценкой (13) показывает, что почленное дифференцирование два раза по  $x$  произведено законно.

**Замечание.** Выше мы получили, что задача Штурма—Лиувилля

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0 \quad (15)$$

имеет собственные значения

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 4, \mu_3 = 9, \dots, \mu_k = k^2, \dots \quad (16)$$

Они положительны и им соответствуют собственные функции

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin kx, \dots, \quad (17)$$

образующие ортогональную систему на отрезке  $[0, \pi]$ :

$$\int_0^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = 0 \quad (k \neq l).$$

Из теории тригонометрических рядов известно, что система (17) полна в  $L_2(0, \pi)$ , т.е. ряд Фурье произвольной кусочно-непрерывной на отрезке  $[0, \pi]$  функции по этой системе сходится к ней в смысле среднего квадратического.

Некоторые сведения, обобщающие эти факты, читатель может найти далее в п.10.

## 6. Теплопроводность для бесконечного стержня

Согласно п.5 температура  $u(x, t)$  точки  $x$  стержня в момент времени  $t$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Будем рассматривать бесконечный стержень ( $-\infty < x < \infty$ ). Краевые условия при этом отпадают, поэтому мы будем искать ограниченное решение уравнения (1), удовлетворяющее только начальному условию

$$u|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

где функция  $\varphi(x)$  определена на всей действительной оси. Будем предполагать, что функция  $\varphi$  непрерывна и принадлежит  $L'(-\infty, \infty)$ .

Эту задачу мы будем называть *задачей Коши* для уравнения (1).

Для упрощения записи ниже будем считать  $a = 1$ .

Чтобы решить поставленную задачу, применим метод Фурье разделения переменных. Частное решение будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

Подставляя эту функцию в (1), получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \mu,$$

$$T' = \mu T, \quad (3)$$

$$X'' = \mu X. \quad (4)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$T(t) = C \exp(\mu t).$$

Из физических соображений ясно, что температура  $u(x, t) = X(x) T(t)$  не может возрастать неограниченно при  $t \rightarrow \infty$ . Значит, постоянная  $\mu$  должна быть отрицательной. Положим  $\mu = -\lambda^2$ . Тогда решение уравнения (4)

$$X(x) = A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x.$$

Функция

$$u_\lambda(x, t) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 t) \quad (5)$$

есть частное решение уравнения (1) при всех  $\lambda$ . Но тогда сумма таких решений и даже интеграл по параметру  $\lambda$  от функции (5) также будет решением уравнения (1):

$$u(x, t) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda. \quad (6)$$

Конечно, функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  должны достаточно быстро убывать к нулю, чтобы законно было дифференцирование (6) по параметрам  $x$  и  $t$ . Функции  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  находим из начального условия

$$u(x, 0) = \int_0^\infty [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = \varphi(x). \quad (7)$$

Запишем разложение функции  $\varphi$  в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_0^\infty \left\{ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi \right) \cos \lambda x + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda. \quad (8) \end{aligned}$$

Сравнивая (7) и (8), мы видим, что надо считать

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \cos \xi \lambda d\xi, \quad \beta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \varphi(\xi) \sin \xi \lambda d\xi. \quad (9)$$

Подставляя эти значения в (6), получаем

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi \right] \exp(-\lambda^2 t) d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda^2 t) \cos \lambda \xi d\lambda \right] d\xi = \left( \lambda = \frac{z}{\sqrt{t}} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \cos \frac{\xi z}{\sqrt{t}} \frac{dz}{\sqrt{t}} \right] d\xi = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + \xi) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi + x) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) d\xi. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Итак, задача (1), (2) решена полностью.

**Замечание.** Если функция  $\varphi$  удовлетворяет условиям, отмеченным в замечании 1 п.4, то решение задачи Коши, полученное по формуле (10), непрерывно и ограничено вместе со своими производными  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и является единственным решением в классе ограниченных функций.

## 7. Малые колебания струны

*Струной* называется тонкая нить, работающая на растяжение, но не на изгиб. Если ненатянутую струну мягь, она не сопротивляется, однако если ее растягивать, то в ней возникают напряжения.

Пусть концы куска натянутой струны закреплены в точках  $x = a$ ,  $x = b$  оси  $x$ . Будем считать, что величина возникающего в ней напряжения равна числу  $T$ . Плотность струны будем считать равной числу  $\rho$  на всем ее протяжении. В момент времени  $t=0$  выведем нашу струну из равновесия, например оттянем пальцем и предоставим ей свободно колебаться (дрожать)—совершать малые колебания.

Отклонение струны в любой ее точке, имеющей абсциссу  $x$ , в момент времени  $t$  обозначим через

$$u = u(x, t) \quad (a \leq x \leq b, t \geq 0).$$

Выведем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция  $u$ .

На рис. 3 изображен график нашей струны в момент времени  $t$ .



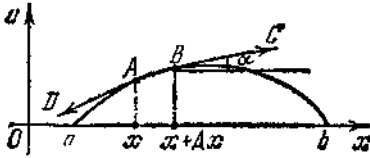


Рис. 3

На элемент ее, соответствующий отрезку  $[x, x + \Delta x]$ , действуют две силы натяжения  $\vec{BC}$  и  $\vec{AD}$ . Скалярная величина каждой из этих сил равна  $T$ :

$$|\vec{BC}| = |\vec{AD}| = T.$$

Сила  $\vec{BC}$  приложена к точке  $B$ , имеющей абсциссу  $x + \Delta x$ , направлена по касательной к струне в этой точке и образует с положительным направлением оси  $x$  угол  $\alpha$ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Так как струна совершает малые колебания, то можно считать приближенно

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha \approx \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Проекция силы  $\vec{BC}$  на ось  $u$ , очевидно, равна

$$T \sin \alpha \approx T \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Проекция же силы  $\vec{AD}$  на ось  $u$ , очевидно, равна

$$-T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Сумма этих проекций равна

$$T \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x.$$

Мы пренебрегаем бесконечно малыми более высокого порядка, чем  $\alpha$ , потому что рассматриваем, как говорят, малые колебания струны. С другой стороны, произведение массы на ускорение рассматриваемого элемента струны равно

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Поэтому на основании закона Ньютона

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

Сокращая на  $\Delta x$ , получим дифференциальное уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( a^2 = \frac{T}{\rho} \right). \quad (1)$$

Теперь математическую задачу, к которой приводит изучение свободных колебаний струны, можно сформулировать так: требуется решить линейное дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка (1) при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad (2)$$

и при краевых условиях

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия (2) показывают, в каком положении находилась струна в начальный момент времени и какова скорость каждой ее точки при  $t = 0$ . Функции  $f(x)$  и  $F(x)$ —заданные функции.

Краевые условия (3) показывают, что концы струны закреплены в точках  $a = 0$  и  $b = \pi$ .

Решение поставленной задачи можно провести методом Фурье (так же как в п..5). Ищем сначала решение уравнения (1) в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t), \quad (4)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} X(0) T(t) &= 0, \\ X(\pi) T(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

для всех  $t > 0$ . Но тогда

$$X(0) = X(\pi) = 0,$$

потому что иначе было бы  $T(t) \equiv 0$  и  $u(x, t) \equiv 0$ .

Подставляя произведение (4) в (1), получим

$$X T'' = a^2 X'' T,$$

или

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Но функция от  $t$  может равняться функции от  $x$ , только если обе они равны постоянному числу, которое мы обозначим через  $-\mu$ :

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -\mu.$$

В результате получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X'' + \mu X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (6)$$

$$T'' + a^2 \mu T = 0. \quad (7)$$

Уравнение (6) надо решить с краевыми условиями  $X(0) = X(\pi) = 0$ , т. е. надо решить для этого уравнения проблему Штурма—Лиувилля (см. п.5). Как показано в п.5, решением этой проблемы являются числа (собственные значения)

$$\mu_k = k^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и соответствующие им нетривиальные функции (собственные функции)

$$X_k(x) = \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

удовлетворяющие при этих числах условиям (5).

Общее решение уравнения (7) при найденных  $\mu_k = k^2$  имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos akt + B_k \sin akt \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Следовательно, все решения дифференциального уравнения (1) вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (5), можно записать в виде

$$u_k(x, t) = (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где постоянные  $A_k, B_k$  для каждого  $k$  могут быть взяты произвольно. Но тогда и любые суммы

$$\sum_{k=1}^N (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx$$

суть решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (5). Вместе с этими суммами обладают этим свойством и суммы бесконечных рядов

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos akt + B_k \sin akt) \sin kx, \quad (8)$$

если числа  $A_k$  и  $B_k$  достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Теперь в нашем распоряжении имеется большой запас функций  $u(x, t)$ , удовлетворяющих уравнению (1) и граничным условиям (3),— они определяются формулой (8), где числа  $A_k, B_k$ —произвольные, лишь бы выполнялись указанные условия сходимости.

Чтобы найти решение поставленной задачи, удовлетворяющее начальным условиям (2), дифференцируем (8) по  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} ak (-A_k \sin akt + B_k \cos akt) \sin kx$$

и приравняем (8) и (9) при  $t = 0$  заданным функциям  $f(x)$  и  $F(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx, \quad F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} akB_k \sin kx. \quad (10)$$

Отсюда

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt, \quad B_k = \frac{2}{\pi ak} \int_0^{\pi} F(t) \sin kt \, dt. \quad (11)$$

Если функции  $f(x)$  и  $F(x)$  непрерывные на  $[0, \pi]$ , то этого достаточно, чтобы можно было вычислить числа  $A_k, B_k$  по формулам (11) и ряды (10) будут сходиться к этим функциям во всяком случае в смысле среднего квадратического. Конечно, если функции  $f(x)$  и  $F(x)$  не только непрерывны, но и имеют непрерывные производные (достаточно третьего порядка), то сумма ряда (8) уже заведомо будет иметь вторые непрерывные производные.

## 8. Колебание бесконечной струны. Формула Даламбера

Если струна очень длинная, то на колебания, возникающие где-то в ее середине, концы струны будут оказывать малое влияние.

Поэтому, рассматривая свободные колебания неограниченной струны, мы должны решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

только при начальных условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

$$u'_t(x, 0) = F(x). \quad (3)$$

Такая задача называется *задачей Коши* или *задачей с начальными условиями*.

Эту задачу удобно решить следующим образом. Введем новые переменные

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (4)$$

тогда уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5), очевидно, является функция

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$ —произвольные функции, которые мы будем считать дважды дифференцируемыми.

Возвращаясь к старым переменным, получаем решение уравнения (1) в форме

$$u(x, t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at). \quad (6)$$

Непосредственным дифференцированием (6) легко убедиться, что это действительно так. Имеем

$$\begin{aligned} u'_x &= \varphi'(x-at) + \psi'(x+at), \\ u'_t &= -a\varphi'(x-at) + a\psi'(x+at), \\ u''_{xx} &= \varphi''(x-at) + \psi''(x+at), \\ u''_{tt} &= a^2\varphi''(x-at) + a^2\psi''(x+at), \end{aligned}$$

т. е.

$$a^2 u''_{xx} = u''_{tt}.$$

Полученное решение (6), зависящее от двух произвольных функций, называется *решением Даламбера*.

Используя начальные условия, найдем функции  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x), \quad (7)$$

$$-a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x). \quad (8)$$

Интегрируя (8) на отрезке  $[0, x]$ , получим

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(y) dy + C, \quad (9)$$

где  $C$ —произвольная постоянная. Из (7) и (9) находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy - \frac{C}{2}, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(y) dy + \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Теперь решение задачи Коши запишется

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \varphi(x-at) + \psi(x+at) = \\ &= \frac{1}{2} f(x-at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} F(y) dy + \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} F(y) dy, \end{aligned}$$

или

$$u(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) dy. \quad (11)$$

Формула (11) называется *формулой Даламбера*.

## 9. Колебание круглой мембраны

Пусть круглая мембрана радиуса 1 в состоянии покоя занимает круг радиуса 1 с центром в начале полярной системы координат  $r, \varphi$  (рис. 4).

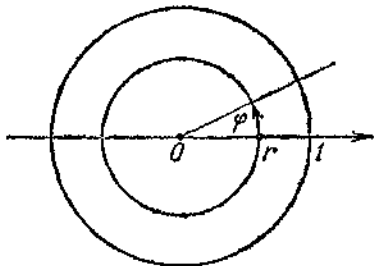


Рис. 4.

Будем считать, что мембрана закреплена по окружности  $r = 1$ . Если теперь подействовать на мембрану некоторой силой, то отклонение точек мембраны  $u$  будет функцией координат  $r, \varphi$  и времени  $t$ :

$$u = u(r, \varphi, t).$$

Так же как и в п.7, можно получить уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad (1)$$

Для уравнения (1) мы будем решать задачу с краевым условием

$$u|_{r=1} = 0 \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = f(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(r). \quad (3)$$

Мы рассматриваем, таким образом, осесимметрическое колебание мембраны, при котором все точки окружности радиуса  $r \leq 1$  с центром в начале координат в начальный момент времени имеют скорости и отклонения, не зависящие от угла  $\varphi$ . Таким образом, и функция  $u$  будет зависеть только от  $r$  и  $t$  и уравнение (1) упрощается;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) с условиями (2), (3) можно найти методом Фурье. Ищем сначала все решения вида

$$u(r, t) = U(r) T(t).$$

Легко показать (как в п.7), что функции  $T(t)$  и  $U(r)$  удовлетворяют уравнениям

$$T'' + \mu^2 a^2 T = 0, \quad (5)$$

$$U'' + \frac{1}{r} U' + \mu^2 U = 0. \quad (6)$$

Таким образом, надо найти числа  $\mu$ , для которых уравнение (6) имеет нетривиальное решение  $U(r)$ , удовлетворяющее граничному условию

$$U(1) = 0. \quad (7)$$

Эти числа  $\mu$  называются *собственными значениями* данной задачи Штурма—Лиувилля, а функции  $U(r)$  — им принадлежащими *собственными функциями*.

**Замечание.** В п.7 рассматривалась задача Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными условиями ( $X(0) = X(\pi) = 0$ ). В данной же задаче, тоже для уравнения второго порядка, фигурирует только одно граничное условие ( $U(1) = 0$ ). Это происходит потому, что данное уравнение имеет особенность в точке  $r = 0$ , вследствие которой это уравнение имеет наряду с ограниченными и неограниченными решениями. Фактически и в данном случае ищутся собственные функции, удовлетворяющие двум граничным условиям: первое условие—собственная функция  $U(r)$  должна быть ограничена в окрестности  $r = 0$  и второе условие —  $U(1) = 0$ .

Чтобы получить решение уравнения (6), введем новую переменную

$$\rho = r\mu, \quad V(\rho) = U(\rho/\mu).$$

Тогда уравнение (6) превращается в такое же уравнение, но при  $\mu=1$ :

$$V''(\rho) + \frac{1}{\rho} V'(\rho) + V(\rho) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) уже изучалось ранее. Оно имеет два линейно независимых решения, одно из них неограничено в окрестности точки  $\rho = 0$ , а другое есть функция Бесселя нулевого порядка

$$J_0(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\rho^{2k}}{2^{2k} (k!)^2},$$

где степенной ряд справа сходится на интервале  $-\infty < \rho < \infty$ .

Всевозможные ограниченные в окрестности нулевой точки решения уравнения (8) имеют вид  $CJ_0(\rho)$ , где  $C$ —произвольная постоянная.

Соответствующие функции

$$CJ_0(r\mu)$$

и будут нужными нам ограниченными на  $[0, 1]$  решениями уравнения (6).

Теперь остается подобрать  $\mu$  так, чтобы выполнялось граничное условие

$$J_0(1 \cdot \mu) = 0.$$

Мы видим, что число  $\mu$  должно быть корнем функции  $J_0(r)$ . Хорошо известно, что функция  $J_0(r)$  имеет бесконечное число нулей:  $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ . Например,

$$\mu_1 = 2,40; \quad \mu_2 = 5,52; \quad \dots$$

Итак числа  $\mu_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ) суть собственные значения, а  $J_0(\mu_k r)$  им принадлежащие собственные функции нашей краевой задачи. Эти функции можно умножать на произвольные постоянные  $c_k \neq 0$  и получать снова собственные функции

$$c_k J_0(\mu_k r) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

принадлежащие числам  $\mu_k$ .

При  $\mu = \mu_k$  решение уравнения (5) запишется

$$T_k(t) = a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at.$$

Соответствующие решения уравнения в частных производных (4), удовлетворяющие граничному условию (2), имеют вид

$$u_k(r, t) = (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r),$$

где  $a_k, b_k$ —произвольные постоянные. Но тогда и сумма бесконечного ряда

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \mu_k at + b_k \sin \mu_k at) J_0(\mu_k r) \quad (9)$$

является решением уравнения (4), удовлетворяющим граничному условию (2), конечно, если числа  $a_k$  и  $b_k$  достаточно быстро стремятся к нулю, чтобы эти ряды можно было два раза почленно дифференцировать.

Чтобы найти решение поставленной задачи, коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  находим из начальных условий (3):

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) = f(r), \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a \mu_k b_k J_0(\mu_k r) = F(r). \quad (11)$$

Функции Бесселя  $J_0(\mu_k r)$  обладают свойствами, сходными со свойствами тригонометрических функций. Так, если функция  $f(r)$  кусочно-гладкая на  $[0, 1]$ , то она непременно разлагается в ряд вида (10) (с постоянными коэффициентами  $a_k$ ), сходящийся к ней, во всяком случае, в смысле среднего квадратического (см. также п.10).

Мы знаем, что тригонометрические функции ортогональны на  $[0, 2\pi]$ . Функции Бесселя  $J_0(\mu_k r)$  тоже ортогональны на  $[0, 1]$ , но, как говорят, с весом  $x$ :



$$\int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_l x) dx = 0 \quad (k \neq l). \quad (12)$$

Отсюда следует, как мы это докажем ниже, что в равенствах (10), (11) числа  $a_k, b_k$  необходимо вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) f(x) dx}{\int_0^1 x [J_0(\mu_k x)]^2 dx}, \quad a_k b_k = \frac{\int_0^1 x J_0(\mu_k x) F(x) dx}{\int_0^1 x [J_0(\mu_k x)]^2 dx} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

Система непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots \quad (14)$$

называется *ортogonalной на  $[a, b]$  с весом  $\rho(x) \geq 0$* , где  $\rho(x)$  непрерывная функция, если выполняются равенства

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l). \quad (15)$$

Если функция  $f(x)$  разложена в равномерно сходящийся на  $[a, b]$  ряд по функциям  $\varphi_k(x)$  системы (14):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (16)$$

то

$$c_m = \frac{\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) f(x) dx}{\int_a^b \rho(x) [\varphi_m(x)]^2 dx} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (17)$$

В самом деле, после умножения ряда на  $\rho(x) \varphi_m(x)$  его равномерная сходимость не нарушается и почленное интегрирование по  $[a, b]$  в силу свойств (15) приводит к равенству

$$\int_a^b \rho(x) \varphi_m(x) f(x) dx = c_m \int_a^b \rho(x) [\varphi_m(x)]^2 dx \quad (m = 1, 2, \dots),$$

откуда и получаем формулы (17).

Докажем (12). Функция  $J_0(\mu_k x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) + \mu_k^2 J_0(\mu_k x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Умножая уравнение со значком  $k$  на  $xJ_0(\mu_n x)$ , а уравнение с индексом  $n$  на  $xJ_0(\mu_k x)$  и вычитая из одного другое, получим

$$x \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d^2}{dx^2} J_0(\mu_n x) \right] + \\ + \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right] + \\ + (\mu_k^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) = 0.$$

Легко проверить, что это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[ J_0(\mu_n x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_k x) - J_0(\mu_k x) \frac{d}{dx} J_0(\mu_n x) \right] \right\} + \\ + (\mu_k^2 - \mu_n^2) x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) = 0.$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от 0 до 1, получим

$$(\mu_k^2 - \mu_n^2) \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0 \quad (k \neq n),$$

так как интеграл от первого слагаемого равен нулю в силу того, что  $J_0(\mu_k) = J_0(\mu_n) = 0$ .

## 10. Общая задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda \rho(x) - q(x)] y(x) = 0, \quad (1)$$

где  $p(x)$  — непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[0, 1]$  функция, а  $\rho(x)$  и  $q(x)$  — непрерывные на этом отрезке функции. При этом  $p(x) > 0$ ,  $\rho(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$  на  $[0, 1]$  и  $\lambda$  — постоянное число.

Поставим задачу (Штурма—Лиувилля). Требуется найти все числа  $\lambda$  (собственные значения), для которых существует нетривиальное дважды непрерывно дифференцируемое решение  $y(x)$  уравнения (1) (собственная функция), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \alpha y(0) - \beta y'(0) &= 0, \\ \gamma y(1) + \delta y'(1) &= 0, \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — постоянные числа ( $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta > 0$ ;

$$\gamma \geq 0, \delta \geq 0, \gamma + \delta > 0).$$

Можно доказать, что:

1) Существует счетное множество собственных значений задачи  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  ( $\lambda_n \rightarrow \infty$ ),

которым соответствуют собственные функции  $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$

- 2) При  $q(x) \geq 0$  все собственные значения  $\lambda_n$  неотрицательны.  
 3) Собственные функции на отрезке  $[0, l]$  образуют ортогональную и нормированную систему с весом  $\rho(x)$ :

$$\int_0^l \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

4) **Теорема Стеклова.** Всякая функция  $f(x)$ , удовлетворяющая краевым условиям (2) и имеющая непрерывную первую производную и кусочно-непрерывную вторую производную, разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям  $y_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \int_0^l \rho(x) y_n(x) f(x) dx.$$

**Задача 1.** Решить уравнение свободных колебаний струны при наличии сопротивления среды

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при начальных и краевых условиях

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

При решении предполагать, что коэффициент трения  $m$  мал ( $m < a$ ).

Ответ. 
$$u(x, t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \sin kx,$$

где

$$q_k = \sqrt{(ka)^2 - m^2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi q_k} \int_0^{\pi} F(x) \sin kx dx + \frac{ma_k}{q_k}.$$

**Задача 2.** Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad u(\pi, t) = u_0, \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

Ответ.

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cos \lambda_k x,$$

где

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2}, \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos \lambda_k x dx - \frac{2u_0}{\pi \lambda_k}.$$

**Указание.** Решение искать в виде  $u = u_0 + v(x, t)$ , где  $v(x, t)$  — неизвестная функция.

**Задача 3.** Доказать свойство 3) ортогональности собственных функций задачи Штурма—Лиувилля (1) на  $[0, l]$ , удовлетворяющих граничным условиям (2).

**Указание.** Необходимо следовать схеме доказательства ортогональности функций Бесселя (см. п.9).

**Задача 4.** Привести уравнение (Чебышева)

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \quad (3)$$

к виду (1) на  $[-1, 1]$ .

**Указание.** Умножить левую и правую части уравнения (3) на  $\rho(x) > 0$  и найти функцию  $\rho(x)$  из условия

$$-x\rho'(x) = [(1-x^2)\rho'(x)]' \quad (\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}).$$

**Задача 5.** Найти весовую функцию  $\rho(x)$  для уравнения (Чебышева—Лагерра)

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

*Ответ.*  $\rho(x) = \exp(-x)$ ,  $0 \leq x < \infty$ .

## 11. Интеграл энергии (Дирихле)

В пространстве  $x, y, z$  пусть задан достаточно гладкий замкнутый контур  $\Gamma$ , определенный в параметрической форме уравнениями

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \chi(s) \quad (0 \leq s \leq l). \quad (1)$$

Проекцию  $\Gamma$  на плоскость  $(x, y)$

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s) \quad (2)$$

обозначим через  $\Omega$ . Будем считать, что  $\Gamma$  проектируется на плоскость  $x, y$  взаимно однозначно, т. е. контур  $\Gamma$  самонепересекается и ограничивает некоторую область  $\Omega$  плоскости  $x, y$  (рис. 5).

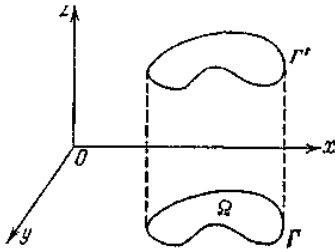


Рис. 5

Пусть на  $\Gamma$  натянута мембрана, т. е. пленка, работающая на растяжение, но не на изгиб. Требуется найти ее уравнение

$$z = u(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega). \quad (3)$$

Край мембраны закреплен на  $\Gamma$ , поэтому функция  $u(x, y)$  удовлетворяет граничному условию

$$u|_{\Gamma} = \chi(s) = u(\varphi(s), \psi(s)) \quad (0 \leq s \leq l). \quad (4)$$

Можно доказать, что потенциальная энергия мембраны, с точностью до множителя, характеризующего ее физические свойства, выражается кратным (двойным) интегралом

$$D[u] = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5)$$

который называют *интегралом Дирихле* функции  $u(x, y)$ . Если при помощи внешних сил мембране придать другую форму

$$z = v(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega),$$

оставляя ее закрепленной в  $\Gamma$ , то ее энергия будет равна

$$D[v] = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5')$$

а сама она будет по-прежнему удовлетворять граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = \chi(s) = v[\varphi(s), \psi(s)] \quad (0 \leq s \leq l). \quad (4')$$

В этом состоянии она будет еще больше напряжена, поэтому  $D[v] \geq D[u]$ .

Следовательно,  $u(x, y)$  можно определить как такую функцию, интеграл Дирихле которой обращается в минимум среди интегралов энергии для всевозможных указанных функций  $v$ :

$$D[u] = \min_{v|_{\Gamma} = \chi(s)} D[v]. \quad (6)$$

Введем класс  $W$  функций  $v(x, y)$ , имеющих непрерывные частные производные на  $\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma$  и удовлетворяющих граничным условиям таким же, как  $u$ :

$$v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}.$$

Функций  $v$ , принадлежащих классу  $W$ , бесконечное множество. Одна из них есть искомая функция  $u(x, y)$ , обращающая  $D[v]$  в минимум среди всех  $v \in W$ :

$$D[u] = \min_{v \in W} D[v]. \quad (7)$$

Отметим, что если каждой функции  $f$  из некоторого класса функций  $E$  ( $f \in E$ ) в силу некоторого закона приведено в соответствие число  $F(f)$ , то говорят, что  $F(f)$  есть *функционал*, определенный на классе функций  $E$ .

Интеграл Дирихле  $D[v]$  является примером функционала, определенного на классе функций  $W$ .

Для функционалов, так же как для обычных функций, можно рассматривать теорию экстремумов, называемую *вариационным исчислением*. Приращением или *вариацией аргумента функционала*  $F(f)$  называется разность между двумя функциями из класса  $E$ :

$$\delta f = f_1(x) - f(x).$$

По аналогии с понятием дифференциала функции

$$df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0} = f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x \Big|_{\alpha=0} = f'(x) \Delta x$$

(где  $\alpha$  — произвольное действительное число) можно ввести понятие *вариации функционала*

$$\delta F = \frac{\partial}{\partial \alpha} F(f(x) + \alpha \delta f) \Big|_{\alpha=0}.$$

Говорят, что функционал  $F(f)$  *достигает минимума (максимума)* на функции  $f_0(x)$ , если  $F(f) \geq F(f_0)$  ( $F(f) \leq F(f_0)$ ). Имеет место утверждение: *если функционал, имеющий вариацию  $\delta F$ , достигает минимума (максимума) на функции  $f = f_0$ , то*

$$\delta F(f_0) = 0.$$

В самом деле, при фиксированных  $f_0(x)$  и  $\delta f$  функционал  $F(f_0(x) + \alpha \delta f) = \varphi(\alpha)$  является функцией только от одного переменного  $\alpha$ , которая при  $\alpha = 0$  достигает минимума (максимума), следовательно,  $\varphi'(0) = 0$  или  $\frac{\partial}{\partial \alpha} F(f_0(x) + \alpha \delta f) \Big|_{\alpha=0} = 0$ , т. е.,

$$\delta F(f_0(x)) = 0 \quad (8)$$

Таким образом, условие (8) есть необходимое условие экстремума функционала.

Вернемся снова к интегралу Дирихле. Введем еще вспомогательный класс  $\mathfrak{M}_0$  функций  $w$ , имеющих непрерывные частные производные на  $\bar{\Omega}$ , и равных нулю на  $\Gamma$ :

$$w|_{\Gamma} = 0.$$

Если функция  $v$  имеет вид

$$v = u + w \quad (w \in \mathfrak{M}_0),$$

то, очевидно, она принадлежит к  $W$ . Обратно, всякую функцию  $v \in W$  можно записать в виде

$$v = u + (v - u) = u + w \quad (w \in \mathfrak{M}_0),$$

потому что

$$w|_{\Gamma} = (v - u)|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} - u|_{\Gamma} = \chi(s) - \chi(s) = 0.$$

Поэтому равенство (7) можно еще записать в виде

$$D[u] = \min_{w|_{\Gamma} = 0} D[u + w]. \quad (9)$$

Задача о нахождении минимума (9) называется *вариационной задачей*.

Функции  $w \in \mathfrak{M}_0$  называют *вариациями* (вариациями аргумента функционала  $D[m]$ ).

Для функции  $u$  достигается минимум интеграла Дирихле в классе  $W$ : прибавление к  $u$  произвольной вариации  $w$  выводит интеграл Дирихле из минимума—он становится большим.

Зададим произвольную функцию  $w \in \mathfrak{M}_0$ . Если помножить ее на какое-либо число  $\lambda$ , то получим снова функцию  $\lambda w \in \mathfrak{M}_0$ , поэтому  $D[u + \lambda w] \geq D[u]$ ,  $\forall \lambda$ . Но

$$\begin{aligned} D[u + \lambda w] &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial (u + \lambda w)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial (u + \lambda w)}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ &+ 2\lambda \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ &+ \lambda^2 \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= D[u] + 2\lambda D[u, w] + \lambda^2 D[w], \end{aligned} \quad (10)$$

где мы ввели обозначение

$$D[u, w] = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как  $u + \lambda w \in W$ , то имеет место неравенство

$D[u + \lambda w] \geq D[u]$  для любых  $\lambda$ , которое обращается в равенство при  $\lambda = 0$ . Поэтому функция  $D[u + \lambda w]$  от  $\lambda$  обращается в минимум при  $\lambda = 0$ .

Но тогда (см. (10); см. также (8))

$$\frac{d}{d\lambda} D[u + \lambda w]|_{\lambda=0} = \{2D[u, w] + 2\lambda D[w]\}_{\lambda=0} = 2D[u, w] = 0,$$

и мы доказали, что искомая функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$D[u, w] = 0$$

или уравнению

$$\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (11)$$

для всех  $w \in \mathfrak{M}_0$ . Уравнение (11) называют *уравнением в вариациях*.

Чтобы вычислить интеграл

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy,$$

сперва произведем интегрирование по  $x$  при фиксированном  $y$ .

Интегрируя по частям, имеем (рис. 6)

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_y} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx &= \frac{\partial u}{\partial x} w \Big|_A^B + \frac{\partial u}{\partial x} w \Big|_C^D - \int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx = \\ &= - \int_{\sigma_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx, \end{aligned}$$

где  $\sigma_y$  есть сечение  $\Omega$  прямой, состоящей из точек, имеющих ординату  $y$ .

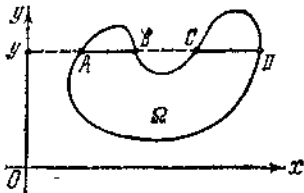


Рис. 6.

На рис. 6  $\sigma_y$  состоит из двух отрезков  $[A, B]$  и  $[C, D]$ . Надо учесть, что функция  $w$  равна нулю в точках  $A, B, C, D$ , лежащих на  $\Gamma$ .

Следовательно,

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} w dx dy.$$

Аналогично, интегрируя сначала по  $y$ , а затем по  $x$ , получим



$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} w dx dy.$$

В таком случае из (11) следует, что

$$\iint_{\Omega} w \Delta u dx dy = 0 \quad (12)$$

для всех  $w \in \mathfrak{M}_0$ , где  $\Delta$ —оператор Лапласа. Но тогда

$$\Delta u = 0 \quad (\forall (x, y) \in \Omega).$$

В самом деле, если допустить, что  $\Delta u \neq 0$  хотя бы в одной точке  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , то в силу непрерывности функции  $\Delta u$  существует окрестность  $U(\delta)$  точки  $(x_0, y_0)$  радиуса  $\delta$ , где функция  $\Delta u$  сохраняет знак числа  $\Delta u(x_0, y_0)$ , которое мы будем считать положительным. Тогда, взяв в качестве функции  $w \in \mathfrak{M}_0$  функцию

$$w(x, y) = \begin{cases} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \delta^2]^2, & (x, y) \in U(\delta), \\ 0, & (x, y) \in \Omega \setminus U(\delta), \end{cases}$$

получаем, что

$$\iint_{\Omega} w \Delta u dx dy = \iint_{U(\delta)} w \Delta u dx dy > 0,$$

что противоречит (12),

Итак, мы доказали, что функция  $z = u(x, y)$ , описывающая мембрану, удовлетворяет на  $\Omega$  уравнению Лапласа, т. е.  $u$ —гармоническая функция на  $\Omega$ . Вопрос, о нахождении  $u(x, y)$  свелся к задаче Дирихле: требуется найти гармоническую на  $\Omega$  функцию  $u(x, y)$ , непрерывную на  $\bar{\Omega}$ , и удовлетворяющую граничному условию (4).

**Примечание.** Мы считаем само собой разумеющимся тот факт, что функция  $u$  имеет на  $\bar{\Omega}$  непрерывные производные второго порядка, чтобы было законно производить вычисления, приведенные выше. На самом деле, это имеет место во всяком случае, если функции  $\varphi, \psi, \chi$  имеют непрерывные производные по параметру  $s$ .

## 12. Применение преобразований Фурье

Ниже даются примеры приложения преобразований Фурье при решении задач математической физики. Но сначала сделаем несколько общих замечаний.

Пусть функция  $f(x)$  имеет на луче  $[0, \infty)$  вторую непрерывную производную и выполняются условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f''(x) \sin px \, dx &= f'(x) \sin px \Big|_0^{\infty} - \\ &- p \int_0^{\infty} f'(x) \cos px \, dx = -p \int_0^{\infty} f'(x) \cos px \, dx = \\ &= -pf(x) \cos px \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin px \, dx = \\ &= pf(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin px \, dx, \end{aligned}$$

и мы доказали равенство

$$\int_0^{\infty} f''(x) \sin px \, dx = pf(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \sin px \, dx. \quad (1)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f''(x) \cos px \, dx &= f'(x) \cos px \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f'(x) \sin px \, dx = \\ &= -f'(0) + p \int_0^{\infty} f'(x) \sin px \, dx = \\ &= -f'(0) + pf(x) \sin px \Big|_0^{\infty} - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx = \\ &= -f'(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx, \end{aligned}$$

т. е. имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f''(x) \cos px \, dx = -f'(0) - p^2 \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx. \quad (2)$$

Конечно, мы предполагаем, что входящие в равенства (1) и (2) несобственные интегралы на  $[0, \infty)$  существуют.

**12.1. Уравнение теплопроводности.** В качестве примера применения синус-преобразования рассмотрим уравнение теплопроводности (см. п.5) для полубесконечного стержня:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x > 0, t > 0) \quad (3)$$

при граничном условии

$$u = u_0 \text{ при } x=0, t > 0; \quad (4)$$

и начальном условии

$$u = 0 \text{ при } t=0, x > 0. \quad (5)$$

Считаем, что  $u, \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Это не противоречит физическим соображениям. Поэтому мы находимся в условиях возможности применения синус-преобразования.

Итак, пусть

$$u_s = u_s(p, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(x, t) \sin px \, dx \quad (6)$$

— синус-преобразование искомого решения поставленной выше задачи.

Умножая уравнение (3) на  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin px$  и интегрируя по  $x$ ; в пределах от 0 до  $\infty$ , получим (учитывая (4)-(6))

$$\frac{du_s}{dt} = k \left( p \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_0 - p^2 u_s \right) \quad (t > 0); \quad (7)$$

$$u_s = 0 \text{ при } t=0. \quad (8)$$

Таким образом, мы свели задачу к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Ограниченное решение уравнения (7), удовлетворяющее условию (8), имеет вид

$$u_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p^{-1} u_0 [1 - \exp(-p^2 kt)].$$

Формула обращения дает

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} u_0 \int_0^{\infty} [1 - \exp(-p^2 kt)] \sin px \frac{dp}{p}. \quad (9)$$

Как нам известно, интеграл

$$\int_0^{\infty} \sin px \frac{dp}{p}$$

сходится и, более того,

$$\int_0^{\infty} \sin px \frac{dp}{p} = \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Поэтому

$$u = u_0 \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) \sin px \frac{dp}{p} \right]. \quad (11)$$

Полезно проверить, что функция (11) действительно удовлетворяет нашему уравнению. При проверке необходимо обосновать законность дифференцирования по параметру соответствующих несобственных интегралов.

При  $t = 0$  интеграл в правой части (11) равен  $\pi/2$ , в силу (10). Поэтому выполняется начальное условие (5).

При  $x = 0$  этот интеграл равен нулю  $u = u_0$ , т. е. выполняется граничное условие (4).

Интеграл в (11) при  $t > 0$  сходится, потому что

$$\int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) \left| \frac{\sin px}{p} \right| dp \leq x \int_0^{\infty} \exp(-p^2 kt) dp < \infty.$$

Продифференцировав формально равенство (11) по переменной  $t$ , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 kt) \sin px \frac{dp}{p}. \quad (12)$$

Чтобы обосновать законность формального дифференцирования при  $t > 0$ , надо задать произвольный отрезок  $[a, b]$  изменения  $t$ , где  $a > 0$ , и доказать, что интеграл (12) равномерно сходится на этом отрезке при фиксированном  $x \geq 0$ .

Так как  $|\sin px| \leq px$ , то при фиксированном  $x \geq 0$  выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 kt) \left| \frac{dp}{p} \right| \leq x \int_0^{\infty} p^2 \exp(-p^2 kt) dp,$$

где интеграл в правой части сходящийся и не зависит от  $t$ . Но тогда интеграл (12) равномерно сходится на  $[a, b]$  и формальное дифференцирование (11) законно, и формула (12) действительно имеет место.

Подобным образом обосновывается законность формального дифференцирования при получении частной производной  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

Аналогичным образом, используя комплексное преобразование Фурье, можно решить задачу теплопроводности для бесконечного в обе стороны стержня —  $-\infty < x < \infty$  (см. п.6, где решение задачи получено методом Фурье разделения переменных).

## 12.2. Уравнение колебания неограниченной струны.

Как мы установили в п.7, уравнение колебания струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0). \quad (13)$$

Будем решать уравнение (13) при начальных условиях

$$\left. \begin{aligned} u &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (t = 0, -\infty < x < \infty). \quad (14)$$

Мы предполагаем, что функция  $f(x)$  такова, что все выкладки, которые будут производиться ниже, законны. Пусть

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{ixp} dx$$

— комплексное преобразование Фурье (обратное) функции  $u(x, t)$ .

Интегрируя по частям (в предположении, что  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial x}$

обращаются в нуль при  $x = \pm\infty$ ), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -p^2 \hat{u}. \quad (15)$$

Умножая уравнение (13) на  $e^{ipx}$  и используя начальные условия (14), интегрируя по  $x$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , используя (15), получим вспомогательное уравнение

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dt^2} = -a^2 p^2 \hat{u} \quad (t > 0). \quad (16)$$

Начальные условия запишутся

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} &= \hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz, \\ \frac{d\hat{u}}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (t = 0). \quad (17)$$

Решая уравнение (16) (обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами), получим

$$\hat{u} = \hat{f}(p) \cos apt.$$

Формула обращения дает

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tpx} \hat{f}(p) \cos apt \, dp = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tpx} \frac{e^{iap t} + e^{-iap t}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz \, dp = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-tp(x-at)} + e^{-tp(x+at)}] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ipz} dz \, dp = \\
 &= \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)].
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что

$$u = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)],$$

т. е. мы получили формулу Даламбера для данной задачи (см. (11) п.8).

## Приложение 3

### Использование тензорного исчисления к вопросам механики и физики

#### 1. Тензор инерции

1. Рассмотрим движение твердого тела ( $\mathcal{K}$ ), закрепленного в одной точке, которую мы обозначим буквой  $O$  и примем за начало координат. В каждый момент времени движение этого тела можно рассматривать как вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг некоторой оси, проходящей через точку  $O$ . Линейная скорость точки  $M$  этого тела, определяемой радиусом-вектором  $\overline{OM} = \mathbf{x}$ , как известно из механики, будет вычисляться по формуле

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}.$$

Найдем кинетическую энергию рассматриваемого тела. Для этого выделим элемент тела в окрестности точки  $M$ . Кинетическая энергия этого элемента будет равна

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm.$$

Поэтому кинетическая энергия всего тела может быть найдена в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{V})} v^2 dm,$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \int_{(\mathcal{V})} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 dm,$$

(1)

где интегрирование ведется по всему телу  $(\mathcal{V})$  (если тело трехмерное, то интеграл будет тройным; если тело представляет собой кусок поверхности, то интегрирование будет вестись по этой поверхности; если тело представляет собой некоторую линию, то интеграл будет криволинейным, и, наконец, если тело состоит из конечного числа точечных масс, интеграл превратится в простую сумму).

Преобразуем теперь подынтегральное выражение. Имеем

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 = \boldsymbol{\omega}^2 x^2 - (\boldsymbol{\omega} \mathbf{x})^2.$$

Пусть  $\{e_1, e_2, e_3\}$  — неподвижный базис с началом в точке  $O$ . Запишем разложения векторов  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{x}$  по этому базису в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i e_i, \quad \mathbf{x} = x_j e_j.$$

Тогда выражения  $\boldsymbol{\omega}^2$ ,  $x^2$  и  $\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}$  могут быть записаны так:

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \delta_{ij} \omega_i \omega_j, \quad x^2 = \delta_{kl} x_k x_l,$$

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{x} = \delta_{ik} \omega_i x_k = \delta_{jl} \omega_j x_l.$$

Поэтому выражение для  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2$  принимает вид

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})^2 &= (\delta_{ij} \omega_i \omega_j) (\delta_{kl} x_k x_l) - (\delta_{ik} \omega_i x_k) (\delta_{jl} \omega_j x_l) = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_i \omega_j x_k x_l. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в интеграл (1). Здесь переменными интегрирования являются координаты  $x_k$  вектора  $\mathbf{x}$ , а координаты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  следует считать постоянными. Поэтому их можно вынести из-под знака интеграла и записать равенство (1) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \omega_i \omega_j \int_{(\mathcal{K})} x_k x_l dm.$$

Это выражение не зависит от координат вектора  $x$ , так как по ним производится интегрирование, а зависит только от координат вектора  $\omega$ . Кинетическая энергия  $T$  представляет собой квадратичную форму относительно координат этого вектора. Ее коэффициенты образуют симметричный тензор второй валентности. Этот тензор, умноженный на два, называют *тензором инерции* тела  $(\mathcal{K})$ . Если обозначить компоненты тензора инерции через  $I_{ij}$  то получим для них следующее выражение:

$$I_{ij} = (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \int_{(\mathcal{K})} x_k x_l dm. \quad (2)$$

Кинетическая энергия вращающегося тела запишется теперь в виде

$$T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j, \quad (3)$$

или в виде

$$T = \frac{1}{2} \omega I \omega,$$

где через  $I$  обозначен симметричный линейный оператор, порожденный тензором  $I_{ij}$ .

Простой подсчет показывает, что формулы (2) для вычисления компонент тензора инерции  $I_{ij}$  могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{(\mathcal{K})} (x_2^2 + x_3^2) dm, & I_{23} &= I_{32} = - \int_{(\mathcal{K})} x_2 x_3 dm, \\ I_{22} &= \int_{(\mathcal{K})} (x_1^2 + x_3^2) dm, & I_{31} &= I_{13} = - \int_{(\mathcal{K})} x_1 x_3 dm, \\ I_{33} &= \int_{(\mathcal{K})} (x_1^2 + x_2^2) dm, & I_{12} &= I_{21} = - \int_{(\mathcal{K})} x_1 x_2 dm. \end{aligned}$$

Величины  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  являются *моментами инерции* тела  $(\mathcal{K})$  относительно осей  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$ . Величины  $I_{12}$ ,  $I_{23}$ ,  $I_{31}$  носят название *полярных моментов инерции*.



2. Найдем величину момента инерции тела относительно любой оси, проходящей через точку  $O$ . Рассмотрим ось, проходящую через точку  $O$ , определяемую единичным вектором  $p$  (рис. 1).

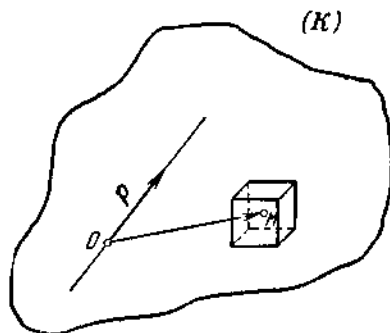


Рис. 1.

Пусть снова  $M$  — произвольная точка тела  $(\mathcal{K})$ , определяемая радиусом-вектором  $x = \overline{OM}$ , и  $dm$  — элемент массы, сосредоточенной в окрестности точки  $M$ . Момент инерции этого элемента относительно оси  $Op$  будет равен

$$dl = \rho^2 dm,$$

где  $\rho$  — расстояние от точки  $M$  до оси  $Op$ . Но, как известно, это расстояние может быть вычислено по формуле

$$\rho = \frac{|p \times x|}{|p|}$$

или, так как  $|p| = 1$ , по формуле

$$\rho = |p \times x|.$$

Следовательно,

$$dl = (p \times x)^2 dm,$$

и момент инерции тела  $(\mathcal{K})$  относительно оси  $Op$  определится так:

$$I = \int_{(\mathcal{K})} (p \times x)^2 dm. \quad (4)$$

Сравним полученное выражение для момента инерции  $I$  с формулой (1) для кинетической энергии  $T$  тела  $(\mathcal{K})$ . Это выражение для  $I$  получается из формулы (1) отбрасыванием

множителя  $1/2$  и заменой вектора  $\omega$  на вектором  $p = p_i e_i$ . Поэтому и окончательное выражение для момента инерции  $I$  получится из выражения (3) для кинетической энергии  $T$  путем такой же замены и будет иметь вид

$$I = I_i p_i p_j. \quad (5)$$

Эта формула показывает, что момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через точку  $O$ , определяется только при помощи тензора инерции этого тела.

3. Как и всякий симметричный тензор второй валентности, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса. Оси  $Ox^0_i$ , определяемые точкой  $O$  и собственными векторами  $e^0_i$  тензора инерции, называются *главными осями инерции* тела ( $\mathcal{K}$ ). Собственные значения  $I_i$  тензора инерции являются моментами инерции тела ( $\mathcal{K}$ ) относительно главных осей инерции. Поэтому они удовлетворяют условию  $I_i > 0$ . Они называются *главными моментами инерции*.

Полярные моменты инерции  $I_{ij} (i \neq j)$  тела ( $\mathcal{K}$ ), вычисленные в базисе  $\{e^0_i\}$ , будут равны нулю. Поэтому выражение для кинетической энергии тела ( $\mathcal{K}$ ) примет в этом базисе вид

$$T = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^0)^2 + I_2 (\omega_2^0)^2 + I_3 (\omega_3^0)^2];$$

здесь  $\omega_i^0$  — координаты вектора  $\omega$  относительно базиса  $\{e^0_i\}$ . Так как  $I_i > 0$ , то эта квадратичная форма является положительно определенной.

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называется *асимметричным волчком*. Если два главных момента инерции тела равны между собой, но не равны третьему, то тело называется *симметричным волчком*. При  $I_1 = I_2 \neq I_3$  любая ось, проходящая через точку  $O$  и лежащая в плоскости векторов  $e^0_1, e^0_2$ , будет главной осью инерции. Если, наконец, все главные моменты инерции тела равны между собой, то тело называется *шаровым волчком*. В этом случае любая ось, проходящая через точку  $O$ , будет главной осью инерции тела.

Рассмотрим характеристическую поверхность второго порядка, определяемую тензором инерции  $I_{ij}$ . Ее уравнение записывается в виде

$$x^T x = 1$$

или, в координатной форме, в виде,

$$I_{ij}x_i x_j = 1.$$

Так как собственные значения тензора  $I_{ij}$  положительны, то эта поверхность является эллипсоидом и называется *эллипсоидом инерции* данного тела. Оси симметрии этого эллипсоида совпадают с главными осями инерции тела ( $\mathcal{K}$ ). Эллипсоид инерции позволяет геометрически найти величину момента инерции относительно произвольной оси, проходящей через точку  $O$ .

Действительно, если  $\mathbf{x} = \overline{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$  эллипсоида инерции, имеющей направление вектора  $\mathbf{p}$ , то

$$\mathbf{x} = x\mathbf{p},$$

где  $x = |\mathbf{x}|$ , и

$$x_i = xp_i.$$

Поэтому

$$I = I_{ij}p_i p_j = \frac{I_{ij}x_i x_j}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2},$$

так как  $I_{ij}x_i x_j = 1$ . Таким образом, момент инерции  $I$  относительно оси  $O\mathbf{p}$  равен единице, деленной на квадрат расстояния от точки  $O$  до той точки  $M$  эллипсоида инерции, в которой ее пересекает прямая  $\mathbf{p}$ .

4. Предположим, что точка  $O$  является центром инерции (центром массы) тела ( $\mathcal{K}$ ), и найдем, как изменится тензор инерции тела при переходе от точки  $O$  к некоторой другой точке  $O'$ , определяемой радиусом-вектором  $\overline{OO'} = \mathbf{a}$ . Пусть  $M$  — произвольная точка тела и  $\overline{OM} = \mathbf{x}$ ,  $\overline{O'M} = \mathbf{x}'$ .

Тогда

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{a}$$

и момент инерции тела ( $\mathcal{K}$ ) относительно оси  $O'\mathbf{p}$ , проходящей через точку  $O'$ , направление которой задается единичным вектором  $\mathbf{p}$ , определится по формуле, аналогичной формуле (4):

$$I' = \int_{(\mathcal{K})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x}')^2 dm = \int_{(\mathcal{K})} [\mathbf{p} \times (\mathbf{x} - \mathbf{a})]^2 dm.$$

Это выражение может быть переписано в виде

$$I' = \int_{(\mathcal{K})} (\mathbf{p} \times \mathbf{x})^2 dm - 2(\mathbf{p} \times \mathbf{a}) \left( \mathbf{p} \times \int_{(\mathcal{K})} \mathbf{x} dm \right) + (\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2 \int_{(\mathcal{K})} dm$$

(здесь используется то, что при интегрировании векторных выражений остаются справедливыми хорошо известные из анализа свойства определенного интеграла). Но так как  $O$  — центр инерции тела, то

$$\int_{(\mathcal{K})} \mathbf{x} dm = 0$$

и, кроме того,

$$\int_{(\mathcal{K})} dm = m,$$

где через  $m$  обозначена масса тела  $(\mathcal{K})$ . Поэтому выражение для  $I'$  принимает вид

$$I' = \int_{(\mathcal{K})} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{x})^2 dm + m(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$$

или

$$I' = I + m(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2.$$

Так как выражение  $(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$  равно квадрату расстояния от точки  $O$  до оси  $Op$ , то это равенство выражает известную теорему Штейнера о том, что *момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр инерции тела, увеличенному на произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Пусть  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ . Тогда  $(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2$  может быть преобразовано так:

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{a} \mathbf{p})^2 = (a^2 \delta_{ij} - a_i a_j) p_i p_j.$$

Теперь, используя формулу (5), получим для момента инерции  $I'$  выражение

$$I' = [I_{ij} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)] p_i p_j.$$

Отсюда ясно, что при переходе от точки  $O$  к точке  $O'$  тензор инерции преобразуется следующим образом:

$$I'_{ij} = I_{ij} + m(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j).$$

Отнесем тензор  $I_{ij}$  к главным осям инерции. Тогда его матрица будет иметь вид

$$(I_{ij}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора инерции  $I_{ij}$  в этом случае будут:

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_1 + m(a_3^2 + a_2^2), \\ I_{22} &= I_2 + m(a_1^2 + a_3^2), \\ I_{33} &= I_3 + m(a_1^2 + a_2^2), \\ I_{ij} &= -ma_i a_j \text{ при } i \neq j. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что главные оси тензора  $I_{ij}$ , вообще говоря, не совпадают с главными осями тензора  $I'_{ij}$ . Легко видеть, что *главные оси обоих тензоров совпадают тогда и только тогда, когда точка  $O'$  лежит на одной из главных осей инерции тела ( $\mathcal{K}$ )*. В самом деле, пусть, например, точка  $O'$  лежит на оси  $Oe^0_1$ . Тогда  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1^0$  и  $I'_{ii} = 0$  при  $i \neq j$ . Обратно, если  $I'_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ , то две из трех координат  $a_i$  должны быть равны нулю.

5. С тензором инерции тела связан его *момент импульса*. Пусть тело ( $\mathcal{K}$ ) вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  относительно оси, проходящей через его произвольную точку  $O$ . Элемент массы  $dm$  этого тела, сосредоточенный в окрестности точки  $M$ , движется с линейной скоростью  $\mathbf{v}$  и несет импульс, равный  $\mathbf{v}dm$ . Момент этого импульса относительно точки  $O$  равен векторному произведению радиуса-вектора  $\overline{OM} = \mathbf{x}$  точки  $M$  на этот импульс:

$$d\mathbf{M} = (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm.$$

А полный момент импульса тела ( $\mathcal{K}$ ) относительно точки  $M$  находится интегрированием:

$$\mathbf{M} = \int_{(\mathcal{K})} (\mathbf{x} \times \mathbf{v}) dm.$$

Но

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Поэтому

$$\mathbf{M} = \int_{(\mathcal{K})} [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm.$$

(6)

Это выражение показывает, что момент импульса  $\mathbf{M}$  линейно зависит от вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Следовательно, векторы  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{M}$  связаны некоторым линейным преобразованием. Покажем, что матрица этого линейного преобразования совпадает с тензором инерции тела ( $\mathcal{K}$ ).

Для этого преобразуем подынтегральное выражение предыдущего интеграла, пользуясь выведенной ранее формулой для двойного векторного произведения:

$$\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} x^2 - \mathbf{x} (\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}).$$

Если  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$  и  $\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i$ , то это равенство может быть записано в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) &= (\delta_{ij} \omega_j \delta_{kl} x_k x_l - \delta_{ik} x_k \delta_{jl} \omega_j x_l) \mathbf{e}_i = \\ &= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_j x_k x_l \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в интеграл (6), получим следующие формулы для вычисления координат  $M_i$  вектора  $\mathbf{M}$ :

$$M_i = (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl}) \omega_j \int_{(S)} x_k x_l dm.$$

Сравнивая эти формулы с выражениями (2) для компонент тензора инерции, убеждаемся, что

$$M_i = I_{ij} \omega_j$$

(7)

что и требовалось доказать. Формулы (7) могут быть переписаны в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega},$$

где  $\mathbf{I}$ —симметричный линейный оператор, соответствующий тензору  $I_{ij}$ .

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции для следующих однородных сплошных тел, считая, что центр вращения совпадает с их центром инерции, а масса равна  $m$ :

- а) тонкого стержня длины  $l$ ;
- б) диска радиуса  $R$ ;
- в) прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$ ;
- г) шара радиуса  $R$ ;
- д) круглого цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $h$ ,
- е) прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ;
- ж) трехосного эллипсоида с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

2. Найти тензор инерции и эллипсоид инерции следующих тел, считая, что их масса равна  $m$ :

- а) прямого кругового конуса радиуса  $R$  и высоты  $h$ , если его центр вращения совпадает с вершиной;
- б) шара радиуса  $R$ , если его центр вращения лежит на поверхности шара;

в) кругового цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $h$ , если его центр вращения совпадает с центром основания.

3. Найти тензор и эллипсоид инерции для следующих молекул, рассматриваемых как системы частиц, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга, причем их центр вращения предполагается совмещенным с центром инерции:

а) молекула состоит из  $n$  атомов массы  $m_\alpha$  ( $\alpha=1, \dots, n$ ), расположенных на одной прямой, так что расстояние между атомами  $\alpha$  и  $\beta$  равно  $l_{\alpha\beta}$ ;

б) молекула состоит из трех атомов, расположенных в виде равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $BC=a$  и высотой  $h$ , атомы, расположенные в точках  $B$  и  $C$ , имеют массу  $m_1$ , а в точке  $A$  — массу  $m_2$ ;

в) молекула состоит из четырех атомов одинаковой массы  $m$ , расположенных в вершинах правильного тетраэдра с ребром  $a$ .

4. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$  и массой  $m$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одной из своих диагоналей

5. Найти кинетическую энергию и момент импульса однородного цилиндра радиуса  $R$ , высоты  $h$  и массы  $m$ , вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  вокруг прямой, соединяющей его центр инерции с одной из точек окружности, по которой его боковая поверхность пересекается с основанием.

## **2. Некоторые свойства кристаллов, связанные с тензорами второй валентности**

1. Тензорное исчисление оказывается очень полезным при изучении свойств кристаллов. Это объясняется тем, что при описании многих явлений, таких, например, как электропроводность, теплопроводность, упругость, кристалл можно рассматривать как однородную сплошную среду, физические свойства которой во всех ее точках одинаковы. Физические свойства кристаллов определяют соотношения между физическими величинами, связанными с кристаллом или воздействующими на него. Естественно считать, что эти физические величины также являются однородными. Например, если

изучают тепловые свойства кристалла, то считают, что температура (или градиент температуры) кристалла во всех его точках постоянна; при изучении его электрических свойств считают постоянной напряженность электрического поля; при изучении магнитных свойств — напряженность магнитного поля и т. д.

Различают два типа физических свойств кристалла. Физические свойства, относящиеся к первому типу, не зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относятся, например, плотность и теплоемкость кристалла. В силу однородности кристалла эти свойства описываются постоянными скалярными величинами. Плотность, например, характеризует связь между массой и объемом. И так как масса и объем не зависят от направления, то и плотность обладает этим свойством.

Физические свойства второго типа зависят от направления в кристалле. К таким свойствам относится, например, удельная электропроводность, связывающая напряженность электрического поля и плотность тока в кристалле. Говорят, что кристалл анизотропен по отношению к таким свойствам. Эта анизотропность кристалла по отношению к некоторым его свойствам связана с особенностями его молекулярного строения.

Свойства кристалла, зависящие от направления, могут быть описаны тензорами, если физические величины, воздействующие на кристалл, считать малыми. Покажем это на примере удельной электропроводности кристалла. Пусть  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического тока и  $\mathbf{j}$  — плотность тока в кристалле, постоянные во всех его точках. Тогда  $\mathbf{j}$  является функцией от  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{j} = \mathbf{f}(\mathbf{E}).$$

Если координаты векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  по отношению к ортонормированному базису  $\{\mathbf{e}_i\}$  обозначить через  $E_i$  и  $j_i$ , то это соотношение может быть переписано в виде

$$j_i = f_i(E_k),$$

где  $f_i$  — функции, зависящие от трех аргументов  $E_k$ , которые можно считать непрерывными и дифференцируемыми функциями. Последнее обстоятельство вытекает из физического смысла функций  $f_i$ . Дадим вектору  $\mathbf{E}$  приращение  $\Delta\mathbf{E}$ , одинаковое во всех точках кристалла, тогда вектор  $\mathbf{j}$  получит приращение  $\Delta\mathbf{j}$ , также одинаковое во всех точках кристалла.



Поскольку функции  $f_i$  дифференцируемы, это приращение может быть записано в виде

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k} \Delta E_k + \alpha_{ik} \Delta E_k,$$

где величины  $\alpha_{ik}$  стремятся к нулю при  $\Delta E_k \rightarrow 0$ . Считая величины  $\Delta E_k$  малыми, можно второе слагаемое этой суммы отбросить и написать

$$\Delta j_i = \frac{\partial f_i}{\partial E_k} \Delta E_k.$$

Так как  $\Delta E_k$  и  $\Delta j_i$  — координаты векторов, то частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial E_k}$  представляют собой компоненты тензора второй валентности:

$$\frac{\partial f_i}{\partial E_k} = \sigma_{ik}.$$

Тензор  $\sigma_{ik}$  называют *тензором удельной электропроводности*. Таким образом,

$$\Delta j_i = \sigma_{ik} \Delta E_k. \tag{1}$$

При этом значения компонент тензора  $\sigma_{ik}$  зависят от исходного значения вектора напряженности,  $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}(E)$ . Полагая  $\sigma_{ik}^0 = \sigma_{ik}(0)$ , можно записать предыдущее соотношение в виде

$$j_i = \sigma_{ik}^0 E_k,$$

где теперь уже сами векторы  $j$  и  $E$  считаются достаточно малыми.

Если обозначить через  $\sigma$  линейное преобразование, соответствующее тензору  $\sigma_{ik}$ , то соотношение (1) может быть переписано в виде

$$\Delta j = \sigma \Delta E,$$

где  $\sigma$  зависит от начального значения вектора напряженности  $E$ . В частности, полагая  $\sigma^0 = \sigma(0)$ , получим

$$j = \sigma^0 E$$

для малых  $E$  и  $j$ . Эти соотношения представляют собой обобщенный закон Ома.

В некоторых случаях зависимость между физическими величинами оказывается линейной не только для малых, но и для любых их значений. Такие зависимости описываются тензорами, не зависящими от начальных значений этих величин.

Но может оказаться, что некоторое свойство кристалла, которое, вообще говоря, является свойством второго типа, для некоторого конкретного кристалла будет одинаковым во всех его направлениях. Такой кристалл называют *изотропным* по отношению к этому свойству. Например, если кристалл обладает одинаковой электропроводностью во всех направлениях, то говорят, что он изотропен по отношению к этому свойству. Закон Ома в этом случае принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

и тензор удельной электропроводности становится шаровым тензором:

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}.$$

Скаляр  $\sigma$  будет *удельной электропроводностью* кристалла, одинаковой во всех направлениях.

2. Рассмотрим еще одно свойство кристаллов, по отношению к которому они могут быть анизотропными, а именно рассмотрим теплопроводность кристалла. Обозначим через  $\mathbf{h}$  вектор потока тепла, равный количеству тепла, протекающему через единичную площадку, перпендикулярную этому вектору, в единицу времени. Если кристалл изотропен по отношению к теплопроводности, то

$$\mathbf{h} = -k \text{grad } T,$$

где вектор  $\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{e}_i$  показывает скорость изменения температуры в кристалле. Этот вектор будем считать одинаковым во всех точках кристалла. Коэффициент  $k$  называется *коэффициентом теплопроводности* кристалла.

Если кристалл анизотропен по отношению к теплопроводности, то вектор  $\mathbf{h}$ , вообще говоря, не будет коллинеарен вектору  $\text{grad } T$ . Обозначая его координаты через  $h_i$ , запишем зависимость между этими векторами (для малых значений  $\text{grad } T$ ) в виде

$$h_i = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{2}$$

где  $k_{ij}$ —*тензор теплопроводности кристалла*. Экспериментальное исследование показывает, что тензор  $k_{ij}$  является симметричным тензором:  $k_{ij} = k_{ji}$ . Из физических соображений ясно, что  $k_{ij}$  — невырожденный тензор (вырождение этого тензора означало бы, что по некоторому направлению кристалл

вовсе не проводит тепла). Тензор  $r_{ij}$ , обратный тензору  $k_{ij}$ , называют *тензором теплового сопротивления*. Разрешив уравнения (2) относительно компонент  $\text{grad } T$ , получим

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -r_{ij}h_j.$$

Из симметрии тензора  $k_{ij}$  следует симметрия тензора  $r_{ij}$ .

Тензор  $k_{ij}$ , как всякий симметричный тензор, может быть приведен ортогональным преобразованием к диагональному виду:

$$(k_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $k_i$  этого тензора называются *главными коэффициентами теплопроводности* кристалла, а его собственные направления  $e^0_i$  — *главными направлениями тензора теплопроводности*. Из физических соображений ясно, что  $k_i > 0$ . Одновременно с тензором  $k_{ij}$  к диагональному виду приведется и тензор  $r_{ij}$ . Его собственные значения  $r_i$  связаны с главными коэффициентами теплопроводности  $k_i$  соотношениями

$$r_i = \frac{1}{k_i}.$$

Уравнение характеристической поверхности тензора  $k_{ij}$  записывается в виде

$$k_{ij}x_i x_j = 1,$$

а после приведения к главным осям—в виде

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 1.$$

Так как  $k_i > 0$ , то эта поверхность является трехосным эллипсоидом, который называется *эллипсоидом теплопроводности кристалла*.

Рассмотрим несколько задач, связанных с распространением тепла в кристаллах.

а) Пусть поверхности плоскопараллельной кристаллической пластинки находятся в контакте с двумя хорошими проводниками тепла, имеющими разную температуру (рис. 2).

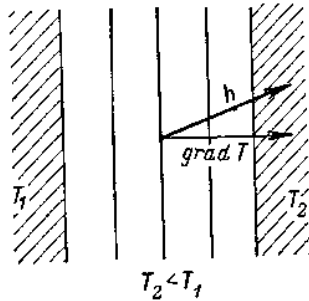


Рис. 2.

Предположим, что длина и ширина пластинки значительно больше ее толщины. Тогда поверхности уровня температуры  $T$  пластинки будут параллельны ее граничным плоскостям, а вектор  $\text{grad } T$  будет направлен перпендикулярно им. Если вектор  $e_1$  направить перпендикулярно поверхности пластинки, а векторы  $e_2$  и  $e_3$  — параллельно ей, то

$$\text{grad } T = \frac{\partial T}{\partial x_1} e_1.$$

Вектор потока тепла  $h$  определится так:

$$h = -(k_{11}e_1 + k_{21}e_2 + k_{31}e_3) \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

б) Рассмотрим теперь распространение тепла вдоль длинного стержня. В этом случае вектор потока тепла должен быть направлен вдоль оси стержня. Следовательно, изотермические плоскости будут наклонены к оси стержня. Так как теперь  $h = h_1 e_1$ , то вектор  $\text{grad } T$  может быть вычислен по формуле

$$\text{grad } T = -(r_{11}e_1 + r_{21}e_2 + r_{31}e_3) h_1.$$

в) Рассмотрим в заключение задачу о распространении тепла, создаваемого точечным источником в бесконечно большом кристалле. Здесь нам придется отступить от предположения об однородности физической величины, воздействующей на кристалл, так как в рассматриваемом случае поле градиента температуры не будет однородным. Уравнение теплопроводности в кристалле, имеющем плотность  $\rho$  и удельную теплоемкость  $c$ , имеет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div } h.$$

Мы рассматриваем случай установившегося распределения температуры, в силу чего  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . Тогда уравнение теплопроводности примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + \frac{\partial h_2}{\partial x_2} + \frac{\partial h_3}{\partial x_3} = 0.$$

Но в анизотропном кристалле вектор потока тепла  $\mathbf{h}$  связан с градиентом температуры  $T$  уравнениями (2). Подставляя выражения для компонент вектора  $\mathbf{h}$  в последнее уравнение, получим

$$k_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{3}$$

так как компоненты тензора  $k_{ij}$  можно считать постоянными.

Чтобы решить уравнение (3), перейдем к той системе координат, в которой тензор  $k_{ij}$  приводится к диагональному виду. В этом случае уравнение (3) запишется так:

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} = 0.$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных, полагая

$$\xi_i = \frac{x_i}{\sqrt{k_i}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} &= \frac{\partial T}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \frac{1}{\sqrt{k_i}}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_i^2} \frac{1}{k_i} \end{aligned}$$

(где по индексу  $i$  суммирование нет) и уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Это уравнение представляет собой уравнение Лапласа, и его решение при наличии единственного точечного источника тепла, расположенного в начале координат, записывается так:

$$T = \frac{A}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} + T_\infty,$$

где  $T_\infty$  — постоянная температура вдали от источника. Константа  $A$  связана с производительностью источника тепла. Если

перейти обратно к переменным  $x_i$ , то это выражение может быть записано следующим образом:

$$T = \frac{A}{\sqrt{\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \frac{x_3^2}{k_3}}} + T_\infty$$

Так как  $\frac{1}{k_i} = r_i$ , то

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_1 x_1^2 + r_2 x_2^2 + r_3 x_3^2}} + T_\infty$$

или, если перейти к произвольной системе координат,

$$T = \frac{A}{\sqrt{r_{ij} x_i x_j}} + T_\infty$$

Отсюда ясно, что изотермические поверхности в кристалле определяются уравнением

$$r_{ij} x_i x_j = \left( \frac{T - T_\infty}{A} \right)^2 = \text{const.}$$

Эти поверхности будут эллипсоидами, подобными характеристическому эллипсоиду тензора теплового сопротивления. Вектор  $\mathbf{h}$  будет направлен из точки  $O$  в точку  $M$  изотермической поверхности, а вектор  $\text{grad } T$  будет ортогонален ей в этой точке.

3. Рассмотрим еще один эффект, который описывается тензором второй валентности, — электрическую поляризацию кристалла. Если кристалл диэлектрика находится в однородном электрическом поле напряженности  $\mathbf{E}$ , его молекулы, представляющие собой диполи, стремятся повернуться определенным образом по отношению к направлению вектора  $\mathbf{E}$ . Электрический момент единицы объема такого кристалла называется *поляризацией* диэлектрика и обозначается буквой  $\mathbf{P}$ . Если диэлектрик изотропен, то вектор  $\mathbf{P}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{E}$ , и уравнение, связывающее эти два вектора, имеет вид

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий *поляризуемость* диэлектрика. Если диэлектрик анизотропен, то уравнение, связывающее векторы  $\mathbf{E} = E_i \mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{P} = p_i \mathbf{e}_i$  записывается в виде

$$p_i = \alpha_{ij} E_j,$$

где  $\alpha_{ij}$  — *тензор поляризуемости* диэлектрика.

Наряду с вектором поляризации  $\mathbf{P}$  диэлектрика рассматривают *вектор* его *электрической индукции*, который определяется формулой

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.$$

Если обозначить координаты вектора  $\mathbf{D}$  через  $D_i$ , то мы получим для них выражение

$$D_i = (\delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}) E_j.$$

Тензор  $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}$  называется *тензором диэлектрической проницаемости* диэлектрика. Можно доказать, что тензор  $\alpha_{ij}$ , как и тензор  $\epsilon_{ij}$ , является симметричным тензором. Главные значения тензора  $\epsilon_{ij}$  называются *главными диэлектрическими проницаемостями кристалла*.

Совершенно аналогично описывается магнитная восприимчивость в пара- и диамагнитных кристаллах. Если кристалл помещен в однородное магнитное поле, напряженность которого равна  $\mathbf{H}$ , то он намагничивается. Интенсивность его намагничивания характеризуется вектором  $\mathbf{I}$ , который равен средней плотности магнитного момента молекулярных токов. Для изотропной парамагнитной и диамагнитной среды имеет место соотношение

$$\mathbf{I} = \kappa\mathbf{H},$$

где  $\kappa$ —*коэффициент магнитной восприимчивости*. Для парамагнитных кристаллов  $\kappa > 0$ , а для диамагнитных  $\kappa < 0$ . Если кристалл анизотропен, то соотношение между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{I}$  описывается симметричным тензором  $\kappa_{ij}$ , который называется *тензором магнитной восприимчивости*. Если  $\mathbf{H} = H_i\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{I} = I_k\mathbf{e}_k$ , то это соотношение принимает вид

$$I_k = \kappa_{ki} H_i.$$

Наряду с вектором  $\mathbf{I}$  при изучении явлений магнетизма рассматривается вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , определяемый формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}.$$

Координаты  $B_i$  этого вектора связаны с координатами  $H_j$  вектора  $\mathbf{H}$  соотношениями

$$B_i = (\delta_{ij} + 4\pi\kappa_{ij}) H_j.$$

Тензор  $\mu_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\kappa_{ij}$  носит название *тензора магнитной проницаемости*. Этот тензор также симметричен. Его главные значения  $\mu_i$  называются *главными коэффициентами*

магнитной проницаемости. Если  $\mu_i > 1$ , то кристалл парамагнитен в соответствующем главном направлении; если  $\mu_i < 1$ , то он диамагнитен в этом направлении.

4. Одним из основных свойств кристаллов является наличие у них определенной симметрии. Кристалл оказывается инвариантным относительно конечного числа ортогональных точечных преобразований, образующих группу. Она называется *группой точечных преобразований кристалла*. По наличию тех или иных видов симметрии кристаллы разделяются на 32 кристаллографических класса. Все физические свойства кристаллов оказываются связанными с их симметрией. А именно, *элементы симметрии любого физического свойства кристалла должны включать элементы симметрии его точечной группы преобразований*. Это утверждение носит название принципа Неймана и играет важную роль в кристаллофизике.

Рассмотрим, как связаны с симметрией кристалла свойства, описываемые симметричными тензорами второй валентности. Напомним сначала, что *осью симметрии кристалла порядка  $n$*  называется прямая  $l$ , поворот вокруг которой на угол  $\frac{2\pi}{n}$  совмещает кристалл с его первоначальным положением. Пусть  $a_{ij}$  — симметричный тензор, описывающий некоторое свойство кристалла, и  $a_{ij}x_i x_j$  — его характеристическая поверхность. Если кристалл имеет ось симметрии порядка  $n$ , то эта ось, согласно принципу Неймана, должна являться осью симметрии такого же порядка и для характеристической поверхности тензора  $a_{ij}$ . Если прямая  $l$  является осью симметрии второго порядка, то одна из главных осей характеристической поверхности тензора  $a_{ij}$  — должна совпадать с прямой  $l$ . Если же прямая  $l$  является осью симметрии порядка  $n > 2$ , то она должна являться осью вращения для характеристической поверхности, так как поверхность второго порядка, не являющаяся поверхностью вращения, не может иметь осей симметрии порядка выше второго. Следовательно, при  $n > 2$  характеристическая поверхность является поверхностью вращения, а сам этот тензор имеет два одинаковых собственных значения.

Упомянутые выше кристаллографические классы объединяются в системы по количеству и характеру имеющихся в кристалле осей симметрии. Различают семь кристаллографических систем: *кубическую, тригональную, тетрагональную, гексагональную, ромбическую, моноклинную и*



триклинную. Посмотрим, какие особенности будет иметь форма и расположение характеристической поверхности симметричного тензора  $a_{ij}$  для каждой из этих кристаллографических систем.

Кристаллы кубической системы имеют три оси четвертого порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  для таких кристаллов должна иметь три оси вращения. Но таким свойством обладает только сфера. Поэтому тензор  $a_{ij}$  для кристаллов кубической системы лишь множителем отличается от единичного тензора. А это означает, что такие кристаллы изотропны по отношению к свойствам, описываемым симметричными тензорами второй валентности.

Кристаллы тригональной, тетрагональной и гексагональной систем имеют по одной оси соответственно третьего, четвертого и шестого порядка. Для таких кристаллов характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  является поверхностью вращения, ось которой параллельна оси кристалла. Тензор  $a_{ij}$  имеет два одинаковых собственных значения.

Кристаллы ромбической системы имеют три взаимно перпендикулярные оси второго порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  может быть произвольной поверхностью второго порядка, главные оси которой параллельны осям кристалла. Тензор  $a_{ij}$  может иметь три различных собственных значения.

Кристаллы моноклинной системы имеют одну ось второго порядка. Характеристическая поверхность тензора  $a_{ij}$  в таком кристалле может иметь произвольную форму, но одна из ее осей должна быть параллельна оси кристалла.

Наконец, кристаллы триклинной системы не имеют осей симметрии. В таком кристалле характеристическая поверхность может иметь любую форму и любое расположение.

## ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Тензор удельной электропроводности  $\sigma_{ij}$  некоторого кристалла в базе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  имеет следующие компоненты:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \cdot 10^7$$

(электропроводность выражена в системе СИ и имеет размерность  $ом^{-1}м^{-1}$ ).

- а) Найти главные направления  $e_1^0, e_2^0, e_3^0$  тензора  $\sigma_{ij}$  и его главные коэффициенты электропроводности.  
 б) Написать уравнение характеристической поверхности тензора  $\sigma_{ij}$  в старой и новой системах координат.  
 в) Электрическое поле напряженности  $1$  в/м действует в направлении единичного вектора

$$e = \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3.$$

Найти плотность тока  $j$ , индуцируемого этим полем в кристалле.

Тензор  $\rho_{ij}$ , обратный тензору удельной электропроводности  $\sigma_{ij}$ , называется *тензором удельного электрического сопротивления*.

2. Записать зависимость между плотностью тока  $j$  и напряженностью электрического поля  $E$  при помощи тензора удельного электрического сопротивления  $\rho_{ij}$ .

3. Вычислить компоненты тензора  $\rho_{ij}$  для кристалла, тензор удельной электропроводности которого задан в задаче 1.

4. Главные коэффициенты теплопроводности кварца имеют следующие значения:  $k_1 = k_2 = 6,5; k_3 = 11,3$  (в единицах системы СИ, имеющих размерность  $вт/(м \cdot град)$ ).

а) Найти уравнение характеристической поверхности тензора удельной теплопроводности для этого кристалла.

б) Найти уравнения изотермических поверхностей, если тепло в кристалле кварца распространяется от точечного источника.

5. Между пластинами плоского конденсатора находится диэлектрик. В системе координат, вектор  $e_1$  которой направлен перпендикулярно пластинам конденсатора, компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  диэлектрика имеют следующие значения:

$$(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Напряженность электрического поля в конденсаторе направлена перпендикулярно пластинам и равна  $E = Ee_1$ . Требуется:

- а) найти тензор  $\alpha_{ij}$  поляризуемости этого диэлектрика;  
 б) найти его поляризацию  $P$  и электрическую индукцию  $D$ ;  
 в) найти углы, которые образуют векторы  $P$  и  $D$  с вектором  $e_1$ , и их проекции на этот вектор;

г) найти главные направления тензора диэлектрической проницаемости и главные диэлектрические постоянные кристалла.

### 3. Тензоры напряжений и деформаций

1. Рассмотрим однородное тело, находящееся под воздействием внешних сил. На элемент объема этого тела действуют силы двух типов. К первому типу относятся силы, величина которых пропорциональна объему элемента. Такие силы называются *объемными*. К ним, например, относятся сила тяжести, силы притяжения, центробежные силы и т. д. Ко второму типу относятся силы, действующие на поверхность элемента со стороны окружающих его частей тела и пропорциональные площади поверхности элемента. Такая сила, отнесенная к единице площади, называется *напряжением*. Мы будем рассматривать *однородное напряжение*, считая, что его действие на поверхность элемента определенной формы и ориентации не зависит от положения этого элемента в теле. Будем считать, кроме того, что тело под действием указанных выше сил находится в статическом равновесии.

Пусть  $M$  — произвольная точка рассматриваемого однородного тела и  $\Delta s$  — содержащий эту точку элемент плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M$ . Ориентация элемента  $\Delta s$  определяется единичным вектором  $n$ , нормальным плоскости  $\pi$  (рис. 3).

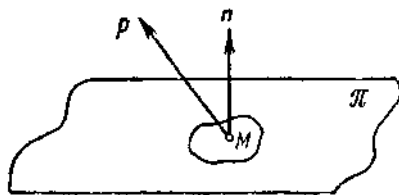


Рис. 3.

Сила  $\Delta p$ , действующая на элемент  $\Delta s$ , будет равна

$$\Delta p = p \Delta s,$$

где  $p$  — напряжение в точке  $M$ , соответствующее элементу  $\Delta s$ . Это напряжение будет зависеть от ориентации элемента  $\Delta s$ , т. е. от вектора  $n$ , так что

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n}).$$

Так как мы рассматриваем однородное напряжение, то эта функция будет *одинаковой во всех точках тела*.

Оказывается, эта функция  $\boldsymbol{\sigma}$  будет линейной вектор-функцией аргумента  $\mathbf{n}$ . Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что так как напряжения на разных сторонах одной и той же площадки имеют одинаковую величину и противоположные направления, то функция  $\boldsymbol{\sigma}$  удовлетворяет условию  $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$ .

Рассмотрим, далее, ортогональную систему координат с началом в точке  $M$  и базисными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Проведем плоскость  $\pi'$  параллельно плоскости  $\pi$ , так, чтобы она образовала вместе с координатными плоскостями тетраэдр  $MA_1A_2A_3$  (рис. 4).

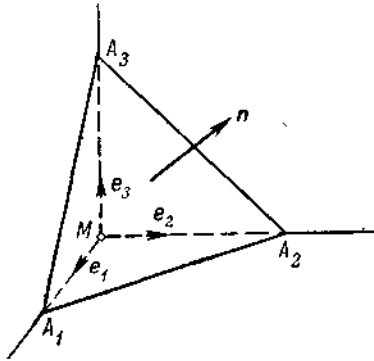


Рис. 4.

Рассмотрим, какие силы действуют на элемент объема нашего тела, заключенного внутри тетраэдра. На него, во-первых, действует объемная сила  $f\Delta v$ , где через  $f$  обозначена сила, отнесенная к единице объема. Затем на каждую из четырех граней тетраэдра действует сила со стороны окружающих частей тела. Если положить  $\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_1)$ , то на грань  $MA_2A_3$  тетраэдра будет действовать сила  $-\mathbf{p}_1\Delta s_1$ , где через  $\Delta s_1$  обозначена площадь этой грани. Знак минус в этом выражении стоит потому, что внешняя нормаль к грани  $MA_2A_3$  тетраэдра совпадает с вектором  $-\mathbf{e}_1$ . Точно так же силы, действующие на грани  $MA_3A_1$  и  $MA_1A_2$ , будут равны соответственно  $-\mathbf{p}_2\Delta s_2$  и  $-\mathbf{p}_3\Delta s_3$ , где  $\mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_2)$ ,  $\mathbf{p}_3 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e}_3)$ , а  $\Delta s_2$  и  $\Delta s_3$  — площади этих граней. На грань  $A_1A_2A_3$  будет действовать сила  $\mathbf{p}\Delta s$ , где  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{n})$  и  $\Delta s$  — площадь треугольника  $A_1A_2A_3$ . Так как рассматриваемый элемент объема находится в статическом равновесии, то имеет место равенство

$$f\Delta v - p_1\Delta s_1 - p_2\Delta s_2 - p_3\Delta s_3 + p\Delta s = 0.$$

Первое слагаемое этой суммы имеет более высокий порядок малости, чем остальные. Поэтому им можно пренебречь и написать предыдущее равенство в виде

$$p\Delta s = p_1\Delta s_1 + p_2\Delta s_2 + p_3\Delta s_3 = p_i\Delta s_i.$$

(1)

Но легко проверить, что

$$\frac{\Delta s_i}{\Delta s} = \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i$  — угол, который нормаль  $\mathbf{n}$  к плоскости  $\pi$  образует с вектором  $\mathbf{e}_i$ . Так как вектор  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$  единичный, то  $n_i = \cos \alpha_i$ . Поэтому равенство (1) можно переписать так:

$$p = p_i n_i.$$

Запишем разложение векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_i$  по базису  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

$$\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i$$

Подставляя эти разложения в предыдущее равенство и приравнивая коэффициенты при линейно независимых векторах  $\mathbf{e}_i$ , получим

$$p_i = \sigma_{ij} n_j$$

Это равенство доказывает наше утверждение: напряжение  $p$  линейно зависит от нормали  $\mathbf{n}$  к элементу поверхности, функция  $\sigma$  является линейной вектор-функцией, а матрица  $\sigma_{ij}$  этой линейной вектор-функции образует тензор второй валентности, который называют *тензором напряжений*.

2. Докажем теперь, что тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  является симметричным тензором. Для этого выделим из нашего тела куб с ребром  $\Delta l$  и гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 5), и посмотрим, какие силы на него действуют.

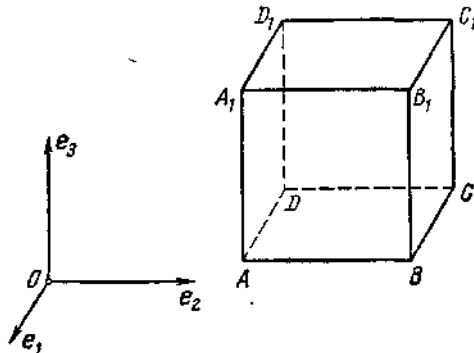


Рис. 5.

Обозначим через  $\Delta s$  площадь грани куба. Тогда на его грани  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  действуют силы  $p_1\Delta s$  и  $-p_1\Delta s$ , на грани  $BCC_1B_1$  и  $ADD_1A_1$  — силы  $p_2\Delta s$  и  $-p_2\Delta s$ , на грани  $A_1B_1C_1D_1$  и  $ABCD$  — силы  $p_3\Delta s$  и  $-p_3\Delta s$ . Эти силы можно считать приложенными в центрах граней. Подсчитаем момент этих сил относительно точки  $P$ , расположенной в центре куба. Легко видеть, что этот момент будет равен следующему выражению:

$$M = e_1\Delta l \times p_1\Delta s + e_2\Delta l \times p_2\Delta s + e_3\Delta l \times p_3\Delta s.$$

Вычисляя входящие сюда векторные произведения по известным формулам, получим

$$M = \varepsilon \{(\sigma_{32} - \sigma_{23})e_1 + (\sigma_{13} - \sigma_{31})e_2 + (\sigma_{21} - \sigma_{12})e_3\} \Delta v.$$

Но так как выделенный кубик находится в статическом равновесии, то  $M = 0$ . Отсюда следует симметрия тензора  $\sigma_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Диагональные компоненты  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  тензора напряжений называются *нормальными компонентами*, так как определяемые ими составляющие векторов  $p_i$  действуют перпендикулярно соответствующим координатным плоскостям. Положительное значение компоненты  $\sigma_{ii}$  характеризует растяжение, а отрицательное — сжатие тела. Компоненты  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{23}$ ,  $\sigma_{31}$  называются *сдвиговыми компонентами* тензора напряжений, так как определяемые ими составляющие векторов  $p_i$  действуют параллельно соответствующим координатным плоскостям.

Тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , как всякий симметричный тензор, может быть приведен к диагональному виду

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

при помощи ортогонального преобразования. При этом сдвиговые компоненты тензора  $\sigma_{ij}$  обращаются в нуль, а нормальные компоненты совпадают с собственными значениями этого тензора. Их называют *главными напряжениями*, а соответствующие им собственные направления — *главными направлениями тензора напряжений*.

Уравнение характеристической поверхности тензора напряжений записывается в виде

$$\sigma_{ij}x_ix_j = 1.$$

Эта поверхность называется *поверхностью напряжений*. Если принять за базисные главные направления тензора  $\sigma_{ij}$ , то уравнение этой поверхности примет вид

$$\sigma_1 x_1^2 + \sigma_2 x_2^2 + \sigma_3 x_3^2 = 1.$$

Так как числа  $\sigma_i$  могут быть как положительными, так и отрицательными, то эта поверхность может иметь любой из четырех известных видов.

Отметим еще некоторые частные формы тензора напряжений. Будем считать при этом, что за базисные направления  $e_1, e_2, e_3$  приняты главные направления этого тензора.

а) *Линейное напряженное состояние (одноосное напряжение)* характеризуется тензором  $\sigma_{ij}$ , имеющим вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такое строение тензор напряжений имеет, например, в длинном однородном вертикальном стержне, к концу которого подвешен груз.

б) *Плоское напряженное состояние (двуосное напряжение)* характеризуется тензором  $\sigma_{ij}$  вида

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем плоского напряженного состояния является чистый сдвиг, при котором тензор напряжений имеет вид

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Путем поворота базиса на  $45^\circ$  вокруг вектора  $e_3$  матрица чистого сдвига приводится к виду

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

в) *Объемное напряженное состояние (трехосное напряжение)* — наиболее общая система напряжений с тремя отличными от нуля главными напряжениями. Его частным случаем является гидростатическое сжатие, при котором тензор  $\sigma_{ij}$  является шаровым:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

где  $p$  — давление, постоянное в рассматриваемом объеме жидкости.

3. Предположим, что тело подвергается однородной малой деформации. В результате этой деформации точка  $M$  тела с радиусом-вектором  $x$  переходит в точку  $N$  с радиусом-вектором  $y$ , так что

$$y = x + u,$$

где вектор  $u$ , определяющий перемещение точки  $M$ , зависит от вектора  $x$ :  $u = u(x)$ . Рассмотрим, как деформируется при этом окрестность точки  $M$ . Пусть  $M_1$  — принадлежащая этой окрестности точка с радиусом-вектором  $x_1$  (рис. 6), так что

$$x_1 = x + \Delta x.$$

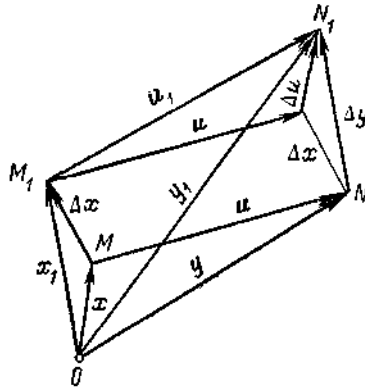


Рис. 6.

Она перейдет в точку  $N_1$  с радиусом-вектором

$$y_1 = x_1 + u_1,$$

где  $u_1 = u(x_1)$ . Если положить  $\Delta y = y_1 - y$ , то получим

$$\Delta y = \Delta x + \Delta u,$$

(2)

где

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x).$$

Вектор  $\Delta u$  определяет деформацию окрестности точки  $M$ . И так как эта деформация предполагается однородной, т. е. одинаковой во всех точках рассматриваемого тела, то вектор  $\Delta u$  не должен зависеть от вектора  $x$ , а будет зависеть только от вектора  $\Delta x$ :



$$\Delta u = f(\Delta x).$$

Покажем, что зависимость вектора  $\Delta u$  от вектора  $\Delta x$  является линейной зависимостью. Будем считать при этом, что функция  $f$  является непрерывной функцией аргумента  $\Delta x$ , — это согласуется с физическим смыслом функции  $f$ .

Итак, пусть  $M_1, M_2$  — две точки из окрестности точки  $M$ , определяемые радиусами-векторами  $x_1$  и  $x_2$ ,  $u_1 = u(x_1)$ ,  $u_2 = u(x_2)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x, & \Delta x_2 &= x_2 - x, \\ \Delta u_1 &= u_1 - u, & \Delta u_2 &= u_2 - u. \end{aligned}$$

Тогда

$$u_1 - u = f(x_1 - x), \quad u_2 - u = f(x_2 - x).$$

Складывая эти равенства, получим

$$u_2 - u = f(x_1 - x) + f(x_2 - x).$$

Но  $u_2 - u = f(x_2 - x) = f(\Delta x_1 + \Delta x_2)$ . Поэтому предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$f(\Delta x_1 + \Delta x_2) = f(\Delta x_1) + f(\Delta x_2),$$

что совпадает с первым условием, которому удовлетворяет линейная вектор-функция.

Для доказательства выполнения второго ее свойства заметим, что из предыдущего равенства следует, что

$$f(n \Delta x) = n f(\Delta x)$$

при целом  $n$ . Далее, если  $m$  — целое, то

$$f(\Delta x) = f\left(m \frac{\Delta x}{m}\right) = m f\left(\frac{\Delta x}{m}\right),$$

откуда

$$f\left(\frac{\Delta x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(\Delta x).$$

Сопоставляя предыдущие равенства, получим

$$f\left(\frac{n}{m} \Delta x\right) = \frac{n}{m} f(\Delta x),$$

т. е. второе условие, определяющее линейную вектор-функцию, выполняется для рациональных множителей  $\alpha = \frac{n}{m}$ . Но так как  $f$  по предположению непрерывна, то это условие будет выполняться и для любых действительных  $\alpha$ :

$$f(\alpha \Delta x) = \alpha f(\Delta x).$$

Таким образом, мы доказали, что при однородной деформации вектор  $\Delta u$ , определяющий деформацию окрестности точки  $M$  рассматриваемого тела, является линейной вектор-функцией от  $\Delta x$ . Если обозначить через  $\Delta x_i$  и  $\Delta u_i$  координаты векторов  $\Delta x$  и  $\Delta u$  относительно ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , то эта линейная вектор-функция может быть записана в виде

$$\Delta u_i = e_{ij} \Delta x_j,$$

где  $e_{ij}$  — тензор второй валентности. Если обозначить через  $\Delta y_i$  координаты вектора  $\Delta y$ , характеризующего положение точки  $N_i$  тела относительно точки  $N$ , то из равенства (2) получим

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij}) \Delta x_j,$$

(3)

Так как деформация предполагается малой, то компоненты тензора  $e_{ij}$  следует считать настолько малыми, что их произведениями при вычислениях можно пренебрегать.

Тензор  $e_{ij}$  описывает не только деформацию окрестности точки  $M$  рассматриваемого тела, но и ее вращение вокруг точки  $M$ . Чтобы выделить из него часть, которая определяет чистую деформацию, рассмотрим, как меняются метрические свойства (длины и углы) при переходе от окрестности точки  $M$  к окрестности точки  $N$ . Метрические свойства в окрестности точки  $M$  определяются квадратичной формой  $\Delta x^2$ , а в окрестности точки  $N$  — квадратичной формой  $\Delta y^2$ . Но из равенства (2) следует, что

$$\Delta y^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta u + \Delta u^2.$$

Так как деформация малая, то третьим слагаемым в правой части равенства можно пренебречь, и мы получим

$$\Delta y^2 = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta u,$$

откуда

$$\Delta y^2 - \Delta x^2 = 2\Delta x \Delta u.$$

Полученная величина характеризует чистую деформацию окрестности точки  $M$ . Правая часть этого выражения может быть записана в виде

$$2\Delta x \Delta u = 2e_{ij} \Delta x_i \Delta x_j.$$

(4)

Разложим теперь тензор  $e_{ij}$  на симметричную часть  $\varepsilon_{ij}$  и кососимметричную часть  $\omega_{ij}$ :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} - e_{ji}).$$

Подставляя это разложение тензора  $e_{ij}$  в равенство (4), получим

$$2\Delta x \Delta u = 2\varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j,$$

так как  $\omega_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = 0$ . Следовательно, деформация окрестности точки  $M$  определяется только симметричным тензором  $\varepsilon_{ij}$ , который и называется *тензором деформации*. Кососимметричный тензор  $\omega_{ij}$  не влияет на изменение метрических - свойств окрестности точки  $M$  и, следовательно, определяет ее вращение вокруг точки  $M$ . 4.

Рассмотрим отдельно случаи, когда тензор  $e_{ij}$  является симметричным или кососимметричным. Пусть сначала  $e_{ij} = \omega_{ij}$  — кососимметричный тензор. Покажем, что этот тензор порождает малый поворот окрестности точки  $M$  вокруг оси, определяемой вектором  $\omega = \omega_i e_i$ , где

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk}.$$

В самом деле, если  $\Omega$  — линейное преобразование, имеющее кососимметричную матрицу  $(\omega_{ik})$ , то, как было показано ранее,

$$\Omega \Delta x = \omega \times \Delta x.$$

Поэтому

$$\Delta u = \omega \times \Delta x$$

и

$$\Delta y = \Delta x + \omega \times \Delta x.$$

Но легко видеть, что последнее преобразование представляет собой поворот на малый угол  $|\omega|$  вокруг оси, проходящей через точку  $O$  и определяемой вектором  $\omega$  (рис. 7).

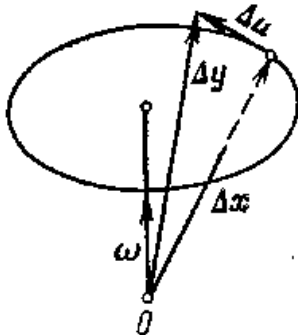


Рис. 7.

Действительно, вектор  $\Delta u$  будет касательным к окружности, описываемой концом вектора  $\Delta x$  при его вращении вокруг оси  $O\omega$ , и его длина равна  $|\Delta u| = |\omega| \rho$ , где  $\rho$  — расстояние конца вектора  $\Delta x$  до оси  $O\omega$ .

Пусть теперь  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}$  — симметричный тензор. Этот тензор определяет чистую деформацию окрестности точки  $M$ . Тогда

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) \Delta x_j.$$

Вектор  $\Delta x = \Delta x_1 e_1$  переходит в вектор

$$\Delta y = [(1 + \varepsilon_{11}) e_1 + \varepsilon_{21} e_2 + \varepsilon_{31} e_3] \Delta x_1.$$

При этом с точностью до величин второго порядка малости

$$|\Delta y| = (1 + \varepsilon_{11}) |\Delta x|.$$

Следовательно, компонента  $\varepsilon_{11}$  тензора  $\varepsilon_{ij}$  определяет относительное удлинение тела вдоль направления  $e_1$ . Компоненты  $\varepsilon_{21}$  и  $\varepsilon_{31}$  будут определять поворот этого направления по отношению к векторам  $e_2$  и  $e_3$ . Точно так же компоненты  $\varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{33}$  определяют относительное удлинение тела вдоль направлений  $e_2$  и  $e_3$ , а компоненты  $\varepsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  — поворот этих направлений. Кроме того, так как  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , то поворот вектора  $e_j$  в направлении вектора  $e_i$  совпадает с поворотом вектора  $e_i$  в направлении вектора  $e_j$ . Компоненты  $\varepsilon_{ij}$  при  $i \neq j$  называют *сдвиговыми компонентами* тензора деформации.

Найдем теперь относительное удлинение тела вдоль произвольного направления, определяемого единичным вектором  $l = l_i e_i$ . Пусть  $\Delta x = \Delta x l$ . Тогда

$$\Delta u_i = \varepsilon_{ij} l_j \Delta x.$$

Удлинение тела вдоль направления вектора  $l$  равно проекции вектора  $\Delta u$  на  $l$ , которая вычисляется следующим образом:

$$\text{Пр}_l \Delta u = l \cdot \Delta u = \varepsilon_{ij} l_i l_j \Delta x.$$

Относительное удлинение тела вдоль направления вектора  $l$  равно отношению этой проекции к первоначальной длине вектора  $\Delta x$ , т. е. к  $\Delta x$ . Если обозначить относительное удлинение через  $\varepsilon(l)$ , то

$$\varepsilon(l) = \varepsilon_{ij} l_i l_j.$$

Легко найти величину относительного удлинения  $\varepsilon(I)$  тела, построив характеристическую поверхность тензора  $\varepsilon_{ij}$ , уравнение которой имеет вид

$$\varepsilon_{ij}x_i x_j = 1.$$

Используя результат, полученный ранее, можно написать, что

$$\varepsilon(I) = \frac{1}{OM^2},$$

где  $OM$  — расстояние от центра  $O$  характеристической поверхности до точки  $M$ , в которой она пересекается с лучом  $OI$ .

Определим еще, как изменится объем при деформации тела, определяемой тензором  $\varepsilon_{ij}$ . Как было доказано ранее, коэффициент искажения объемов при линейном преобразовании равен определителю матрицы этого линейного преобразования. Если обозначить через  $\Delta v_x$  объем элемента тела до деформации, а через  $\Delta v_y$  — объем того же элемента после деформации, то получим

$$\frac{\Delta v_y}{\Delta v_x} = |\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}| \approx 1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

где в правой части отброшены слагаемые, содержащие произведения компонент тензора деформации, являющиеся величинами не ниже второго порядка малости. Из этого соотношения видно, что коэффициент относительного объемного расширения тела при деформации, определяемой тензором  $\varepsilon_{ij}$ , равен следу этого тензора:

$$\mu = \frac{\Delta v_y - \Delta v_x}{\Delta v_x} = \text{Sp } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii}.$$

Приведем симметричный тензор  $\varepsilon_{ij}$  к главным осям. Тогда его матрица примет диагональный вид:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения  $\varepsilon_i$  тензора  $\varepsilon_{ij}$  называются *главными коэффициентами деформации* тела, а его главные оси — *главными направлениями деформации*. Главные направления деформации тела характеризуются тем, что они остаются взаимно ортогональными при деформации. Главные коэффициенты деформации  $\varepsilon_i$  определяют удлинение тела вдоль главных направлений деформации.

5. Вернемся теперь к общему случаю. Пусть однородная малая деформация тела определяется уравнениями

$$\Delta y_i = (\delta_{ij} + e_{ij}) \Delta x_j, \quad (5)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ . Так как с точностью до величин второго порядка малости

$$\delta_{ij} + e_{ij} \approx (\delta_{ik} + \omega_{ik})(\delta_{kj} + \varepsilon_{kj}),$$

то произвольная деформация окрестности точки  $M$  представляет произведение чистой деформации, определяемой симметричным тензором деформации  $\varepsilon_{kj}$ , и поворота, определяемого кососимметричным тензором  $\omega_{ij}$ . При этом главные направления тензора деформации, оставаясь неподвижными в теле, поворачиваются вместе с ним под влиянием тензора поворота  $\omega_{ij}$

$$\omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{jk}$$

вокруг вектора  $\omega$  с координатами на угол  $|\omega|$ .

Рассмотрим поверхность, в которую перейдет сфера радиуса  $\rho$  с центром в точке  $M$  при малой деформации тела. Уравнение этой сферы может быть записано в виде

$$\Delta x^2 = \rho^2. \quad (6)$$

Чтобы получить уравнение искомой поверхности, нужно в уравнении (6) выразить координаты вектора  $\Delta x$  через координаты вектора  $\Delta y$  с помощью уравнений (5). С точностью до величин второго порядка малости мы имеем

$$\Delta x_i = (\delta_{ij} - e_{ij}) \Delta y_j.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6) и снова отбрасывая члены второго порядка малости, получаем

$$(\delta_{ij} - 2e_{ij}) \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2.$$

Но так как  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$ , где  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ,

то последнее уравнение может быть переписано в виде

$$(\delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}) \Delta y_i \Delta y_j = \rho^2. \quad (7)$$

Таким образом, при рассматриваемой деформации сфера с центром в точке  $M$ , определяемая уравнением (6), переходит в центральную поверхность второго порядка с центром в точке  $N$ , определяемую уравнением (7). Легко доказать, что эта поверхность будет эллипсоидом. В самом деле, приведем тензор  $\varepsilon_{ij}$  к каноническому виду. Тогда уравнение (7) запишется так:

$$(1 - 2\varepsilon_1) \Delta y_1^2 + (1 - 2\varepsilon_2) \Delta y_2^2 + (1 - 2\varepsilon_3) \Delta y_3^2 = \rho^2.$$

Пользуясь малостью величин  $\varepsilon_i$ , перепишем его в виде

$$\frac{\Delta y_1^2}{\rho^2 (1 + \varepsilon_1)^2} + \frac{\Delta y_2^2}{\rho^2 (1 + \varepsilon_2)^2} + \frac{\Delta y_3^2}{\rho^2 (1 + \varepsilon_3)^2} = 1.$$

А это уравнение представляет собой уравнение эллипсоида, полуоси которого  $\rho_i = \rho (1 + \varepsilon_i)$ . Этот эллипсоид называется *эллипсоидом деформации*.

6. Заметим, что рассмотренные тензоры напряжений и деформации не связаны с симметрией кристалла. Это происходит потому, что указанные тензоры описывают не свойства кристалла, а первый из них описывает внешнее воздействие на кристалл, а второй — реакцию кристалла на это или какое-либо другое воздействие. Такие тензоры в кристаллографии называют *полевыми* тензорами. Тензоры же, описывающие свойства кристалла, называют *материальными* тензорами. К ним относятся рассмотренные выше тензор удельной электропроводности, тензор теплопроводности, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и целый ряд тензоров, которые будут рассмотрены в следующем пункте.

### ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Однородное тело находится под действием растягивающего усилия, направленного вдоль единичного вектора  $l = l_i e_i$  и равного  $\sigma$  кз/см<sup>2</sup>. Определить тензор напряжений этого тела.
2. Доказать, что если след тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  равен нулю, то этот тензор может быть приведен к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что тензор  $\sigma_{ij}$  определяет напряжение сдвига.

3. Доказать, что произвольное напряженное состояние тела, определяемое тензором напряжения  $\sigma_{ij}$ , может быть представлено в виде суммы гидростатического сжатия и напряжения сдвига.
4. В базисе  $\{e_1, e_2, e_3\}$  компоненты тензора напряжений однородного тела имеют следующие значения:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Найти главные направления и главные напряжения этого тензора.

б) Написать уравнение характеристической поверхности тензора  $\sigma_{ij}$  в старой и новой системах координат.

в) Представить тензор  $\sigma_{ij}$  в виде суммы тензора  $\sigma''_{ij}$ , определяющего гидростатическое сжатие, и тензора  $\sigma'_{ij}$ , определяющего сдвиг.

г) Найти базис, в котором тензор  $\sigma'_{ij}$  будет иметь только сдвиговые компоненты.

5. Однородное тело подвергается деформации сдвига так, что все плоскости, параллельные плоскости  $x_1Ox_2$ , переходят в себя и все точки тела перемещаются в направлении единичного вектора  $I = l_1e_1 + l_2e_2$ , параллельного этой плоскости. Найти тензор деформации тела.

6. Малая деформация тела задается тензором

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

а) Определить тензор чистой деформации  $\varepsilon_{ij}$  и тензор поворота  $\omega_{ij}$ .

б) Найти главные коэффициенты и главные направления деформации тела.

в) Написать уравнение эллипсоида деформации в старой и новой системах координат.

г) Найти направление оси вращения и угол поворота тела.

7. Доказать, что тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$  может быть представлен в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij},$$

где тензор  $\varepsilon'_{ij}$  определяет деформацию чистого сдвига, т. е. удовлетворяет условию  $\varepsilon'_{ij} = 0$ , а тензор  $\varepsilon''_{ij}$ , определяет всестороннее сжатие и пропорционален тензору  $\delta_{ij}$ . Найти тензоры  $\varepsilon'_{ij}$  и  $\varepsilon''_{ij}$ .

#### 4. Дальнейшие свойства кристаллов

1. В п.2 мы рассмотрели некоторые свойства кристаллов. Все они были связаны с воздействием на кристалл некоторой векторной величины, вызывающей в ней эффект, характеризуемый снова векторной величиной. Такие свойства кристаллов описываются тензорами второй валентности. Сейчас мы рассмотрим свойства кристаллов, которые связаны либо с



воздействием на кристалл не векторных величин, либо с тем, что эффект, вызываемый в кристалле этим воздействием, характеризуется не векторной величиной.

Самым простым свойством такого рода является *тепловое расширение* кристалла. При изменении температуры кристалла на величину  $\Delta T$  происходит деформация кристалла, описываемая тензором деформации  $\varepsilon_{ij}$ , которая для малых значений  $\Delta T$  пропорциональна изменению температуры. Поэтому должно иметь место соотношение

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} \Delta T.$$

Так как  $\Delta T$  — скаляр, а  $\varepsilon_{ij}$  — симметричный тензор второй валентности, то  $\alpha_{ij}$  будет также симметричным тензором второй валентности, который называется *тензором теплового расширения*. Главные направления тензора  $\alpha_{ij}$  называются *главными направлениями теплового расширения*, а его собственные значения  $\alpha_i$  — *главными коэффициентами расширения*. Характеристическая поверхность тензора расширения имеет уравнение

$$\alpha_{ij} x_i x_j = 1.$$

Форма и положение этой поверхности в кристалле, согласно принципу Неймана, связаны с симметрией, которой обладает кристалл.

2. В некоторых кристаллах под действием напряжений возникает электрическая поляризация. Это явление называется *прямым пьезоэлектрическим эффектом*. Напряжение в кристалле описывается тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , а электрическая поляризация — вектором  $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ . Связь между этими величинами при достаточно малых напряжениях оказывается линейной, и поэтому

$$\mathbf{p}_i = d_{ijk} \sigma_{jk}, \tag{1}$$

где  $d_{ijk}$  — тензор валентности три. Компоненты этого тензора называют *пьезоэлектрическими модулями*, а сам тензор — *тензором пьезоэлектрических модулей* кристалла. Так как тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  симметричен по индексам  $j$  и  $k$ , то и тензор  $d_{ijk}$  можно считать симметричным по этим индексам,  $d_{ijk} = d_{ikj}$ . Поэтому он имеет 18 независимых компонент.

Если пьезоэлектрический кристалл помещен в электрическое поле, то его форма меняется — в нем возникает деформация. Это

явление называется *обратным пьезоэлектрическим эффектом*. Напряженность электрического поля описывается вектором  $E = E_i e_i$ , а деформация кристалла — тензором деформации  $\epsilon_{ij}$ . Так как зависимость между этими величинами при достаточно малых напряжениях  $E$  линейная, то она может быть выражена уравнениями

$$\epsilon_{j,k} = d'_{ijk} E_i,$$

где  $d'_{ijk}$  — тензор валентности три, симметричный по индексам  $j$  и  $k$ . В кристаллофизике доказывается, что прямой и обратный пьезоэлектрические эффекты описываются одним и тем же тензором, т. е. что  $d'_{ijk} = d_{ijk}$ . Поэтому связь между напряжением электрического поля  $E_i$  и деформацией кристалла записывается в виде

$$\epsilon_{jk} = d_{ijk} E_i, \tag{2}$$

где  $d_{ijk}$  — снова тензор пьезоэлектрических модулей.

Рассмотрим теперь, как влияет симметрия кристалла на строение тензора  $d_{ijk}$ . Предположим, что кристалл переводится в себя ортогональным преобразованием с матрицей  $A$ . В силу принципа Неймана пьезоэлектрические свойства кристалла при этом не изменяются. Произведем преобразование ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , связанного с кристаллом, при помощи матрицы  $\Gamma = A^{-1}$ . Тогда в новом базисе  $\{e_1', e_2', e_3'\}$  компоненты тензора пьезоэлектрических модулей должны совпадать с соответствующими компонентами в старом базисе, т. е.

$$d_{i'j'k'} = d_{ijk},$$

где  $i' = i, j' = j, k' = k$ . Но если матрица  $\Gamma$  имеет вид  $\Gamma = (\gamma_{i'p})$ , то при преобразовании базиса компоненты тензора  $d_{i'j'k'}$  преобразуются по обычным формулам:

$$d_{i'j'k'} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} d_{pqr}.$$

Сравнивая два последних соотношения, найдем условие инвариантности пьезоэлектрических свойств кристалла по отношению к преобразованию  $A$ :

$$d_{ijk} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} d_{pqr}. \tag{3}$$

Пусть, например, преобразование  $A$  представляет собой симметрию кристалла относительно некоторой точки — центра симметрии кристалла. Тогда матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и  $\Gamma = A^{-1} = A$ . Поэтому уравнения (3) принимают вид

$$d_{ijk} = -d_{ijk},$$

откуда следует, что  $d_{ijk} = 0$ . Это означает, что кристалл, обладающий центральной симметрией, не может быть пьезоэлектриком.

Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии второго порядка, пусть этой осью будет ось  $Ox_3$ . Тогда этот кристалл переходит в себя при преобразовании  $A$  с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае снова  $\Gamma = A$ , и из условия (3) инвариантности тензора  $d_{ijk}$  получим

$$\begin{aligned} d_{111} = d_{112} = d_{211} = d_{122} = d_{212} = d_{222} = 0, \\ d_{133} = d_{233} = d_{313} = d_{323} = 0. \end{aligned}$$

Отличными от нуля будут лишь те восемь компонент тензора  $d_{ijk}$ , в которых либо один, либо все три индекса принимают значение 3. Подобным образом можно определить строение тензора  $d_{ijk}$  для всех кристаллографических классов.

Рассмотрим характеристическую поверхность тензора пьезоэлектрических модулей. Ее уравнение записывается в виде

$$d_{ijk} x_i x_j x_k = 1.$$

Выясним, какой физический смысл имеет эта поверхность.

Предположим, что кристалл подвергается однородному растяжению вдоль направления, определяемого единичным вектором  $l$ . Обозначим через  $\sigma$  величину нормального напряжения, действующего на площадку, перпендикулярную этому направлению.

Тогда тензор напряжения этого кристалла имеет вид

$$\sigma_{ij} = l_i l_j \sigma.$$

Поэтому уравнение (1) переписывается в форме

$$p_i = d_{ijk} l_j l_k \sigma.$$

Найдем составляющую вектора  $p$  электрической поляризации кристалла по направлению вектора  $l$ . Так как  $|l|=1$ , то эта составляющая определяется по формуле

$$\text{Пр}_i \mathbf{p} = \mathbf{l} \mathbf{p} = l_i \mathbf{p}_i,$$

в силу чего

$$\text{Пр}_i \mathbf{p} = d_{ijk} l_i l_j l_k \sigma.$$

Но, как мы видели ранее,

$$d_{ijk} l_i l_j l_k = \frac{1}{OM^3}, \quad (4)$$

где  $OM$  — расстояние от начала координат до точки  $M$  характеристической поверхности тензора  $d_{ijk}$ , в которой она пересекается с прямой  $OL$ . Поэтому

$$\frac{\text{Пр}_i \mathbf{p}}{\sigma} = \frac{1}{OM^3},$$

т. е. при растяжении пьезоэлектрического кристалла отношение проекции вектора электрической поляризации на направление растяжения к величине нормального напряжения кристалла равно единице, деленной на куб расстояния от начала координат до лежащей в направлении удлинения точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей.

Пусть, далее,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля, и котором находится кристалл, и  $\mathbf{E} = E\mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  — единичный вектор с координатами  $l_i$ . Формула (2) теперь имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijk} l_k E.$$

Найдем относительное удлинение кристалла в направлении вектора  $\mathbf{l}$ , которое произойдет в нем под воздействием напряженности  $\mathbf{E}$ . Это относительное удлинение, как было показано ранее, равно

$$\varepsilon(\mathbf{l}) = \varepsilon_{ij} l_i l_j.$$

Поэтому

$$\varepsilon(\mathbf{l}) = d_{ijk} l_i l_j l_k E.$$

Пользуясь соотношением (4), мы получим, что

$$\frac{\varepsilon(\mathbf{l})}{E} = \frac{1}{OM^3},$$

где  $OM$  — расстояние от начала координат до точки характеристической поверхности тензора пьезоэлектрических модулей, лежащей в направлении вектора  $\mathbf{l}$ .

Заметим, что так как тензор  $d_{ijk}$  не является симметричным, то его характеристическая поверхность описывает не все свойства этого тензора, а только свойства его симметричной части.

3. В предыдущем параграфе мы рассматривали тензоры напряжений и деформации однородного тела независимо друг от друга. Но обычно напряжения, которые возникают в теле, вызывают его деформацию. Если величина напряжений не превышает некоторых предельных значений, то деформация тела является обратимой, т. е. она исчезает при снятии напряжений. Такая деформация называется *упругой*. Упругая деформация тела линейно зависит от его напряжений. Так как деформация тела описывается тензором деформации  $\epsilon_{ij}$ , а его напряженное состояние — тензором напряжения  $\sigma_{ij}$ , то линейная зависимость между этими тензорами может быть записана в виде

$$\epsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl}$$

(5)

Как следует из ранее доказанной теоремы, входящие в эти соотношения коэффициенты  $s_{ijkl}$  образуют тензор четвертой валентности. Этот тензор называют *тензором модулей податливости* кристалла.

Так как тензоры  $\epsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  симметричны, то и тензор  $s_{ijkl}$  будет симметричным по двум первым и двум последним индексам:

$$s_{ijkl} = s_{jikl}, \quad s_{ijkl} = s_{ijlk}$$

(6)

Но в теории упругости показывается, что тензор  $s_{ijkl}$  обладает еще одной симметрией,

$$s_{ijkl} = s_{klij}$$

(7)

Тензор  $s_{ijkl}$  имеет всего  $3^4 = 81$  компоненту. Но в силу указанных здесь симметрии число различных из этих компонент значительно уменьшается. Как показывает несложный подсчет, число различных компонент этого тензора в общем случае равно 21.

Часто вместо уравнений (5) рассматривают выражение тензора деформации через тензор напряжений. Это выражение может быть записано в виде

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

(8)

Входящие сюда коэффициенты  $c_{ijkl}$  также образуют четырехвалентный тензор, который называют *тензором модулей упругости*. Этот тензор обладает такими же симметриями, как и тензор  $s_{ijkl}$ . Тензор  $c_{ijkl}$  является в некотором смысле обратным

тензором для тензора  $s_{ijkl}$ . Если подставить выражения тензора  $\sigma_{ij}$  по формулам (8) в уравнения (5), то получатся соотношения

$$\epsilon_{ij} = s_{ijpq} c_{pqkl} \epsilon_{kl}$$

Отсюда следует, что

$$s_{ijpq} c_{pqkl} = \delta_{i(k} \delta_{l)j}$$

где в правой части этого равенства произведено симметрирование по индексам  $k$  и  $l$ . Здесь

$$\delta_{i(k} \delta_{l)j} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

— тензор, симметричный по индексам  $i, j$  и  $k, l$  и не меняющийся также при перестановке этих пар индексов.

4. Из принципа Неймана следует, что наличие той или иной симметрии у кристалла влечет за собой соответствующую симметрию его упругих свойств, т. е. приводит к появлению определенных зависимостей между компонентами тензоров  $s_{ijkl}$  и  $c_{ijkl}$ . Будем для определенности рассматривать тензор модулей упругости  $c_{ijkl}$ . При переходе от базиса  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  к новому базису  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  коэффициенты тензора  $c_{ijkl}$  преобразуются по формулам

$$c_{i'j'k'l'} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} \gamma_{l's} c_{pqrs}$$

Если свойства кристалла относительно обоих рассматриваемых базисов оказываются одинаковыми, то имеют место соотношения

$$c_{i'j'k'l'} = c_{ijkl}$$

где  $i'=i, j'=j, k'=k, l'=l$ . Сравнивая два предыдущих равенства, мы найдем искомые соотношения между компонентами тензора  $c_{ijkl}$  в виде

$$c_{ijkl} = \gamma_{i'p} \gamma_{j'q} \gamma_{k'r} \gamma_{l's} c_{pqrs}$$

где преобразование координат, определяемое матрицей  $\Gamma = (\gamma_{i'p})$ , принадлежит точечной группе преобразований кристалла.

Посмотрим, как отразится на строении тензора наличие некоторых элементов симметрии в кристалле  $c_{ijkl}$ . Заметим прежде всего, что наличие центра симметрии не влияет на строение этого тензора, так как центральная симметрия определяется матрицей  $\Gamma_0 = -E$ , подстановка которой в равенства (9) приводит к тождеству. Предположим, далее, что кристалл имеет ось симметрии. Примем эту ось за ось  $Oe_3$ . Тогда матрица  $\Gamma$  будет иметь вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

вследствие чего равенства (9) запишутся так:

$$c_{ijkl} = (-1)^{\nu} c_{ijk'l},$$

где  $\nu$  равно числу единиц или двоек среди индексов  $i, j, k, l$ . Поэтому обратятся в нуль все те компоненты тензора у которых три или один индекс равны трем. В силу  $c_{ijkl}$  условий симметрии (6) и (7) эти равенства могут быть записаны в виде

$$c_{i333} = 0, \quad c_{ijk3} = 0, \tag{10}$$

где индексы  $i, j, k$  принимают только значения 1 и 2. Мы имеем здесь 8 независимых соотношений для компонент тензора  $c_{ijkl}$ . Следовательно, при наличии оси симметрии тензор модулей упругости имеет только 13 независимых компонент вместо 21 в общем случае.

Покажем теперь, что если тензор  $c_{ijkl}$  допускает симметрию кристалла относительно некоторой оси, то он допускает также его симметрию относительно плоскости, перпендикулярной этой оси. В самом деле, переход к новой системе координат, симметричной исходной относительно плоскости  $x_1Ox_2$ , определяется матрицей

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и легко проверить, что  $\Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma_0$ . Но так как тензор  $c_{ijkl}$  инвариантен по отношению к преобразованиям, определяемым матрицами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ , то он будет инвариантен и по отношению к произведению этих преобразований. Очевидно, что справедливым будет и обратное предложение: если тензор  $c_{ijkl}$  допускает симметрию относительно некоторой плоскости, то он допускает симметрию и относительно любой перпендикулярной ей оси. Отсюда вытекает, что если кристалл допускает симметрию относительно плоскости  $x_1Ox_2$ , то тензор модулей упругости этого кристалла снова связан восемью соотношениями (10) и имеет только 13 независимых компонент.

Подобным же образом, пользуясь соотношениями (9), можно найти зависимость между компонентами тензора  $c_{ijkl}$  при

наличии других элементов симметрии в кристалле и найти эти зависимости для всех кристаллографических систем и классов.

5. Рассмотрим еще вопрос о том, каково будет строение тензора  $c_{ijkl}$  в изотропной среде. Для такой среды уравнения (9) должны выполняться тождественно. Однако эти уравнения содержат четвертые степени величин  $\gamma_{i'p}$ , которые к тому же не являются независимыми, а связаны соотношениями

$$\gamma_{i'p}\gamma_{j'p} = \delta_{i'j'}$$

Поэтому непосредственное их исследование оказывается трудным.

Чтобы облегчить решение задачи, будем считать, что преобразование ортонормированного базиса, определяемое матрицей  $\Gamma$ , есть бесконечно малый поворот вокруг некоторой оси. Тогда эта матрица может быть записана в виде

$$\Gamma = E + \Omega,$$

где  $\Omega = (\omega_{ij})$  — матрица, квадратами и произведениями компонент которой мы можем пренебречь. Основное соотношение

$$\Gamma\Gamma^* = E,$$

которому удовлетворяет ортогональная матрица, теперь может быть переписано в виде

$$(E + \Omega)(E + \Omega)^* = E,$$

откуда

$$E + \Omega + \Omega^* + \Omega\Omega^* = E.$$

Отбрасывая в этом равенстве матрицу  $\Omega\Omega^*$ , компонентами которой будут величины второго порядка малости, мы получим отсюда, что

$$\Omega + \Omega^* = N,$$

т. е.  $\Omega$  — кососимметричная матрица.

Теперь компоненты матрицы  $\Gamma$  могут быть записаны в виде

$$\gamma_{i'p} = \delta_{i'p} + \omega_{i'p},$$

где  $\omega_{ip} + \omega_{pi} = 0$  и  $i = i'$ . Подставляя значения этих компонент в равенства (9) и отбрасывая в них величины, порядок малости которых выше первого, получим

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= (\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr}\omega_{ts} + \\ &+ \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{ls}\omega_{kr} + \delta_{ip}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{jq} + \delta_{jq}\delta_{kr}\delta_{ls}\omega_{ip}) c_{pqrs} = \\ &= c_{ijkl} + \omega_{ip}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl} \end{aligned}$$

Отсюда следуют соотношения



$$\omega_{ip}c_{ijkp} + \omega_{kp}c_{ijpl} + \omega_{jp}c_{ipkl} + \omega_{ip}c_{pjkl} = 0, \quad (11)$$

которые должны выполняться тождественно относительно трех независимых компонент  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{23}$  и  $\omega_{31}$  матрицы  $\Omega$ . Индексы  $i, j, k$  и  $l$  в этих соотношениях могут принимать независимо друг от друга любые значения из 1, 2, 3. Поэтому число этих соотношений равно  $3^4 = 81$ . Однако в силу условий симметрии (6) и (7), которым удовлетворяет тензор  $c_{ijkl}$ , количество этих соотношений снижается до 21. Рассмотрим соотношения (11) для всех возможных значений индексов  $i, j, k, l$ .

а) Пусть  $i = j = k = l$ . Тогда соотношения (11) принимают вид

$$\omega_{ip}c_{piii} = 0,$$

где только по индексу  $p$  производится суммирование. Распишем эту сумму подробно, учитывая, что  $\omega_{ii} = 0$ :

$$\omega_{im}c_{miii} + \omega_{in}c_{niii} = 0.$$

Здесь мы считаем, что по индексам  $i, m$  и  $n$  суммирование не производится, они не равны между собой и представляют некоторую комбинацию из чисел 1, 2, 3. Так как величины  $\omega_{im}$  и  $\omega_{in}$  независимы, а эти соотношения должны выполняться тождественно, то получим отсюда, что

$$c_{miii} = 0. \quad (12)$$

б) Пусть  $i = j = k \neq l$ . Тогда соотношения (11) переписутся в виде

$$\omega_{lp}c_{iiip} + \omega_{ip}(c_{iipl} + 2c_{ipil}) = 0.$$

Расписывая подробно эту сумму, учитывая, что  $\omega_{ii} = 0$  и что выполняются соотношения (12), получим

$$\omega_{il}c_{iiii} + \omega_{il}(c_{iili} + 2c_{ilil}) + \omega_{im}(c_{iiml} + 2c_{imil}) = 0,$$

где снова  $i, l, m$  — некоторая комбинация из разных чисел 1, 2, 3 и суммирования по этим индексам нет. Так как  $\omega_{ii} = -\omega_{ii}$  и величины  $\omega_{il}$  и  $\omega_{im}$  независимы, то отсюда следуют два равенства:

$$c_{iiii} = c_{iili} + 2c_{ilil}, \quad (13)$$

$$c_{iiml} + 2c_{imil} = 0. \quad (14)$$

в) Пусть  $i=j \neq k=l$ . Тогда соотношения (11) дают

$$\omega_{kp}c_{iikp} + \omega_{ip}c_{ipkk} = 0.$$

Если записать эту сумму подробно, как было сделано выше для предыдущих случаев, и использовать независимость величин  $\omega_{ik}$ ,  $\omega_{im}$  и  $\omega_{km}$ , то отсюда получим новые соотношения

$$c_{iikm} = 0, \tag{15}$$

где  $i, k, m$  — произвольная комбинация из трех разных чисел 1, 2, 3.

г) При  $l=k \neq j=l$ ; соотношения (11) дадут

$$c_{ijim} = 0. \tag{16}$$

Заметим, что в силу (15) и (16) соотношения (14) удовлетворяются тождественно.

д) Пусть, наконец,  $l \neq j, l \neq k, j \neq k, k=l$ . Тогда получим

$$2\omega_{kp}c_{ijkp} + \omega_{jp}c_{ipkk} + \omega_{ip}c_{pjkk} = 0,$$

где суммирование производится только по индексу  $p$ . Рассуждения, подобные проведенным выше, показывают, что из этих соотношений следуют равенства

$$c_{iikk} = c_{jjkk}. \tag{17}$$

Перепишем (13) в виде

$$c_{iiii} = c_{iikk} + 2c_{ikik}.$$

Вычитая эти соотношения из исходных равенств (13) и учитывая, что в силу (17)

$$c_{iilit} = c_{iikk},$$

получим

$$c_{ijil} = c_{ikik}. \tag{18}$$

Больше никаких соотношений на компоненты тензора  $c_{ijkl}$  получить нельзя, так как мы использовали все независимые соотношения (11), общее число которых, как уже указывалось ранее, равно 21. Соотношения (17) можно переписать в виде

$$c_{1122} = c_{1133} = c_{2233} = \lambda,$$

а соотношения (18) — в виде

$$c_{1212} = c_{1313} = c_{2323} = \mu.$$

Тогда равенства (13) дадут

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = \lambda + 2\mu.$$

Таким образом, для изотропной среды тензор  $c_{ijkl}$  имеет всего две независимые компоненты, 9 отличных от нуля компонент, и 15 его компонент равны нулю. Величины  $\lambda$  и  $\mu$ , через которые выражаются компоненты этого тензора, называются *коэффициентами Ламе*.

Рассмотрим теперь тензор

$$t_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Он обладает симметриями типа (6) и (7). Непосредственной проверкой легко убедиться, что компоненты этого тензора в точности совпадают с полученными выше значениями компонент тензора  $c_{ijkl}$ . Поэтому для изотропной среды тензор модулей упругости может быть записан в виде

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Соотношения (8), которые связывают тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  в изотропной среде могут быть переписаны так:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \tag{19}$$

Представим деформацию, определяемую тензором  $\varepsilon_{ij}$ , в виде суммы деформации чистого сдвига и всестороннего сжатия. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij}$$

где

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon''_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}.$$

Подставляя это разложение в соотношения (19), получим

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon'_{ij}. \tag{20}$$

Коэффициент

$$k = \lambda + \frac{2}{3} \mu$$

называют *модулем всестороннего сжатия* упругой среды, а коэффициент  $\mu$  — *модулем сдвига*.

Соотношения (19) и (20) позволяют получить обратные формулы, выражающие тензор деформации  $\varepsilon_{ij}$  через тензор

напряжений  $\sigma_{ij}$ . Свертывая соотношения (20) по индексам  $i$  и  $j$  и учитывая, что  $\varepsilon_{ii} = 0$ , мы получим

$$\sigma_{kk} = 3k\varepsilon_{kk},$$

откуда

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3k} \sigma_{kk}.$$

Подставляя это соотношение в (19), заменим там коэффициент  $\lambda$  через  $k - \frac{2}{3}\mu$  и разрешим полученное соотношение относительно  $\varepsilon_{ij}$ . Тогда найдем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{9k} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right).$$

Первый член суммы, стоящей в правой части, определяет всестороннее сжатие тела, а второй — его деформацию сдвига. Последнее соотношение может быть переписано также в форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2\mu - 3k}{18\mu k} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}.$$

Отсюда ясно, что тензор модулей податливости однородной изотропной среды может быть записан в виде

## Литература

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1979.
2. Архангельский А. В. Конечномерные векторные пространства. -М.: Физматгиз, 1982.
3. Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства: Пер. с англ. - М.: Мир, 1965.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М.: Физматгиз, 2003.
5. Беллони Л., РейнаС. Прецессия Томаса. Подход Зоммерфельда: Пер. с англ. // Эйнштейновский сборник 1984 - 85. - М.: Наука, 1988, с. 201 -214.  
В оригинале: Belloni L., Reina C. Sommerfeld's way to the Thomas precession // Europ. J. Phys. - 1986, v. 7, p. 55 - 61.
6. Блох П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. - Киев: Наукова Думка, 1989.
7. Больяи Я. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида...: Пер. с лат. - М. - Л., 1950.  
В оригинале: Bolyai J. Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate ant falsitate Axiomatis XI Euclidei... - Maros-Vasarhely, 1832.
8. Боулер М. Гравитация и относительность: Пер. с англ. - М.: Мир, 1979.  
В оригинале: Bowler M. Gravitation and relativity. — Oxford - New York - Toronto - Sydney - Paris - Frankfurt: Pergamon Press, 1976.
9. Бриллюэн Л. Новый взгляд на теорию относительности: Пер. с франц. -М.: Мир, 1972.  
В оригинале: Brillouin L. Relativity reexamined. -New York - London: Acad. Press, 1970.
10. Булдырев В. С, Павлов Б. С. Линейная алгебра и функции многих переменных. -Л.: Издательство ЛГУ. 1985
11. Вейль Г. Пространство - Время - Материя: Пер. с нем. - М.: Янус, 1996.
- 12.Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. - М.: Наука, 1964, с. 48 - 49.
13. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны: Пер. с англ. - М.: Наука, 1982.

14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.
15. Гаусс К. Отрывки из писем и черновые наброски, относящиеся к неевклидовой геометрии. Пер. с нем. // В сборнике: Об основаниях геометрии. - М.: Гостехиздат, 1950.
16. Гилл Ф., Мюррей У. Численные методы условной оптимизации: Пер. с англ.-М.: Мир, 1977, с. 196-206.
17. Гильберт Д. Основания физики: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. В оригинале: Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Gessellschaft Wiss. Gottingen / Math.-phys. Klasse. - 1915. Heft 3, S. 395.
18. Грегори Р., Кришнамурти Е. Безошибочные вычисления. Методы и приложения. // Гл. III. Точное вычисление обобщённых обратных матриц: Пер. с англ.-М.: Мир, 1988, с. 124- 147.
19. Дикке Р. Гравитация и Вселенная: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. В оригинале: Dicke R. Gravitation and the Universe. - Philadelphia: Amer. Philosoph. Soc, 1970.
20. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.-М.: Наука, 1974.
21. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. -М.: Наука, 1978.
22. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. Том I: Пер. с нем. - М.: Гостехиздат, 1956. В оригинале: SoramerfeldA. Atombau und Spectrallinien. - Braunschweig, 1931. Bd. 1.S. 707-711.
23. Ильин В. А., Лозняк Э.Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1984.
24. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. - М.: ГИТТЛ, 1955.
25. Клейн Ф. Неевклидова геометрия: Пер. с нем. -М.- Л.: ГОНТИ, 1936. В оригинале: Klein F. Vorlesungen iiber Nicht-Euklidische Geometrie. -Berlin: Julius Springer, 1928.
26. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (Эрлангенская программа): Пер. с нем. // В сборнике: Об основаниях геометрии. — М.: Гостехиздат, 1950.
27. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978.
28. Кострикин А. И. Введение в алгебру. //Часть 1. Основы алгебры./ Часть 2. Линейная алгебра-М.: Физматлит, 2002.
29. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. -М.: Наука, 1986.

30. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. - М.: Наука, 1982.
31. Лобачевский Н. И. О началах геометрии. - Казань: Казанский вестник, 1829-1830.
32. Логунов А. А. Лекции по теории относительности. - М.: Наука, 2002.
33. Логунов А. А. Теория гравитационного поля. - М.: Наука. 2001.
34. Лоренц Г. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света: Пер. с англ. // В сборнике: Принцип относительности. - М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Lorentz H. Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light // Amster. Proc, 1904, v. 6, p. 809. / 1904, v. 12. p. 986.
35. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1972.
36. Минковский Г. Пространство и время: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. — М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Minkowski H. Raum und Zeit // Phys. Ztschr. - 1909, Vd. 10, S. 104.
37. Паули В. Теория относительности: Пер. нем. — М.: Наука, 1983.
38. Постников М. М. Лекции по геометрии. // Семестр 1. Аналитическая геометрия. / Семестр 2. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1986.
39. Пуанкаре А. К динамике электрона: Пер. с франц. // В сборнике: Принцип относительности. - М.: Атомиздат, 1973.  
В оригинале: Poincare H. Sur la dynamique de l'electron // C. R. Acad. Sci., Paris - 1905, v. 140, p. 1504. / Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo - 1906. v. XXI, p. 129.
40. Розендорн Э. Р. Поверхности отрицательной кривизны // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНТИ, 1989, т. 48, с. 98-195.
41. Сабитов И. Х. Об изометрических погружениях плоскости Лобачевского в  $E^4$ . // Сибирский математический журнал, 1989, т. 30, №5. с. 179- 186.
42. Синг Дж. Общая теория относительности: Пер. с англ. - М.: Издательство ИЛ, 1963.
43. Смородинский Я. А. Геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна // Эйнштейновский сборник 1971. - М.: Наука, 1972, с. 272-301.

44. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения // ДАН СССР - 1965, т. 163, №3. с. 591-594.
45. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. -М.: Физматгиз, 1963, с. 312-313.
46. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: Гостехиздат, 1961.
47. Харди Г., Литлвуд Д., Полна Г. Неравенства: Пер. с англ. - М.: ИЛ, 1948.
- В оригинале: Hardy G., Littlewood J., Polya G. Inequalities. - London: Cambridge University, 1934.
48. Эйнштейн А. К электродинамике движущихся тел: Пер. с нем. // В сборнике: Принцип относительности. -М.: Атомиздат, 1973.
- В оригинале: Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Korper // Ann. der Phys. -1905, Bd. 17, S. 891.
49. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности: Пер. с нем. // В сборнике: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. - М.: Мир, 1979. В оригинале: Einstein A. Die Grundlagen der allgemeinen Relativitats-theorie // Ann. der Phys. - 1916. Bd. 49, S. 769.
50. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. —М.: Наука, 1969.
51. Born M. // Ann. der Phys. - 1909, Bd. 30, S. 1.
52. Decell H. An application of the Cayley - Hamilton theorem to generalized matrix inversion ,// SIAM Rev. - 1965, v. 7, p. 526 - 528.
53. Dicke R. Gravitation without a Principle of Equivalence // Rev. Mod. Physics-New York: Amer. Phys. Soc, 1957, v. 29, № 3, p. 363-376.
54. Grassmann H. Die lineale Ausdehnungslehre. - Leipzig, 1844.
55. Gillies A. On the classification of matrix generalized inverses // SIAM Rev. - 1970, v. 12, p. 573 - 576.
56. Godel K. Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme // Monatsch. Math. Phys. - 1931, Bd. 38, S. 173-198.
57. Herglotz G. //Ann. der Phys. - 1911, Bd. 36, S. 497.
58. Langevin P. // Scientia. -1911, v. 10, p. 31.
59. Moore E. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. - 1920, № 26, p. 394 - 395.
60. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc.-1955, v. 51, №3. p. 406-413.



61. Souriau J.-M. Une methode pour la decomposition spectrale et  $\Gamma$  inversion des matrices//C R. Acad. Sci.. Paris- 1948, v. 227, p. 1010-1011.
62. Sommerfeld A. Uber die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie// Phys. Ztschr. - 1909, Bd. 10, S. 826 - 829.
63. Thomas L. // Nature. - 1926, v. 117, p. 514.
64. Thirring W. An Alternative Approach to the Theory of Gravitation // Ann.of Phys. -New York and London: Acad. Press, 1961. v. 16, p.96-117.
65. Varicak V. Die Relativtheorie und die Lobatschefkijische Geometrie // Phys. Ztschr. - 1910, Bd. 11. S. 93-96.
66. Whittaker E. A history of the theories of aether and electricity. // Vol. 2 The modern theories 1900- 1926. -London: Nelson, 1953.

Научно-практическое издание  
**Кононюк Анатолий Ефимович**  
**Дискретно-непрерывная математика**

**Книга 4**

**Алгебры**

**Часть 4**

Авторская редакция

Подписано в печать 30.09.2015 г.

Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

**Издатель и изготовитель:**

Издательство «Освита Украины»

04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40

Свидетельство о внесении в Государственный  
реестр

издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.

Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992

E-mail: osvita2005@ukr.net, [www.rambook.ru](http://www.rambook.ru)

—